

THÉORIE DE LA MESURE. *Sur un théorème de Carathéodory et la mesure dans les espaces topologiques.* Note ¹ de M. Nicolas Bourbaki présentée par M. Élie Cartan.

La théorie moderne de la mesure et de l'intégration ² conduit à donner le nom de mesure, dans un ensemble quelconque (qui prend alors le nom d'espace mesuré), à toute fonction d'ensemble μE satisfaisant aux axiomes suivants :

- I. À tout ensemble E de points de l'espace correspond un nombre μE tel que $0 \leq \mu E \leq +\infty$; si E est vide, $\mu E = 0$.
- II. Si E est contenu dans la réunion d'ensembles E_ν en nombre fini ou dénombrable, on a

$$\mu E \leq \sum_{\nu} \mu E_{\nu}.$$

Nous dirons qu'un ensemble E possède la *propriété de Carathéodory* si l'on a, quels que soient $A \subset E$ et $B \subset \mathcal{C}E$,

$$\mu(A + B) = \mu A + \mu B;$$

et qu'une fonction $f(x)$ à valeurs réelles, définie dans tout l'espace, possède la propriété de Carathéodory si l'ensemble des points où $f(x) > \alpha$ possède la propriété de Carathéodory quel que soit α , ou, autrement dit, si l'on a

$$\mu(A + B) = \mu A + \mu B$$

chaque fois qu'il existe α tel que $f(x) > \alpha$ sur A et $f(x) \leq \alpha$ sur B ³.

Ces définitions étant posées, je me propose de démontrer le théorème suivant :

Pour que la fonction $f(x)$ possède la propriété de Carathéodory, dans un espace mesuré quelconque, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mu(A + B) = \mu A + \mu B$$

pour tout couple d'ensembles A, B tel que la borne inférieure de f sur A soit plus grande que la borne supérieure de f sur B .

La condition est évidemment nécessaire. Pour faire voir qu'elle est suffisante, supposons que l'on ait $f(x) > \alpha$ sur A , $f(x) \leq \alpha$ sur B , et montrons que l'on aura $\mu(A + B) = \mu A + \mu B$. Soit en effet A_n l'ensemble des points de A où $f(x) > \alpha + 1/n$; on a

$$A = A_n + (A_{n+1} - A_n) + (A_{n+2} - A_{n+1}) + \dots$$

On aura donc

$$A \supset A'_{n,p} = A_n + \sum_{\nu=1}^p (A_{n+2\nu} - A_{n+2\nu-1}).$$

1. Séance du 18 novembre 1935.

2. Voir, par exemple, S. SAKS, Théorie de l'intégrale (Monog. Matem, 3, Varsovie, 1933). Cf DE POSSEL, C. R. du Séminaire mathématique de M. Julia, 2, 1934-1935, p. 1-19 et Comptes-Rendus, 201, 1935, p. 579.

3. C'est Carathéodory qui a mis le premier cette propriété en évidence dans sa théorie de la mesure de Lebesgue (*Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig, 1918) ; dans ce cas en effet, elle caractérise les ensembles et les fonctions mesurables. Pour le cas des espaces mesurés quelconques, cf DE POSSEL, loc. cit.

Mais alors, si l'on applique l'hypothèse et qu'on procède par récurrence suivant p , on voit que l'on a

$$\mu A'_{n,p} = \mu A_n + \sum_{\nu=1}^p \mu(A_{n+2\nu} - A_{n+2\nu-1});$$

le second membre est donc $\leq \mu A$ quel que soit p ; de sorte que, si nous supposons μA fini (autrement le théorème serait évident), les termes pairs et les termes impairs de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_{n+i} - A_n)$$

forment deux séries convergentes : cette série est donc elle-même convergente. Or on a, d'après l'axiome II,

$$\mu A \leq \mu A_n + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(A_{n+\nu} - A_{n+\nu-1}),$$

et par suite, pour n assez grand, $\mu A \leq \mu A_n + \epsilon$. Mais on a aussi, par hypothèse,

$$\mu(A_n + B) = \mu A_n + \mu B,$$

et par suite

$$\mu(A + B) \geq \mu(A_n + B) = \mu A_n + \mu B \geq \mu A + \mu B - \epsilon,$$

et $\mu(A + B) \geq \mu A + \mu B$. D'ailleurs, d'après l'axiome II, on a aussi $\mu(A + B) \leq \mu A + \mu B$, d'où le résultat annoncé.

Si maintenant nous appliquons ce théorème à l'ensemble des fonctions continues dans un espace topologique quelconque, nous obtenons le théorème suivant :

Une mesure μE étant donnée dans un espace topologique, la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctions continues possèdent la propriété de Carathéodory est que l'on ait

$$\mu(A + B) = \mu A + \mu B$$

chaque fois qu'il existe une fonction continue prenant la valeur 1 sur A et la valeur 0 sur B .

D'ailleurs on sait que, dans un espace normal, une telle fonction continue existe lorsque $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ et dans ce cas seulement ; si par exemple, il s'agit d'un espace métrique, on obtient l'énoncé sous la forme suivante, qui, pour les espaces euclidiens, a déjà été donnée par Carathéodory (loc. cit.) :

μE étant donnée dans un espace métrique, la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctions continues possèdent la propriété de Carathéodory est que l'on ait

$$\mu(A + B) = \mu A + \mu B$$

pour tout couple d'ensembles A, B à distance positive l'un de l'autre.

Et d'ailleurs la démonstration ci-dessus n'est que la traduction, en termes abstraits, de celle même de Carathéodory.