Donner le même nom à deux choses différentes
Jean-Pierre Bourguignon
2018

Présentation du conférencier par Gérard Berry

Nous allons avoir le plaisir d'entendre Jean-Pierre Bourguignon. Jean-Pierre Bourguignon est mathématicien, en géométrie différentielle, en équations aux dérivées partielles (EDP), en lien avec la physique, la relativité générale, etc. Il a eu une longue carrière aussi, et l'occasion de s'occuper de la recherche à travers la direction de la Société Mathématique de France, de l'IHES, et il est maintenant Directeur du Conseil Européen de la Recherche, du fameux ERC, qui donne des bourses de chercheurs très sélectives, très sérieusement examinées, et ce sont des choses qui changent la vie d'un chercheur et de ses collaborateurs, la France se comportant d'ailleurs très bien vis-à-vis de ça. À l'époque, il faut le rappeler, d'une période de vaches maigres pour la recherche, on peut le dire haut et fort. Merci pour ce travail fondamental, Jean-Pierre, ce sont des choses qui font beaucoup de bien à la recherche et donc voilà, son exposé a un titre assez simple, mais j'attends... C'est un peu mystérieux, c'est "*Donner le même nom à deux choses différentes*". Ce n'est pas la chose qui est mystérieuse, c'est ce qu'on va entendre, pour moi.

Exposé de Jean-Pierre Bourguignon

Bonjour, merci en tout cas aux organisateurs de me donner l'occasion de parler devant vous dans ce colloque assez extraordinaire. Donc moi, mon sujet, c'est effectivement celui qui est là, qui est en fait une citation d'Henri Poincaré, voilà. Donc effectivement, il s'agit de cette citation de Henri Poincaré dans *Science et méthode*, qui dit :

> "*Je ne sais si je n'ai pas déjà dit quelque part (*Donc ça veut dire que c'est une chose qu'il avait en tête depuis longtemps.*) que la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. Il convient que ces choses différentes par la matière soient semblables par la forme, et qu'elles puissent pour ainsi dire se couler dans le même moule.*"

Donc voilà. En fait il continue dans ce texte, donc dans *Science et méthode* qui peut toujours être lu avec tout à fait intérêt, vous savez, il y a eu cette trilogie qui était une trilogie de textes à la fois scientifiques mais aussi philosophiques, destinés un grand public, qui s'appellent *Science et hypothèse, Science et méthode, La valeur de la science*, au début du XIXe siècle, et qui vient d'être d'ailleurs rééditée par Dunod, qui est très intéressante et qui permet de voir qu'un scientifique du niveau de Poincaré n'hésitait pas à passer du temps à écrire des textes de vulgarisation de haut niveau, sans concession mais quand même remarquablement clairs.

Donc il continue dans ce texte, juste après cette citation :

> "*Quand le langage a été bien choisi, on est tout étonné de voir que toutes les démonstrations, faites pour un objet connu, s'appliquent immédiatement à beaucoup d'objets nouveaux ; on n'a rien à changer, pas même les mots, puisque les noms sont devenus les mêmes.*"

Transcription des sous-titres (obtenus par downsub) d'une conférence donnée dans le cadre du Colloque de rentrée 2018 du Collège de France visionnable ici https://www.college-de-france.fr/site/colloque-2018/symposium-2018-10-19-10h10.htm, Denise Vella-Chemla, 16.4.2022

Voilà, donc ça, c'est cette citation en fait. Il continue encore :

> "*Un mot bien choisi suffit le plus souvent pour faire disparaître les exceptions que comportaient les règles énoncées dans l'ancien langage. C'est pour cela qu'on a imaginé les quantités négatives, les quantités imaginaires, les points à l'infini et que sais-je encore. Les exceptions, ne l'oublions pas, sont pernicieuses, parce qu'elles cachent les lois.*"

Donc c'est une très bonne, disons, introduction à ce thème qui est de savoir comment le langage aide à la pensée, au développement de la science, mais aussi comment... par quels efforts, comment on arrive à trouver ces identifications. Donc si vous voulez, mon propos, donc, ça va être de parler de ce sujet, bien entendu, puisque j'ai choisi de le mettre en titre. Mais à partir d'un certain nombre de textes tout à fait significatifs dans l'histoire des mathématiques. Donc d'abord, ces textes de Poincaré, enfin je m'en n'inspirerai de diverses façons ; un texte qui pour moi est très important et souvent mal connu, qui vient juste d'être traduit en français par M. Lobo, qui est un texte d'Hermann Weyl, qui s'appelle *Philosophie des mathématiques et des sciences de la nature*, dont il existe deux éditions, une première édition en allemand puis l'édition complétée dans les années 20, et ensuite une édition complétée après la guerre en 1949, qui est cette fois traduite en anglais avec des notices historiques de Hermann Weyl, dans lesquelles souvent il fait remarquer qu'il avait quand même vu juste quelques années auparavant, ce qui est un commentaire intéressant. Et puis aussi d'autres textes très importants pour les géomètres, en tout cas pour le géomètre différentiel que je suis, de Riemann et un texte extrêmement important et méconnu de Lagrange, que je vais donc essayer de commenter. Donc voilà, et après, j'arriverai à des conclusions. Donc voilà un peu ce que je veux faire et en fait, je voudrais prendre trois exemples de situations justement, où les problèmes de terminologie, de concepts à identifier ont vraiment... sont apparus... ont mis du temps à apparaître, et dans quel contexte ils sont vraiment apparus.

