Algèbre non-commutative
N. Bourbaki [1]

Nous avons vu (p. 85) que les premières algèbres non commutatives font leur apparition en 1843-44, dans les travaux de Hamilton [145 a] et de Grassmann ([134], t. 12). Hamilton, en introduisant les quaternions, a déjà une conception fort claire des algèbres quelconques de rang fini sur le corps des nombres réels ([145 a], Préface, p. (26)-(31)) [2]. En développant sa théorie, il a un peu plus tard l'idée de considérer ce qu'il appelle des "biquaternions", c'est-à-dire l'algèbre sur le corps des nombres complexes ayant même table de multiplication que le corps des quaternions ; et il observe à cette occasion que cette extension a pour effet de provoquer l'apparition de diviseurs de zéro ([145 a], p. 650). Le point de vue de Grassmann est quelque peu différent, et pendant longtemps son "algèbre extérieure" restera assez à l'écart de la théorie des algèbres [3], mais sous son langage qui manque encore de précision, on ne peut manquer de reconnaître la première idée d'une algèbre (de dimension finie ou non, sur le corps des nombres réels) définie par un système de générateurs et de relations ([134], t. II, p. 199-217).

De nouveaux exemples d'algèbres s'introduisent dans les années 1850-1860, de façon plus ou moins explicite : si Cayley, développant la théorie des matrices ([58], t. II, p. 475-496), ne considère pas encore les matrices carrées comme formant une algèbre (point de vue qui ne sera clairement exprimé que par les Peirce vers 1870 [248 c]), du moins note-t-il déjà, à cette occasion, l'existence d'un système de matrices d'ordre 2 vérifiant la table de multiplication des quaternions, remarque que l'on peut considérer comme le premier exemple de représentation linéaire d'une algèbre [4]. D'autre part, dans le mémoire où il définit la notion abstraite de groupe fini, il donne aussi en passant la définition de l'algèbre d'un tel groupe, sans d'ailleurs rien tirer de cette définition ([58], t. II, p. 129).

Il n'y a aucun autre progrès notable à signaler avant 1870 ; mais à ce moment commencent les recherches sur la structure générale des algèbres de dimension finie (sur les corps réel ou complexe). C'est B. Peirce qui fait les premiers pas dans cette voie ; il introduit les notions d'élément nilpotent,

[1] Transcription de l'extrait de Éléments d'Histoire des mathématiques, page 149 et suivantes, Denise Vella-Chemla, septembre 2024.

[2] Le concept d'isomorphie de deux algèbres n'est pas mentionné par Hamilton ; mais dès cette époque les mathématiciens de l'école anglaise, et notamment de Morgan et Cayley, savent bien qu'un changement de base ne modifie pas substantiellement l'algèbre étudiée (voir par exemple le travail de Cayley sur les algèbres de rang 2 ([58], t. I, p. 128-130)).

[3] Peut-être faut-il en voir la raison dans le fait qu'en dehors de la multiplication "extérieure", Grassmann introduit aussi entre les multivecteurs ce qu'il appelle les multiplications "régressive" et "intérieure" (qui lui tiennent lieu de tout ce qui touche à la dualité). Il est en tout cas assez remarquable que, vers 1900 encore, dans l'article Study-Cartan de l'Encyclopédie ([52 a], t. 11, p. 107-246), l'algèbre extérieure ne soit pas rangée parmi les algèbres associatives, mais reçoive un traitement séparé, et qu'il ne soit pas signalé que l'un des types d'algèbres de rang 4 (le type VIII de la p. 180) n'est autre que l'algèbre extérieure sur un espace de dimension 2.

[4] À vrai dire, Cayley ne démontre pas cette existence, n'écrit pas explicitement les matrices en question, et ne paraît pas avoir remarqué à ce moment-là que certaines sont nécessairement imaginaires (dans tout ce mémoire, il n'est jamais précisé si les "quantities" qui interviennent dans les matrices sont réelles ou complexes ; il intervient toutefois incidemment un nombre complexe à la p. 494). On penserait qu'il n'y a plus qu'un pas à faire pour identifier les "biquaternions" de Hamilton aux matrices complexes d'ordre 2 ; en fait, ce résultat ne sera explicitement énoncé que par les Peirce en 1870 ([247], p. 132). L'idée générale de représentation régulière d'une algèbre est introduite par C. S. Peirce vers 1879 [248 c] ; elle avait été pressentie par Laguerre dès 1876 ([192], t. I, p. 235).

