Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences
t. xix (1844) p. 980-982

Géométrie. *Sur quelques propriétés générales des surfaces et des lignes tracées sur les surfaces* ; *par* **M. O. Bonnet** (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires, MM. Cauchy, Poncelet, Lamé.)

Plusieurs analystes ont déjà étudié les propriétés des lignes tracées sur une même surface : M. Gauss, entre autres, a publié un Mémoire intitulé *Disquisitiones generales circa superficies curvas* [1], qui renferme tout ce que l'on connaît de plus important sur cette matière. L'illustre géomètre fait usage, dans ce beau travail, de considérations analytiques très ingénieuses et très élégantes, mais qui laissent peut-être à désirer sous le rapport de la simplicité. Je me suis proposé, dans le Mémoire que j'ai l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie, de reprendre les mêmes questions par les méthodes de la géométrie pure. J'aime à croire que mon travail, quoique reproduisant plusieurs résultats déjà connus, ne sera pourtant pas sans quelque utilité ; qu'il me soit permis, en effet, de rappeler l'opinion qu'a dernièrement émise à ce sujet un célèbre analyste : "Si l'analyse mathématique, a dit M. Lamé [2], découvre des propriétés nouvelles dans la science de l'étendue, il importe que la géométrie pure s'assimile ces propriétés et qu'elle les vérifie par des méthodes qui lui soient propres. C'est en se perfectionnant par des épreuves semblables que les méthodes géométriques pourront acquérir toute la généralité et toute la sûreté nécessaires pour pouvoir aborder les questions difficiles que l'analyse a seule explorées jusqu'ici." On verra d'ailleurs que, dans le cas actuel, les méthodes géométriques ne se bornent pas à fournir des démonstrations simples des résultats déjà connus, mais qu'elles conduisent encore à la découverte de plusieurs propriétés nouvelles qu'il serait très difficile d'établir par l'analyse. Ainsi je donne la condition pour que deux systèmes de lignes tracées sur une surface soient orthogonaux ; la formule que j'obtiens comprend, comme cas particuliers, celles que M. Lamé a fait connaître depuis longtemps dans le *Journal de l'École Polytechnique*, pour les courbes planes et les surfaces, et que M. Bertrand a démontrées géométriquement dans un Mémoire récemment approuvé par l'Académie.

Je me suis aussi occupé de la transformation des surfaces. M. Gauss avait remarqué que pour qu'une surface pût s'appliquer sur une autre sans qu'il y eût déchirure ni duplicature, il fallait et suffisait que les points de ces surfaces se correspondissent deux à deux de manière que les courbures des surfaces, c'est-à-dire les inverses des produits des rayons de courbure principaux, en ces points, fussent égales. J'établis d'une manière simple cette propriété fondamentale, ainsi que quelques autres plus ou moins remarquables.

[1] *Voyez* les *Nouveaux Mémoires de Gottingue*, t. vi, p. 99.
[2] *Comptes rendus des séances de l'Académie*, t. xvii, p. 1268.

Je termine enfin par quelques résultats relatifs à ce que j'appelle la valeur sphérique d'une portion de surface courbe. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Concevons qu'on ait tracé sur une surface un contour quelconque ; par les différents points de ce contour menons des normales à la surface, puis, ayant pris une sphère de rayon égal à un, imaginons tous les rayons de cette sphère respectivement parallèles aux normales de la surface ; nous déterminerons ainsi, sur la sphère, un second contour qui comprendra ce que nous appelons la valeur sphérique de la portion de surface correspondante au premier contour.

M. Gauss a eu le premier l'idée de cette reproduction des surfaces quelconques sur une sphère de rayon un, et il a donné un théorème remarquable qui fait connaître la valeur sphérique d'une portion de surface terminée à des lignes minima. Je parviens à un résultat plus général que celui de M. Gauss et qui me permet de déterminer la valeur sphérique, quel que soit le contour tracé sur la surface. Quand la surface courbe considérée est une sphère, la valeur sphérique d'une portion quelconque de la surface est proportionnelle à la valeur exacte, je conclus de cette remarque le théorème suivant, qui me paraît assez curieux : *Une portion de surface sphérique, terminée à un contour polygonal ou courbe tout à fait quelconque, est égale au carré du rayon multiplié par l'excès de la somme des angles du contour sur autant de fois deux droits qu'il y a de côtés moins deux et par l'intégrale* $\int \frac{\cos\theta}{\rho} ds$ *étendue à tout le contour.* Je suppose les angles mesurés par les longueurs des arcs décrits de leurs sommets comme centres avec l'unité pour rayon, et j'appelle ρ le rayon de courbure du contour en un point quelconque, θ l'angle que le plan osculateur du contour au même point fait avec le plan tangent de la sphère en ce point supposé prolongé du côté opposé à la surface qu'il s'agit d'évaluer, enfin ds la différentielle du contour.