Donc le premier exemple que je voudrais prendre a trait au nombre et à la géométrie. Donc la notion de nombre est une notion qui évidemment existe dans énormément de civilisations, d'abord la notion de nombre entier, il s'agit de compter. Déjà un peu plus sophistiquée, la notion de fractions, donc de nombre rationnels, diviser deux nombres entiers, diviser un nombre entier par un autre à condition qu'il ne soit pas nul, voilà. Et alors, comme vous savez, pour les Grecs, c'est une chose qui a déjà été évoquée hier, une des choses qui est apparue comme problématique et qui du coup a amené un peu un schisme dans les mathématiques, c'est que pour les pythagoriciens, les seuls nombres acceptables étaient les nombres rationnels. Or dès que vous faites de la géométrie, que vous connaissez le théorème de Pythagore, en fait, vous regardez la longueur de la diagonale du carré et vous tombez sur le nombre racine de deux, c'était connu des Grecs et ce n'est pas très difficile, c'est un exercice intéressant, même pour un élève du collège, de démontrer que racine de deux ne peut pas être un nombre rationnel.

Donc du coup, apparaissent dans la géométrie des scandales, des nombres qui ne peuvent pas être acceptés comme nombres, qui sont des nombres irrationnels. D'où l'idée qu'il doit y avoir deux mondes : il y a le monde des figures, la géométrie, et le monde des nombres, parce qu'on se limite aux nombres rationnels. Donc ça, ça a été quand même une chose qui a pesé dans l'histoire des mathématiques pendant très très longtemps, et donc comme je vais y revenir dans une minute, a donc amené à ce schisme. Et alors parmi les règles, cette fois si on se limite pour quelques minutes aux nombres rationnels d'une certaine façon, il y avait quand même le fait qui est apparu assez rapidement la règle bien connue que quand je multiplie un nombre positif par un nombre positif, j'obtiens un nombre positif, donc plus par plus donnent plus, ainsi que moins par moins donnent plus, et du coup ça veut dire que quand je fais le carré d'un nombre, il n'y a pas moyen que le résultat soit un nombre négatif. Mais pourtant il apparaissait utile, en particulier c'est Cardan qui, le premier, a mis ça en évidence, voilà, donc dans ce texte, dans lequel, alors, c'est intéressant, parce que Cardan n'est pas celui qui a découvert la formule explicite pour résoudre l'équation du troisième degré, c'est Tartaglia avant lui, et peut-être même Ferrari avant lui. Mais en tout cas, Cardan est le premier, il avait à écrire une solution générale des équations du troisième degré, à se rendre compte que ce serait vraiment utile si on avait des nombres dont le carré était négatif. Donc c'est le premier à avoir introduit donc les nombres qu'on appelle imaginaires, puisque visiblement ce ne sont pas des vrais nombres, c'est autre chose. Et donc ces nombres imaginaires sont apparus dans les mathématiques à ce moment-là, mais un peu comme une commodité d'écriture, c'est-à-dire on n'était pas encore dans quelque chose qui avait vraiment un sens. Et d'une certaine façon pour qu'on aille au stade d'après, il était indispensable de faire une révolution encore plus grande, qui était donc de faire abolir ce schisme que j'ai évoqué, qui était donc ce schisme de... Alors peut-être un commentaire sur les nombres imaginaires qui est quand même intéressant : il y a un commentaire qui est fait disons très tôt, à propos des nombres imaginaires, comme quoi c'est vraiment quelque chose qui a un parfum de scandale et que du coup on n'est pas sûr qu'on a le droit de les appeler des nombres ; donc c'est pour ça qu'on a mis le codicille *imaginaires.* En tout cas, la chose vraiment importante, c'est donc qu'il y ait l'affirmation par Descartes, comme je vais le montrer dans une minute, non dans le *Discours de la méthode* mais plutôt dans un ajout du *Discours de la méthode* qui s'appelle la *Géométrie* que justement Descartes dit qu'eh bien, non, en fait, ce schisme n'a pas raison d'être et on doit accepter que toute figure géométrique peut être décrite par des nombres. Et alors voilà comment il commence sa *Géométrie* et dans laquelle vous voyez que c'est juste en passant, donc ce n'est même pas une affirmation philosophique, c'est que vraiment si on veut résoudre, avoir des outils de résolution et aussi enrichir la géométrie, il est indispensable d'accepter qu'on représente tout par des nombres. Et donc le principal enrichissement auquel il pense, c'est l'enrichissement qui consiste à regarder dans le plan des courbes bien plus compliquées que les coniques, qui évidemment avaient droit de cité depuis les Grecs de façon massive, étaient un des lieux de géométrie les plus élaborés, avec des théorèmes extrêmement profonds. Donc Descartes a dit "Mais après tout, si je prends une équation algébrique, et que je prends des coordonnées, et que je regarde les courbes de 3^{e} degré, 4^{e} degré, 5^{e} degré, voilà des objets géométriques que je peux manipuler puisque je peux calculer sur eux aussi bien qu'avec les coniques qui sont des objets du second degré, et il n'y a pas de raison de se limiter." Donc c'est dans ce contexte un petit peu limité que Descartes affirme ça.