d'élément idempotent, démontre qu'une algèbre (avec ou sans élément unité) dont un élément au moins n'est pas nilpotent possède un idempotent $\neq 0$, écrit la célèbre décomposition

$$x = exe + (xe - exe) + (ex - exe) + (x - xe - ex + exe)$$

(e idempotent, x élément quelconque), et a l'idée (encore un peu imprécise) d'une décomposition d'un idempotent en somme d'idempotents "primitifs" deux à deux orthogonaux [247]. En outre, selon Clifford ([65], p. 274) [5], c'est à B. Peirce qu'il faut attribuer la notion de produit tensoriel de deux algèbres, que Clifford lui-même applique implicitement à une généralisation des "biquaternions" de Hamilton ([65], p. 181-200), et explicitement à l'étude des algèbres qui portent son nom, quelques années plus tard ([65], p. 397-401 et 266-276). Ces nouvelles notions sont utilisées par B. Peirce pour la classification des algèbres de petite dimension (sur le corps des nombres complexes), problème auquel s'attaquent aussi, aux environs de 1880, d'autres mathématiciens de l'école anglo-américaine, Cayley et Sylvester en tête. On s'aperçoit ainsi rapidement de la grande variété des structures possibles, et c'est sans doute ce fait qui, dans la période suivante, va orienter les recherches vers l'obtention de classes d'algèbres à propriétés plus particulières.

Sur le continent, où l'évolution des idées est assez différente, de telles recherches apparaissent dès avant 1880. En 1878, Frobenius prouve que les quaternions constituent le seul exemple de corps non commutatif (de dimension finie) sur le corps des nombres réels ([119], t. I, p. 343-405) résultat publié indépendamment deux ans plus tard par C. S. Peirce [248 d]. Dès 1861, Weierstrass, précisant une remarque de Gauss, avait, dans ses cours, caractérisé les algèbres commutatives sans élément nilpotent [6] sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ comme composées directes de corps (isomorphes à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; Dedekind était de son côté arrivé aux mêmes conclusions vers 1870, en liaison avec sa conception "hypercomplexe" de la théorie des corps commutatifs ; leurs démonstrations sont publiées en 1884-85 ([329 a], t. II, p. 311-332 et [79], t. II, p. 1-19). C'est en 1884 aussi que H. Poincaré, dans une courte note fort elliptique ([251 a], t. V, p. 77-79), attire l'attention sur la possibilité de considérer les équations, $z_i = \varphi_i(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ qui expriment la loi multiplicative $(\sum_i x_i e_i)(\sum_i y_i e_i) = \sum_i z_i e_i$, dans une algèbre, comme définissant (localement, bien entendu) un groupe de Lie. Cette remarque semble avoir fait grande impression sur Lie et ses disciples (Study, Scheffers, F. Schur et un peu plus tard Molien et E. Cartan), occupés précisément à cette époque à développer la théorie des groupes "continus", et notamment les problèmes de classification (voir en particulier [271], p. 387) ; pendant la période 1885-1905, elle conduit les mathématiciens de cette école à appliquer à l'étude de la structure des algèbres des méthodes de même nature que celles utilisées par eux dans l'étude des groupes et algèbres de Lie.

Ces méthodes reposent avant tout sur la considération du polynôme caractéristique d'un élément de l'algèbre relativement à sa représentation régulière (polynôme déjà rencontré dans les travaux de Weierstrass et Dedekind cités plus haut), et sur la décomposition de ce polynôme en facteurs

[5] B. Peirce rencontra Clifford à Londres en 1871, et l'un et l'autre font plusieurs fois allusion à leurs conversations, dont l'une eut sans doute lieu à une séance de la London Mathematical Society, où Peirce avait présenté ses résultats.

[6] En fait, Weierstrass impose à ses algèbres une condition plus stricte, à savoir que l'équation

$$a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 0$$

(où les a_i et l'inconnue x sont dans l'algèbre) ne peut avoir une infinité de racines que si les a_i sont tous multiples d'un même diviseur de zéro.

irréductibles ; décomposition où, comme Frobenius le découvrira un peu plus tard, se reflète la décomposition de la représentation régulière en composantes irréductibles.

Au cours des recherches de l'école de Lie sur les algèbres se dégagent peu à peu les notions "intrinsèques" de la théorie. La notion de radical apparaît dans un cas particulier (celui où le quotient par le radical est composé direct de corps) chez G. Scheffers en 1891 [271], plus clairement chez Molien [224 a] et Cartan ([52 a], t. II, p. 7-105), qui étudient le cas général (le mot même de "radical" est de Frobenius ([119], t. III, p. 284-329)). Study et Scheffers [271] mettent en relief le concept d'algèbre composée directe de plusieurs autres (déjà entrevu par B. Peirce ([247], p. 221)). Enfin s'introduisent avec Molien [224 a] les algèbres quotients d'une algèbre, notion essentiellement équivalente à celle d'idéal bilatère (définie pour la première fois par Cartan ([52 a], t. II_1, p. 7-105)) ou d'homomorphisme (nom dû aussi à Frobenius) ; l'analogie avec les groupes est très nette ici, et un peu plus tard, en 1904, Epsteen et Wedderburn considèreront des suites de composition d'idéaux bilatères et leur étendront le théorème de Jordan-Hölder. Les résultats les plus importants de cette période sont ceux de T. Molien [224 a] : guidé par la notion de groupe simple, il définit les algèbres simples (sur $\mathbb{C}$) et démontre que ce sont les algèbres de matrices, puis prouve que la structure d'une algèbre quelconque de rang fini sur $\mathbb{C}$ se ramène essentiellement au cas (déjà étudié par Scheffers) où le quotient par le radical est une somme directe de corps. Ces résultats sont peu après retrouvés et établis de façon plus rigoureuse et plus claire par E. Cartan ([52 a], t. II_1, p. 7-105), qui introduit à cette occasion la notion d'algèbre semi-simple, et met en évidence des invariants numériques (les "entiers de Cartan") attachés à une algèbre quelconque sur le corps $\mathbb{C}$ - amenant ainsi la théorie de ces algèbres à un point au-delà duquel on n'a plus guère progressé depuis [7] ; enfin il étend les résultats de Molien et les siens propres aux algèbres sur $\mathbb{R}$.

Aux environs de 1900 se développe le mouvement d'idées qui mène à l'abandon de toute restriction sur le corps des scalaires dans tout ce qui touche à l'algèbre linéaire ; il faut en particulier signaler l'impulsion vigoureuse donnée à l'étude des corps finis par l'école américaine, autour de E. H. Moore et L. E. Dickson ; le résultat le plus marquant de ces recherches est le théorème de Wedderburn [328 a] prouvant que tout corps fini est commutatif. En 1907, Wedderburn reprend les résultats de Cartan et les étend à un corps de base quelconque [328 b] ; ce faisant, il abandonne complètement les méthodes de ses devanciers (qui deviennent inapplicables dès que le corps de base n'est plus algébriquement clos ou ordonné maximal), et revient, en la perfectionnant, à la technique des idempotents de B. Peirce, qui lui permet de mettre sous forme définitive le théorème sur la structure des algèbres semi-simples, dont l'étude est ramenée à celle des corps non commutatifs. En outre, le problème de l'extension du corps des scalaires se pose naturellement dans la perspective où il se place, et il prouve que toute algèbre semi-simple reste semi-simple après une extension séparable du corps de base [8], et devient composée directe d'algèbres centrales de matrices si cette

[7] Les difficultés essentielles proviennent de l'étude du radical, pour la structure duquel on n'a jusqu'ici trouvé aucun principe satisfaisant de classification.