Mais en tout cas, ça, c'est une affirmation extrêmement importante, et donc dans le cas de Descartes donc c'est une... Alors une chose très intéressante, à ce propos, même si c'est quand vous lisez le texte et le texte continue plus loin mais vous voyez bien que dès l'introduction, quand il parle de ça, il en parle en passant, sans en faire une prise de position philosophique, Hermann Weyl, dans son texte *Sur la philosophie des mathématiques et des sciences de la nature* dit la chose suivante :

> "*L'introduction des nombres comme coordonnées, en faisant référence au processus particulier de la division du continu à une dimension est un acte de violence dont la seule justification est le fait qu'elle permet d'utiliser la souplesse calculatoire que ce continu offre avec ses quatre opérations.*"

Vous voyez que parce qu'il s'agissait de faire cesser un schisme, ce n'est pas du tout quelque chose d'anecdotique, ça change complètement les choses. Et aujourd'hui, évidemment, alors que tout le monde, y compris les enfants, quand ils font des jeux sur leur téléphone ou sur leur tablette, utilisent des coordonnées, donc l'affirmation de ces coordonnées est devenue une banalité totale alors qu'historiquement, elle n'était pas une banalité totale. Cela ne veut pas du tout dire que les Grecs s'interdisaient dans le temps d'utiliser des nombres pour faire des calculs géométriques, mais en tout cas l'affirmation qu'il y a complète correspondance entre ces deux mondes.

Donc je reviens aux nombres imaginaires parce que maintenant, vous allez voir, je vais pouvoir me servir de cette affirmation, pour peut-être voir les nombres imaginaires un peu différemment. Le premier, semble-t-il, qui a entrevu l'idée de peut être relier les nombres imaginaires à des constructions géométriques dans le plan, en fait, c'est Johaniss Wallis, dans ce *De Algebra Tractatus*. Mais en fait, là, c'est aussi en passant, en faisant remarquer qu'après tout, on pourrait peut-être voir les nombres imaginaires, les représenter comme des objets dans le plan, mais il n'en fait pas de théorie. Et c'est très étrange qu'il ait fallu attendre très longtemps, c'est-à-dire le début du XIXe siècle, enfin même le XIXe siècle et Jean-Robert Argand qui a vraiment cette fois parlé d'un plan complexe, c'est-à-dire de dire qu'après tout, si on rapporte les coordonnées du plan avec les nombres réels, qui sont l'axe habituel des x et si on met sur l'axe des y donc, qu'on a tendance à représenter verticalement, le nombre imaginaire i, alors brusquement tout un tas de choses qu'on fait sur les nombres imaginaires deviennent extrêmement simples, à condition que l'on fasse donc ce qu'on appelle maintenant le plan complexe, c'est-à-dire qu'on définisse, dans ce plan, tout ce qu'on fait d'habitude avec les nombres, c'est-à-dire des additions, ça, on sait faire, on ajoute les deux coordonnées, Descartes le faisait, mais aussi une multiplication, donc c'est ça la nouveauté. Et pourquoi cette multiplication devient très naturelle et pourquoi elle représente naturellement les nombres imaginaires, eh bien si on pense que la multiplication par i qui consiste à passer de 1 à i, ça consiste à faire à une rotation de 90 degrés, si je fais deux fois cette opération, je multiplie i par lui même, je trouve 90° plus 90°, 180 degrés, donc je trouve la multiplication par -1 et donc j'ai représenté la vertu fondamentale des nombres imaginaires, qui est que le carré de i c'est -1. Et donc ça, évidemment, ça donne une représentation extrêmement simple et surtout, on dispose d'un nouvel objet mathématique, qui est le corps des nombres complexes parce qu'après ça, on peut démontrer qu'avec ce plan, avec ces nouvelles opérations, les additions, les multiplications, on peut faire comme on fait d'habitude, à part le nombre 0, tout nombre a un inverse, on sait calculer l'inverse très simplement, donc c'est un corps, au sens des mathématiciens, aussi intéressant que le corps des nombres réels, pour lequel on est habitué à faire des additions, des multiplications, des soustractions des divisions, à condition de ne pas diviser par 0. Donc voilà.