[8] Au moment où écrivait Wedderburn, la notion d'extension séparable n'avait pas encore été définie ; mais il utilise implicitement l'hypothèse que, si un polynôme irréductible f sur le corps de base a une racine x dans une extension de ce corps, on a nécessairement $f'(x) \neq 0$ ([328 b], p. 103). C'est seulement en 1929 que E. Noether signala les phénomènes liés à l'inséparabilité de l'extension du corps des scalaires [236 c].
Mentionnons ici un autre résultat lié aux questions de séparabilité (et maintenant rattaché à l'Algèbre homologique), la décomposition d'une algèbre en somme directe (mais non composée directe !) de son radical et d'une sous-algèbre semi-simple. Ce résultat (qui avait été démontré par Molien lorsque le corps des scalaires est $\mathbb{C}$ et par Cartan pour les

extension est prise assez grande ([328 b], p. 102) [9]. Un peu plus tard, Dickson, pour $n = 3$ [88 a] et Wedderburn lui-même pour n quelconque [328 c] donnent les premiers exemples de corps non commutatifs de rang n^2 sur leur centre [10], inaugurant ainsi dans un cas particulier la théorie des "produits croisés" et des "systèmes de facteurs" que devaient développer plus tard R. Brauer [34 a] et E. Noether [236 c]. Enfin, en 1921, Wedderburn démontre un cas particulier du théorème de commutation [328 d].

Entre temps, de 1896 à 1910, s'était développée, entre les mains de Frobenius, Burnside et I. Schur, une théorie voisine de celle des algèbres, la théorie de la représentation linéaire des groupes (limitée au début aux représentations de groupes finis). Elle tire son origine de remarques de Dedekind : celui-ci (avant même la publication de son travail sur les algèbres) avait, vers 1880, rencontré au cours de ses recherches sur les bases normales d'extensions galoisiennes, le "Gruppendeterminant" $\det(x_{st^{-1}})$, où $(x_s)_{s\equiv0}$ est une suite d'indéterminées dont l'ensemble d'indices est un groupe fini G (en d'autres termes, la norme de l'élément générique de l'algèbre du groupe G relativement à sa représentation régulière) ; et il avait observé que lorsque G est abélien, ce polynôme se décompose en facteurs linéaires (ce qui généralisait une identité démontrée longtemps auparavant pour les déterminants "circulants", qui correspondent aux groupes cycliques G). Au cours de sa très intéressante correspondance avec Frobenius ([79], t. II, p. 414-442), Dedekind, en 1896, attire son attention sur cette propriété, son lien avec la théorie des caractères des groupes abéliens [327 c] et quelques résultats analogues sur des groupes non commutatifs particuliers, qu'il avait obtenus en 1886. Quelques mois plus tard, Frobenius résolvait complètement le problème de la décomposition du "Gruppendeterminant" en facteurs irréductibles ([119], t. III, p. 38-77), grâce à sa brillante généralisation de la notion de caractère ([119], t. III, p. 1-37), dont nous n'avons pas à parler ici. Mais il nous faut noter que dans le développement ultérieur de cette théorie [11], Frobenius reste toujours conscient de sa parenté avec la théorie des algèbres (sur laquelle Dedekind n'avait cessé d'ailleurs d'insister dans ses lettres) ; et, après avoir introduit pour les groupes les notions de représentation irréductible et de représentation complètement réductible ([119], t. III, p. 82-103), et montré que la représentation régulière contient toutes les représentations irréductibles, c'est par des méthodes analogues qu'il proposait, en 1903, de reprendre la théorie de Molien-Cartan ([119], t. III, p. 284-329). Chez Burnside [44 a] et I. Schur [279 c], l'aspect "hyper-complexe" de la théorie n'intervient pas explicitement ; mais c'est chez eux que se font jour les propriétés fondamentales des représentations irréductibles, lemme de Schur et théorème de Burnside. Enfin, il faut noter pour notre objet que c'est dans cette théorie qu'apparaissent pour la première fois deux cas particuliers du théorème de commutation dans la thèse de I. Schur [279 a] qui relie (précisément par la commutation dans l'anneau des endomorphismes d'un espace tensoriel) les représentations du groupe linéaire et celles du groupe symétrique, et dans son travail de 1905 [279 c], où il montre que les matrices permutables à toutes les matrices d'une représentation irréductible sur le corps $\mathbb{C}$ sont des multiples scalaires de I (résultat qui découle aussi du théorème de Burnside).

---

algèbres sur $\mathbb{R}$) est énoncé sous şa forme générale par Wedderburn, qui ne le démontre en fait que lorsque le quotient de l'algèbre par son radical est simple ([328 b], p. 105-109) en utilisant d'ailleurs sur les polynômes irréductibles la même hypothèse que ci-dessus.

[9] Les recherches arithmétiques sur les représentations linéaires des groupes, qui commencent à la même époque, amènent aussi à considérer la notion équivalente de corps neutralisant d'une représentation [279 d].

[10] Notons que dans les "*Grundlagen der Geometrie*", Hilbert avait donné un exemple de corps non commutatif de rang infini sur son centre ([163 c], p. 107-109).

[11] Une partie des résultats de Frobenius avait été obtenue indépendamment par T. Molien en 1897 [224 b].

théories [12] : ce fut l'œuvre de l'école allemande autour de E. Noether et E. Artin, dans la période 1921-1933 qui voit la création de l'algèbre moderne. Déjà, en 1903, dans un mémoire sur l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires ([251 a], t. III, p. 140-149), H. Poincaré avait défini, dans une algèbre, les idéaux à gauche et à droite et la notion d'idéal minimal ; il avait aussi remarqué que dans une algèbre semi-simple, tout idéal à gauche est somme directe de ses intersections avec les composants simples, et que dans l'algèbre des matrices d'ordre n, les idéaux minimaux sont de dimension n ; mais son travail passa inaperçu des algébristes [13]. En 1907, Wedderburn définit à nouveau les idéaux à gauche et à droite d'une algèbre et en démontre quelques propriétés (notamment que le radical est le plus grand idéal à gauche nilpotent ([328 b], p. 113-114)). Mais il faut attendre 1927 pour que ces notions soient utilisées de façon essentielle dans la théorie des algèbres [14]. Mettant sous forme générale des procédés de démonstration apparus antérieurement çà et là [15], W. Krull en 1925 [187 a] et E. Noether en 1926 [236 b] introduisent et utilisent systématiquement les conditions maximale et minimale ; le premier s'en sert pour étendre aux groupes abéliens à opérateurs (qu'il définit à cette occasion) le théorème de Remak sur la décomposition d'un groupe fini en produit direct de groupes indécomposables, tandis que la seconde fait intervenir ces conditions dans la caractérisation des anneaux de Dedekind. En 1927, E. Artin [7 c], appliquant la même idée aux anneaux non commutatifs, montre comment, par une étude systématique des idéaux minimaux, on peut étendre les théorèmes de Wedderburn à tous les anneaux dont les idéaux à gauche satisfont à la fois aux conditions maximale et minimale [16].

D'autre part, Krull, en 1926 [187 b], fait le lien entre la notion de groupe abélien à opérateurs et celle de représentation linéaire des groupes ; point de vue généralisé aux algèbres et développé en détail par E. Noether dans un travail fondamental de 1929 [236 c] qui, par l'importance des idées introduites et la lucidité de l'exposé, mérite de figurer à côté du mémoire de Steinitz sur les corps commutatifs comme un des piliers de l'algèbre linéaire moderne [17].

[12]?? début de la phrase...

[13]Notons aussi que, dans ce mémoire, Poincaré observe que l'ensemble des opérateurs, dans l'algèbre d'un groupe, qui annulent un vecteur d'un espace de représentation linéaire du groupe, forment un idéal à gauche ; il signale que cette remarque pourrait être appliquée à la théorie des représentations linéaires ([251 a], t. III, p. 149), mais ne développa jamais cette idée.

[14]Il est intéressant de remarquer que, dans l'intervalle, la notion d'idéal à gauche ou à droite apparaît, non dans l'étude des algèbres, mais dans un travail de E. Noether et W. Schmeidler [238], consacré aux anneaux d'opérateurs différentiels.

[15]La condition maximale (sous forme de "condition de chaîne ascendante") remonte à Dedekind, qui l'introduit explicitement ([79], t. III, p. 90) dans l'étude des idéaux d'un corps de nombres algébriques ; un des premiers exemples de raisonnement de "chaîne descendante" est sans doute celui qu'on trouve dans le mémoire de Wedderburn de 1907 ([328 b], p. 90) à propos d'idéaux bilatères.

[16]En 1929, E. Noether montrait que pour les anneaux sans radical, ces théorèmes s'appliquent en supposant seulement vérifiée la condition minimale ([236 c], p. 663) ; C. Hopkins prouva en 1939 que cette condition à elle seule entraîne que le radical est nilpotent [167].