Donc ça, ça a été, ce passage d'un objet purement algébrique à un objet qui devient géométrique, mais pour lequel l'opération algébrique devient limpide, d'une certaine façon, ce n'est plus du tout une bizarrerie et du coup, on dispose à ce moment-là d'un objet extrêmement intéressant. Mais pour montrer qu'il y a quand même des choses étonnantes, on peut se dire après tout, j'ai fait ça, je suis parti des nombres ordinaires, que j'ai représentés sur la droite réelle, donc ce continu à une dimension, donc, on a fait cette extension à deux dimensions et pourquoi on ne recommencerait pas ? Et faire donc des nombres hyper-complexes, c'est-à-dire faire sur les nombres complexes ce qu'on a fait sur les nombres réels, donc, introduire de nouvelles coordonnées. Donc ça, ça a été fait, donc, au milieu du XIXe siècle, par William Rowan Hamilton, en introduisant ce qu'on appelle les quaternions. Donc qu'est ce que c'est que les quaternions, donc c'est effectivement, cette fois, on va être à quatre dimensions, puisqu'on a pris des nombres complexes et on a fait un produit par les nombres complexes. Donc cette fois, on a toujours les nombres réels qui sont un axe, avec 1 comme unité, mais maintenant on a trois dimensions imaginaires, le i qu'on avait avant, ce i, qui était dans les nombres complexes, et puis un j et un k, ce sont les notations qu'on prend d'habitude pour la partie complexe de cette extension. Et alors, évidemment, on demande que j au carré soit -1 comme i au carré, on demande que k au carré, ça soit -1 et c'est un tout petit calcul élémentaire, je ne vais pas le faire, mais je l'ai sur mon écran, là, qui consiste à dire que si vous faites ça, le fait que vous imposiez que le produit de i par j soit k, automatiquement, entraîne que la partie imaginaire de ces nombres ne sont plus commutatifs, vous savez, quand on multiplie deux nombres xy et yx pour les nombres ordinaires, c'est la même chose. Autrement dit, on peut échanger l'ordre. Eh bien, là dans les quaternions, le fait d'avoir fait cette extension en passant aux nombres hyper-complexes, on perd la commutativité.

Et donc ça, c'est intéressant, et du coup ça m'amène un commentaire, pour dire que la création mathématique de ces objets, donc la création par Hamilton des quaternions, on se dit mais après tout, on n'a qu'à continuer. Et puisqu'on a fait les quaternions, on va faire des octaves, c'est Cayley qui a fait ça. Donc on est passé cette fois à huit dimensions et là, le prix qu'on paie, il est assez élevé parce qu'en fait, on perd bien plus, ce n'est pas seulement que ça va pas être commutatif, mais en fait on perd même ce qu'on appelle l'associativité, c'est-à-dire le fait que le produit d'un nombre par la somme de 2 nombres, on peut distribuer les choses et malheureusement ça, on ne peut plus le faire et donc il y a vraiment des choses, algébriquement, il y a des choses qui font ça. Donc on est passé des nombres réels aux nombres complexes puis aux nombres hyper-complexes avec les quaternions. On peut aller jusqu'aux octaves de Cayley et je savais, peut-être que vous ne le savez pas, mais un des experts des octaves de Cayley dans le monde, c'est Jacques Tits qui était professeur dans cette maison, et la chose extraordinaire qui montre que les mathématiques peuvent dire des choses profondes sur des objets qu'on a l'impression de construire facilement de façon algébrique, c'est si vous voulez aller au-delà des octaves de Cayley, vous passez à la dimension 16, vous ne pouvez plus, à cause de la structure topologique de la sphère dans l'espace à 16 dimensions, donc une sphère à 15 dimensions, qui vous empêche de construire un objet algébrique qui serait aussi intéressant que les octaves de Cayley. Donc ça veut dire qu'avec cette construction qui semblait algébriquement toute simple on est passé de 1 à 2, puis de 2 à 4, puis de 4 à 8, en fait, la nature des objets que vous regardez est suffisamment cachée, et complexe, pour que ce que vous voudriez faire par, comment dire, spontanéité algébrique, vous est interdit par une topologie beaucoup plus profonde. C'était un commentaire en passant mais pour montrer que, là-encore au niveau du langage, ce qu'on peut croire comme des opérations banales, en fait, sous-jacente, il y a une réalité d'une subtilité beaucoup plus grande et pour lesquelles les outils mathématiques à mobiliser sont complètement d'un autre ordre. C'est en fait de la topologie algébrique, inventée par Henri Poincaré. Voilà. Donc ça c'était mon premier sujet, qui était de parler du passage de l'introduction des nombres imaginaires, mais aussi de la nécessité d'accepter les systèmes de coordonnées, donc de repérer les objets, de faire une synthèse entre la géométrie et l'arithmétique, mais en fait l'utilisation des nombres, et de montrer comment ces choses-là amènent à des objets mathématiques extrêmement intéressants, extrêmement profonds.

La deuxième notion que je voudrais discuter qui est en fait, pour les géomètres évidemment, fondamentale, qui est la notion d'espace. Donc pour tout le monde, quand on parle de l'espace, c'est l'espace qui nous entoure, c'est un espace à trois dimensions, on a l'impression qu'on a le contrôle sensible et historiquement, c'est une chose qui est... évidemment les travaux d'Euclide ont été fondamentaux, on peut mesurer des distances dans l'espace ordinaire, et c'est ça qui fait sa valeur, qui fait sa richesse, qui fait sa solidité. Et pendant longtemps, beaucoup de gens ont considéré que l'espace, l'espace euclidien, et même l'espace euclidien à trois dimensions était en fait le seul espace concevable. C'est intéressant, dans le livre d'Emmanuel Kant donc, la *Critique de la raison pure*, un des impératifs absolu, c'est justement l'espace euclidien. Alors en fait si vous lisez un peu plus Emmanuel Kant, un peu avant la *Critique de la raison pure*, il discute à un moment, après tout, pourquoi l'espace a trois dimensions, et pourquoi est-ce qu'il ne pourrait pas en avoir plus. Mais finalement, quand il vient à *Critique de la raison pure*, qu'il veut définir les impératifs absolus, la seule chose qui compte, c'est l'espace euclidien à trois dimensions. Donc déjà, l'idée de concevoir un espace à plus de trois dimensions était problématique, mais surtout un espace qui soit structuré par la notion de longueur, telle qu'on la connaît chez Euclide, avec tous les théorèmes qu'on connaît. Donc d'une certaine façon, quand on a commencé... alors, une des choses qui était un ver dans le fruit pour les mathématiciens, c'était le fameux postulat des parallèles. Ce postulat des parallèles qui arrive dans la description d'Euclide à un certain niveau, en général, on le présente comme le cinquième postulat, en fait, c'est un peu plus compliqué quand on compte, parce qu'il y a des postulats qui ont des codicilles. En tout cas, appelons-le le cinquième postulat, qui est un postulat extrêmement simple et naturel, qui consiste à dire que si je prends une droite, dans un plan, si je prends un point extérieur à la droite, alors il existe une et une seule droite passant par ce point parallèle à cette droite. Si vous regardez vraiment la façon dont Euclide l'a énoncé, il ne l'a pas énoncé comme je viens de l'énoncer ; il l'a énoncé en disant qu'il existe une droite qui, si je la prolonge indéfiniment, ne rencontrera pas l'autre droite. Donc vous voyez que là, c'est déjà une chose un tout petit peu plus subtile, en ce sens que ça fait appel à l'infini, puisqu'il faut prolonger la droite indéfiniment. Évidemment ce que vous ne pouvez pas faire matériellement. Donc c'est déjà forcément une abstraction. En tout cas, ce postulat était problématique, pourquoi ? Il était présenté comme postulat chez Euclide mais la question se posait "est-ce qu'il n'y a pas moyen de déduire ce postulat comme un théorème déduit des postulats précédents ? Et il y a eu énormément de tentatives pour faire ça, toutes fausses. Toutes les fois, il y avait une erreur dans la démonstration. Et du coup, un certain nombre de gens se sont mis vraiment à discuter ce postulat très sérieusement, et vers la fin du XVIII^{e} siècle il a commencé à y avoir avec Legendre et quelques autres des tentatives qui commençaient à être vraiment intéressantes sur ce postulat. En fait le premier qui probablement a compris qu'on pouvait construire des géométries sans ce postulat, c'est en fait Gauss. Mais vous savez, la devise de Gauss, c 'était "*Pauca sed matura*". ("*Peu de choses mais des choses mûres*".) donc il n'a pas publié à ce propos. Mais finalement, le scandale de l'existence de géométries non euclidiennes est arrivé avec Nikolaï Lobatchevski, qui était à ce moment-là recteur de l'université de Kazan. C'est très intéressant parce que pour Lobatchevski, quand il a parlé de publier son article sur les géométries non euclidiennes, qu'est-ce qu'il a pris comme mot "*géométrie imaginaire*". C'est tout à fait intéressant ; après, il a un autre article qui s'appelle la théorie des parallèles, c'est même un livre, justement où il développe que l'on peut faire une géométrie non euclidienne ; il prend le soin en discutant dans cet article qu'évidemment quand on fait des mesures dans l'espace qui nous entoure, on a l'impression qu'on est quand-même bien dans un espace euclidien, que ça, c'est une sorte de création un peu abstraite. Et ça ça a été vu quand même pendant longtemps comme un scandale, il y a même eu encore, sans vouloir insulter mes ancêtres mathématiciens français, jusque vers 1870, parce que la théorie de la géométrie non euclidienne s'est beaucoup développée en Allemagne, aussi en Italie, et il y a quand même eu une note aux Comptes-Rendus, par un mathématicien français, professeur à l'école Polytechnique, disant que tout ça, c'était de l'intoxication par de la mathématique allemande. Donc vous voyez que le nationalisme peut se nicher dans des choses assez dramatiques. Donc en tout cas, il n'y a pas de doute qu'on peut construire des géométrie non euclidiennes. Donc déjà la notion d' espace euclidien comme seul géométrie pensable était battue en brèche. Donc voilà.