[17]C'est là qu'on trouve entre autres pour la première fois sous leur forme générale les notions d'homomorphisme de groupe à opérateurs, d'anneau opposé, de bimodule, ainsi que les fameux théorèmes d'isomorphie" (qui figurent déjà pour les groupes commutatifs dans [236 b]). Des cas particuliers ou corollaires de ces derniers étaient bien entendu intervenus longtemps auparavant, par exemple (pour le second théorème d'isomorphie) chez Hölder à propos des groupes finis [165], chez Dedekind à propos des groupes abéliens ([79], t. III, p. 76-77), chez Wedderburn à propos d'idéaux bilatères ([328 b], p. 82-83) ; quant au premier théorème d'isomorphie, il est par exemple énoncé explicitement par de Séguier en 1904 ([86], p. 65).

Enfin, dans une série de travaux qui débutent en 1927 ([237], [34 a], [236 d]), E. Noether et R. Brauer (auxquels se joignent à partir de 1929-31 A. Albert et H. Hasse) reprennent l'étude des corps gauches au point où l'avaient laissée Wedderburn et Dickson. Si la partie la plus importante de leurs résultats consiste en une étude approfondie du groupe de Brauer (en particulier sur les corps de nombres algébriques) et dépasse donc le cadre de cette note, signalons en tout cas que c'est au cours de ces travaux que se précisent les théorèmes de commutation, ainsi que la notion de corps neutralisant d'une algèbre simple et ses relations avec les sous-corps commutatifs maximaux ; enfin, en 1927, Skolem caractérise les automorphismes des anneaux simples [286 b], théorème retrouvé quelques années plus tard par E. Noether [236 c] et R. Brauer [34 a].

Ainsi, en 1934, la théorie élémentaire des anneaux simples et semi-simples est à peu près arrivée à son aspect définitif (pour un exposé d'ensemble de l'état de la théorie à cette époque, voir [87]) ; depuis lors, elle s'est développée dans deux directions différentes, que nous nous bornerons à mentionner brièvement. D'une part, la théorie des "systèmes de facteurs" de R. Brauer et E. Noether a récemment reçu une impulsion nouvelle, à la suite de son incorporation dans l'Algèbre homologique moderne [18]. D'autre part, on a beaucoup cherché, avec plus ou moins de succès, à étendre tout au moins en partie les résultats de la théorie classique aux anneaux sans condition minimale [19] ou aux anneaux sans élément unité. Mais jusqu'ici ces extensions n'ont guère eu de répercussions dans les autres branches des mathématiques ; pour plus de détails sur ces travaux, nous renvoyons à l'exposé récent de N. Jacobson [172 b].

Références

- [7c] E. Artin, Zur Theorie der hypercomplexen Zahlen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, t. V (1927), p 251-260.
- [34a] R. Brauer, Über Systeme hypercomplexer Zahlen, *Math. Zeitschr*, t. XXX (1929), p. 79-107.
- [44a] W. Burnside, On the condition of reducibility for any group of linear substitutions, *Proc. Lond. Math. Soc.*, t. III (1905), p. 430-434.
- [52a] E. Cartan, *Œuvres complètes*, 6 vol. (3 parties), Paris (Gauthier-Villars), 1953-55.
- [58] A. Cayley, *Collected Mathematical Papers*, 13 vol., Cambridge (University Press), 1889-1898.
- [65] W. K. Clifford, *Mathematical papers*, London (Macmillan), 1882.
- [79] R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, 3 vol., Braunschweig (Vieweg), 1932.
- [86] J. A. de Séguier, *Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits*, Paris (Gautier-Villars), 1904.
- [87] M. Deuring, *Algebren (Erg. der Math.*, Bd. 4), Berlin (Springer), 1937.
- [88a] L. E. Dickson, Linear associative algebras and abelian equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XV (1914), p. 31-46.
- [119] G. Frobenius, *Gesammelte Abhandlungen* (éd. J. P. Serre), 3 vol., Berlin-Heidelberg-New York (Springer), 1968.
- [134] H. Grassmann, *Gesammelte Werke*, 3 vol., Leipzig (Teubner), 1894-1911.
- [145a] W. R. Hamilton, *Lectures on quaternions*, Dublin, 1853.