Donc ces géométries... Alors la chose extraordinaire, c'est qu'en fait, beaucoup de gens manipulaient des géométries non euclidiennes depuis très longtemps, en particulier les astronomes. Quand des astronomes regardaient la voûte céleste, ils ont développé même une trigonométrie pour la voûte céleste, pour calculer les positions des étoiles. En fait, ils développaient une géométrie qui est la géométrie sur la sphère. Si sur la sphère on appelle droites des grands cercles, en fait, on a une géométrie parfaitement conforme à la géométrie d'Euclide sauf le postulat des parallèles, puisqu'évidemment sur la sphère, je ne peux jamais tracer des parallèles par un point puisque tous les grands cercles se coupent. Donc voilà, le postulat des parallèles est violé, mais tous les autres postulats sont corrects, dans la géométrie non euclidienne sphérique. Et alors l'invention de Lobatchevski, c'est une géométrie hyperbolique comme on l'appelle, qui au contraire est dans le point de vue du postulat des parallèles exactement le contraire. C'est que par un point extérieur à une droite, alors à ce moment-là, une représentation possible, c'est de représenter l'espace comme l'intérieur d'un disque, et à ce moment-là de prendre comme droites les cercles qui sont orthogonaux au bord du disque. Et évidemment, si vous prenez un point extérieur au cercle, vous vous rendez compte qu'il y a une infinité de parallèles qui passent par ce point donc évidemment, vous violez le cinquième postulat d'Euclide. Donc ça c'est aussi une géométrie non euclidienne, extrêmement intéressante, particulièrement pertinente pour les informaticiens, puisque du point de vue des réseaux, c'est plutôt ce type de géométrie qui est pertinente. Ce que je voudrais dire, c'est qu'un pas très important dans la généralisation de la notion d'espace est venu chez Riemann. En plus dans un moment tout à fait particulier, puisque c'était en fait sa soutenance de thèse, et vous connaissez le système allemand qui a existé jusqu'à il y a très peu de temps, qui était qu'évidemment le candidat présentait ses résultats, mais il devait aussi présenter une leçon sur un des trois sujets proposés par la Faculté. Dans le jury de Riemann, il y avait Gauss qui a proposé un sujet sur justement les hypothèses sur lesquelles la géométrie est fondée. Et dans ce texte, donc, conçu en très peu de temps, Riemann à ce moment-là réfléchissait beaucoup à la théorie de l'éther de la physique, c'est-à-dire le substrat sur lequel toute la physique devait être fondée, donc il réfléchissait aussi à quelle géométrie est la géométrie de l'éther, en fait, il introduit une géométrie beaucoup plus générale et qui pousse l'idée de Descartes beaucoup plus loin, en disant mais en fait, on peut définir des géométries, à partir du moment où on se donne des coordonnées et on donne une façon de mesurer les longueurs, en chaque point mais qui varie en fonction du point. Et ce qui caractérise la géométrie euclidienne, c'est tout simplement que je peux trouver un système de coordonnées dans lequel je peux rendre ces coefficients, de cette façon de mesurer les longueurs, de cette métrique, constants. Et une façon de le mesurer, c'est par un invariant introduit par Riemann qui s'appelle la courbure, et donc un espace qui n'a pas de courbure est un espace euclidien, et tous les autres espaces ont de la courbure. Et les espaces non euclidiens, la sphère ou l'espace hyperbolique, sont très simples du point de vue de Riemann puisque ce sont des espaces dont la courbure est constante. Après ça, il y a plein d'autres objets, bien plus compliqués avec des bossss, etc. et donc ça c'est une généralisation considérable de la notion d' espace. Et c'est très intéressant parce que dans le texte de Riemann, dans ce texte, là, dont vous voyez l'introduction, qui a été publié après sa mort, donc ça, c'est donc tout à fait significatif, Riemann a eu une vie très courte, il a en plus souffert dans la dernière partie de sa vie d'une tuberculose très marquée qui faisait qu'il était extrêmement affaibli, mais sa production était extraordinaire et donc je cite ce passage de Riemann enfin, la traduction française de ce passage, vraiment, entre parenthèses, si quelqu'un peut-être, c'est une chose qu'il faut que je fasse dans ma retraite, la traduction existante en français du texte de Riemann est particulièrement faible. Je veux dire, elle contient y compris des contresens, ce qui est quand même gênant. Elle remonte au début du XX^e siècle. En tout cas, voilà une traduction dont je pense qu'elle ne contient pas de contresens, en tout cas, j'espère.

> *Au contraire les occasions qui peuvent faire naître les concepts dont les modes de détermination forment une variété continue, (*donc c'est l'idée de ces espaces paramétrés par des nombres*) sont si rares dans la vie ordinaire que les positions des objets concrets et les couleurs sont à peu près les seuls concepts simples dont les modes de détermination forment une variété à plusieurs dimensions.*

Donc variétés à plusieurs dimensions, ça veut dire simplement qui peuvent être repérées par des collections de nombres. Alors pourquoi est-ce qu'il fait référence aux positions des objets concrets, eh bien tout simplement quand on remonte à Euler, il y a une chose dont vous avez peut-être entendu parler qui s'appelle les angles d'Euler, qui permettent de repérer la position d'un solide par rapport à un solide de référence, c'est très important, donc, ça veut dire qu'on peut repérer la position d'un solide par rapport à un autre par des nombres. Donc ça rentre dans la catégorie de Riemann et évidemment, c'est tout à fait important et chose très intéressante, c'est que Riemann parle de l'espace des couleurs. Et effectivement, on savait déjà à ce moment-là que du point de vue physiologique, la perception de la couleur était faite avec 3 détections donc il y avait trois couleurs fondamentales qui permettaient de recomposer, en tout cas pour l'œil, les couleurs. Alors faire attention parce que c'est effectivement 3 quantités mais ces quantités sont en fait des quantités qui sont plutôt des coordonnées dans un espace projectif, je sais que Karine Chemla va parler de l'espace projectif cet après-midi donc ça veut dire qu'elles sont déterminées à un coefficient près. Donc en fait, le vrai espace des couleurs, la chromaticité, c'est vraiment à deux dimensions, même si on dit souvent trois paramètres pour les repérer. Et après ça, comme vous savez, aujourd'hui, manipuler des couleurs est un objet fondamental du point de vue industriel, à cause des écrans, à cause de l'impression, donc c'est devenu un sujet extrêmement intéressant, mais c'est quand-même intéressant de voir que dans son texte aussi fondamental que ça, Riemann parle de l'espace des couleurs. Alors c'est intéressant aussi de voir qu'Hermann Weyl fait la même chose : il discute dans son livre sur la philosophie des mathématiques de l'espace des couleurs avec une certaine intensité.