[18] Nous n'avons pas à faire ici l'histoire de cette théorie et de ses relations avec la notion d'extension d'un groupe par un autre ; mais il convient de noter que les premiers "systèmes de facteurs" font précisément leur apparition à propos d'un problème d'extension de groupes, dans le mémoire de 1904 où I. Schur fonde la théorie des "représentations projectives" des groupes [279 b].

[19] Dès 1928, Krull avait étendu aux modules semi-simples quelconques les théorèmes généraux sur les modules semi-simples de longueur finie ([187 c], p. 63-66).

[163c] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 7^{e} éd., Leipzig-Berlin (Teubner), 1930.

[165] O. Hölder, Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen, *Math. Ann.*, t. XXXIV (1889), p. 26-56.

[167] C. Hopkins, Rings with minimal conditions for left ideals, *Ann. of Math.*, (2), t. XL (1939), p. 712-730.

[172b] N. Jacobson, Classes of restricted Lie algebras of characteristic p, II, *Duke Math. Journ.*, t. X (1943), p. 107-121.

[187a] W. Krull, Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, *Math. Zeitschr.,* t. XXIII (1925), p. 161-196.

[187b] W. Krull, Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, *Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss.*, 1926, n^{o} 1, 32 pp.

[187c] W. Krull, Zur Theorie der allgemeinen Zahlringe, *Math. Ann.*, t. XCIX (1928), p. 51-70.

[192] E. Laguerre, *Œuvres*, 2 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1898-1905.

[224a] T. Molien, Ueber Systeme höherer complexer Zahlen, *Math. Ann.*, t. XLI (1893), p. 83-156.

[224b] T. Molien, Über die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen, *Berliner Sitzungsber.*, 1897, p. 1152-1156.

[236b] E. Noether, Abstraker Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörper, *Math. Ann.*, t. XCVI (1926), p. 26-61.

[236c] E. Noether, Hypercomplexe Grössen und Darstellungstheorie, *Math. Zeitschr.*, t. XXX (1929), p. 641-692.

[236d] E. Noether, Nichtcommutative Algebra, *Math. Zeitschr.*, t. XXXVII (1933), p. 514-541.

[237] E. Noether et R. Brauer, Über minimale Zerfallungskörper irreduzibler Darstellungen; *Berliner Sitzungsber.*, 1927, p. 221-228.

[238] E. Noether et W. Schmeidler, Moduln in nichtkommutativen Bereichen, *Math. Zeitschr.*, t. VIII (1920), p. 1-35.

[247] B. Peirce, Linear associative algebra, *Amer. Journ. of Math.*, t. IV (1881), p. 97-221.

[248c] C. S. Peirce, On the relative forms of the algebras, *Amer. Journ. of Math.*, t. IV (1881), p. 221-225.

[248d] C. S. Peirce, On the algebras in which division is unambiguous, *Amer. Journ. of Math.*, t. IV (1881), p. 225-229.

[251a] H. Poincaré *Œuvres*, 11 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1916-1956.

[271] G. Scheffers, Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen, *Math. Ann.*, t. XXXIX (1891), p. 293-390.

[279a] I. Schur, *Uber eine Klasse von Matrices, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen*, Diss. Berlin, 1901.

[279b] I. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. de Crelle*, t. CXXVII (1904), p. 20-50.

[279c] I. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, *Berliner Sitzungsber.*, 1905, p. 406-432.

[279d] I. Schur, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitution, *Berliner Sitzungsber.*, 1906, p. 164-184.

[286b] T. Skolem, Zur Theorie der associativen Zahlensysteme, *Skr. norske Vid. Akad.*, Oslo, 1927, n^{o} 12, 50 pp.

[327c] H. Weber, Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig is, *Math. Ann.*, t. XX (1882), p. 301-329.

[328a] J. Maclagan Wedderburn, A theorem on finite algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. VI (1905), p. 349-352.

[328b] J. Maclagan Wedderburn, On hypercomplex numbers, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), t. VI (1908), p. 77-118.

[328c] J. Maclagan Wedderburn, A type of primitive algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*; t. XV (1914), p. 162-166.

[328d] J. Maclagan Wedderburn, On division algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XXII (1921), p. 129-135.

[329a] K. Weierstrass, *Mathematische Werke*, 7 vol., Berlin (Mayer et Müller), 1894-1927.