Alors ce que je voudrais dire, c'est qu'en fait, Riemann a raté quand même quelque chose qui est qu'il y a vraiment quelqu'un qui a créé un espace vraiment nouveau, vraiment abstrait, qui est en fait Joseph-Louis de Lagrange. Donc ce texte qui remonte à 1808 est un texte extrêmement intéressant parce qu'à ma connaissance, c'est la première fois qu'un espace abstrait a été utilisé en mathématiques. Alors que faisait Lagrange ? Ça c'est une remarque que je voudrais faire, parce que je vous ai dit déjà pour Cardan quand il a introduit les imaginaires, c'était vraiment parce qu'il était embêté, il avait quelque chose à écrire et il n'avait pas les outils donc il a introduit les nombres imaginaires et vous voyez que pour Joseph-Louis Lagrange, même s'il a vraiment compris quelque chose de très profond à propos de ce qu'il faisait, il le fait d'une certaine façon en passant : c'est-à-dire il a un problème en tête très précis, qui est le problème de la variation des éléments des planètes, c'est-à-dire on s'intéresse au mouvement des planètes autour du soleil et on essaye de le prévoir de la façon aussi précise qu'on peut. Alors on sait qu'il y a un mouvement très très simple : s'il y avait une seule planète autour du soleil, alors Kepler, Newton nous ont donné tous les outils pour trouver le mouvement des planètes. Le problème, c'est qu'il n'y a pas qu'une planète, il y en a plusieurs, donc les autres planètes viennent perturber le mouvement des planètes. Et donc cette perturbation évidemment rend les calculs beaucoup plus compliqués. Donc il y a eu toute une théorie des perturbations qui a été développée qui fait des choses remarquables mais malgré tout, par exemple une des choses qu'on n'arrive pas à prévoir, c'est est-ce qu'on peut anticiper qu'une planète va être éjectée du système solaire ou pas ? Donc ça, c'était un des sujets qui intéressait Lagrange et donc là, il développe une technique radicalement nouvelle pour le faire, et donc tout de suite dans son texte, il fait remarquer, voilà :

> "*On entend en astronomie par éléments un certain nombre de choses qui permettent de repérer les planètes*"

et simplement, il dit que :

> "*ces cinq quantités jointes* (à l'époque, donc l'époque, c'est la position d'une planète sur son orbite, donc c'est le moment de l'année, si vous voulez)*, étant connues pour une planète, on peut trouver en tout temps son lieu dans le ciel par le moyen de ces deux lois découvertes par Kepler que les aires décrites...*"

Alors après, il dit justement qu'après, il y a les perturbations qui viennent changer les choses. Et alors, il dit mais oui, en fait, utiliser ces coordonnées, dans cet espace, ce n'est pas ça qui va vous permettre de résoudre le problème. Et donc dans ce mémoire, il développe ce qu'il appelle, enfin, ce qu'il n'appelle pas, mais en tout cas ce qu'on peut appeler l'espace des mouvements elliptiques. Et la chose extraordinaire, c'est qu'il se rend compte, et en tout cas il l'introduit de façon très explicite, que cet espace des moments elliptiques est un espace à six dimensions qui ne sont pas seulement des objets disons concrets, mais aussi des objets abstraits. En fait, il démontre qu'étudier le mouvement dans l'espace à six dimensions, c'est infiniment plus facile que dans l'espace concret auquel on pense. Et pourquoi ? Parce que cet espace à six dimensions a de façon naturelle une géométrie radicalement nouvelle, qu'on appelle aujourd'hui une géométrie symplectique, qu'il décrit de façon remarquable dans son texte, et dans laquelle on peut écrire des équations d'une simplicité extraordinaire qui permettent de traiter, avec une seule fonction, qui est la fonction de perturbation, tout le mouvement de tout le système. Et donc ça veut dire qu'on transpose le mouvement habituel qui est le mouvement avec les trois positions dans l'espace plus les trois vitesses qui sont les six paramètres qui sont là, dans un autre espace à six dimensions qui est l'espace des mouvements elliptiques dans lequel la traduction des équations du mouvement devient extrêmement simple, à condition qu'on ait compris qu'il y a sous-jacente, pas une notion de distance, mais une notion qu'on appelle aujourd'hui de forme symplectique, qui est un objet anti-symétrique, alors que les objets de distance sont des objets symétriques. Et ce texte de façon extraordinaire est resté quand même largement incompris, inconnu, pendant longtemps : les gens utilisaient les résultats mais n'avaient pas compris qu'il y avait là un acte fondateur d'un nouveau secteur de la géométrie.

C'est intéressant dans des échanges de lettres entre Lagrange et Laplace, Laplace ne comprend absolument pas ce que fait Lagrange, avec tout le respect que j'ai pour Laplace bien entendu, qui a fait des choses extraordinaires, et donc il y a un espèce de dialogue de sourds. Lagrange avait absolument compris ce qu'il faisait, il fait remarquer d'ailleurs que, même si l'attraction de la gravitation, qui est la cause du mouvement, n'était pas donnée par les lois de Kepler, en fait, on a quand même un espace des mouvements, alors plus elliptique, évidemment puisque elliptique c'était parce que... Alors pourquoi cet espace est abstrait, tout simplement c'est à cause de la chose suivante : c'est que s'il n'y avait qu'une planète et le soleil, ce serait vraiment un mouvement elliptique. Mais il y a les perturbations des autres. Donc l'idée, c'est de se dire je vais tracer une trajectoire dans l'espace des mouvements elliptiques en me disant qu'à chaque moment la trajectoire réelle, en fait, elle a un contact maximum avec le fait de donc... on s'intéresse à la façon dont l'ellipse, qui devrait être le mouvement pur, est perturbée, par la présence des autres planètes.

Donc c'est ça cette idée superbe qui en fait a donné lieu à une nouvelle géométrie qui aujourd'hui est spectaculaire. Donc je vais terminer sur ce chapitre et j'arrive au dernier chapitre qui va me permettre de conclure, qui était de donner un exemple explicite d'un isomorphisme puisque c'est la chose qui est fondamentale chez les mathématiciens, qui est dans un livre que vient de publier Laurent Lafforgue qui est un livre de cours pour des professeurs du secondaire, peut-être un peu coriace, mais en tout cas remarquablement écrit, particulièrement pédagogique, sur justement deux mondes qui sont isomorphes au sens des mathématiciens, donc qui parlent de la même chose, qui sont d'un côté l'espace des plans affines, construits sur un corps quelconque, et d'un autre côté l'espace des corps au sens des mathématiciens, c'est-à-dire un espace, enfin un objet algébrique, dans lequel on a une addition, une multiplication, et toutes les opérations habituelles qu'on connaît, avec les propriétés qu'on connaît. Et en particulier, comment ces notions correspondent l'une avec l'autre, et donc la correspondance que je voulais vous faire voir, c'est donc ça.

Ça, c'est la propriété de Desargues, qui est une propriété fondamentale de la géométrie élémentaire. Donc qu'est-ce que vous vous donnez ? Donc regardez la situation du bas qui est peut-être plus simple. Je prends deux droites qui se coupent en un point P. Maintenant, je prends deux couples de parallèles, donc les parallèles Δ_3, Δ_3' et puis Δ_1, Δ_1'. Eh bien le théorème de Desargues dit que les points d'intersection de ces parallèles avec les droites D_1, D_2, D_3 me permettent de créer justement, en pointillés, deux droites, et la propriété de Desargues est que ces droites sont parallèles. Donc ça, c'est à la base de la théorie des espaces affines, donc ça, c'est la première propriété, et la deuxième propriété est la propriété de Pappus : si je fais une construction qui est un petit peu analogue, mais pas tout à fait la même, je prends toujours mes deux droites de base D et D' qui se coupent en un point P, je prends maintenant deux droites parallèles Δ_1 et Δ_2, deux autres droites parallèles Δ_1' et Δ_2' ; eh bien vous voyez que je peux trouver de nouveau des droites en pointillés qui sont liées, là, au point d'intersection de ces familles de droites, eh bien, la propriété de Pappus, c'est d'affirmer que ces droites sont parallèles. Eh bien, la chose extraordinaire, c'est que si je me donne un plan affine à deux dimensions, qui vérifie la propriété de Desargues, alors si je m'intéresse dedans à toutes les transformations qui préservent les propriétés affines, je fabrique quelque chose qui est un corps et que le fait que ce corps soit commutatif, c'est-à-dire que les produits de deux éléments commutent, est directement lié à la propriété de Pappus. Donc le dictionnaire complet, c'est qu'étant donné un plan affine, je peux construire un corps ; connaissant un corps, je peux construire un plan affine, tout simplement en prenant les paires de nombres pris dans le corps, et automatiquement ça vérifiera la propriété de Desargues, et si le corps est commutatif, ça vérifiera la priorité de Pappus. Donc voilà un exemple de deux mondes a priori différents, un totalement algébrique qui est la théorie des corps, un autre complètement géométrique qui est la théorie des plans affines, pour lesquels il y a un dictionnaire complet. Et donc ma conclusion, c’est donc de dire à quel point

> “*cette notion d’isomorphisme,* (là, je suis en train de citer Hermann Weyl) *est d’une importance capitale pour la théorie de la connaissance. On peut dire des domaines isomorphes qu’ils possèdent la même structure,* (et en fait les mathématiques, c’est la science des structures)*. Pour toute proposition pertinente vraie au sujet du premier modèle, il y a une proposition correspondante et formulée de façon identique au sujet du second. C’est ainsi par exemple que l’espace est appliqué de manière isomorphe par l’utilisation des coordonnées de Descartes, domaine opératoire de l’algèbre linéaire. Et puis, l’exemple que je viens de donner pour la théorie des corps.”*

Et donc, la chose après pour la théorie de la connaissance, qui est donc tout à fait importante à citer, donc je cite de nouveau Hermann Weil, cette fois dans un ajout de la version de 1949 :

> *“Une science ne peut établir son domaine de recherche que jusqu’à une application isomorphe ; elle reste totalement indifférente à l’essence de ses objets. l’idée d’isomorphisme marque à l’évidence la limite insurpassable du savoir.”*

Merci.