Transcription d'une conférence d'Alain Connes : Des anneaux d'opérateurs à la géométrie non-commutative

Le maître de cérémonie : Eh bien, bienvenue à tous. Nous commençons avec une ponctualité remarquable, et j'ai le plaisir d'accueillir le conférencier du cycle de conférences d'exception. Chaque programme thématique de l'Institut Fields comprend une ou deux conférences d'exception, ou conférences Coxeter. Nous avons déjà entendu Tatiana Shulman en début de semestre, et j'ai maintenant le plaisir d'accueillir le professeur Alain Connes.

Je pense que le professeur Connes n'a plus besoin d'être présenté, mais permettez-moi tout de même quelques mots. Il a, bien sûr, apporté des contributions fondamentales à la théorie de la géométrie non-commutative et aux algèbres d'opérateurs en général, non seulement dans ce domaine, mais aussi dans de nombreuses applications en mathématiques et même en physique. Il entretient également des liens étroits avec le Canada en général et l'Institut Fields en particulier. Il a été chercheur invité à l'Université Queen's en 1975 et a reçu peu après un doctorat honoris causa de cette même université.

Il était conférencier invité à l'Institut Fields en 1995, je crois que c'était la toute première série de conférences de ce type dans ce bâtiment, puisque nous venions tout juste de nous y installer. Il l'était également en 2008, et il l'est de nouveau en 2023. Nous sommes donc ravis qu'il vienne nous parler des anneaux d'opérateurs à la géométrie non-commutative. Merci beaucoup.

Alain Connes : Eh bien, alors, tout d'abord, je suis très ému de pouvoir donner une conférence en direct après cette longue interruption où nous étions tous sur zoom et autres. Je trouve que c'est tellement différent d'être en contact direct comme ici. Voici en gros le programme de ces conférences. Si vous souhaitez passer des algèbres d'opérateurs à la géométrie non-commutative, je tiens à souligner que j'ai souvent associé le début de la géométrie non-commutative à cette nuit de 1925 où Heisenberg effectuait des calculs.

Seul sur l'île d'Helgoland, il découvrit la mécanique matricielle, ensuite comprise par Born et Jordan. Mais il y a eu ensuite une découverte capitale, faite par la suite : Hilbert était quelque peu perplexe face aux travaux de Heisenberg et avait demandé à Born de trouver le formalisme adéquat. von Neumann l'a trouvé, et ce fut une véritable naissance. Car, comme vous le verrez dans ma conférence, l'espace de Hilbert est devenu un élément central des mathématiques. Le leitmotiv de mon propos est que, grâce à la mécanique quantique, l'espace de Hilbert est le cadre idéal pour la géométrie. Or, la géométrie que l'on rencontre avec les opérateurs de l'espace de Hilbert ne se limite pas à la géométrie ordinaire ; elle nous oblige à explorer un tout nouveau domaine des espaces géométriques : la géométrie non-commutative.

Je vais d'abord vous donner un aperçu, disons, empirique, de ce qui va suivre. Nous allons donc revenir à von Neumann et à ses travaux avec Murray, doctorant travaillant avec lui à Princeton à l'époque. Son nom est mentionné, vous pouvez voir von Neumann à Princeton à ce moment-là.

Référence de la vidéo d'une conférence donnée à Toronto en décembre 2023 : https://www.youtube-nocookie.com/embed/CPff7CGnjnQ

Nous allons donc examiner ceci. En partant des anneaux d'opérateurs, je vais vous expliquer ce que j'ai fait dans ma thèse : la découverte que les facteurs, lorsqu'ils ne sont ni de type I ni de type II, possèdent une évolution temporelle intrinsèque. C'est un résultat fascinant, car cela signifie que lorsque nous étudions les espaces correspondant à ces facteurs, contrairement aux espaces géométriques classiques qui sont statiques, ces nouveaux espaces sont dynamiques.

En un sens, ils sont donc totalement différents des espaces auxquels nous sommes habitués. Nous n'allons donc pas nous limiter à cette motivation purement algébrique, et nous allons découvrir que ces espaces existent bel et bien en géométrie différentielle ordinaire. Ces nouveaux espaces sont typiquement des espaces de feuilles de feuilletages.

En traitant ces espaces, qui sont des espaces de feuilles de feuilletages, comme des espaces ordinaires, on n'aboutit à rien. Par exemple, on constate qu'aucune fonction n'y est définie, en raison de l'ergodicité, etc. Mais en adoptant le point de vue approprié, à savoir le point de vue non-commutatif, on découvre une richesse étonnante.

On constate alors que ces nouveaux espaces. . .Voyez-vous, la géométrie non-commutative n'est pas une simple généralisation de la géométrie ordinaire. Certes, elle l'est, mais ce serait bien trop simpliste. Elle est bien plus riche, car elle possède des propriétés totalement nouvelles, absentes du monde commutatif.

Très bien. Voilà donc le premier point, et il est très important. Ensuite, nous allons essayer de voir, si vous voulez, ce nouveau calcul, qui est en quelque sorte le prolongement des travaux de von Neumann sur l'invention de l'espace de Hilbert, les opérateurs, etc.

Il y a donc un nouveau calcul. Bien. Et maintenant, par une sorte de concours de circonstances, car si vous décidez de découvrir la nature de l'espace-temps, vous n'irez nulle part.

Si vous décidez d'étudier la fonction de données de Riemann, vous n'irez nulle part. Il faut un concours de circonstances qui vous y amène, qui vous y force. Je vais décrire ces deux concours de circonstances : le premier concerne l'espace-temps, et le second, les nombres premiers.

Bien. Commençons donc par le début. Commençons par von Neumann.

von Neumann avait un post-doctorant, Murray. Et ce post-doctorant, Murray, m'a dit qu'il voulait rédiger un article. L'idée de cet article était d'étudier un système quantique et ses sous-systèmes.

En étudiant les sous-systèmes, on peut examiner leurs observables et définir les propriétés algébriques qu'elles doivent satisfaire. On découvre ainsi un certain nombre de propriétés. Inutile de lire tout ça.

Franchement, vous vous ennuieriez à lire ce texte. C'est très technique. Mais il s'agit des propriétés algébriques qui correspondent aux sous-systèmes.

Je vais donc passer rapidement sur ce point. Ce qui est vraiment important, c'est ce qu'écrivait von

Neumann. Il disait que notre problème est de comprendre les sous-systèmes quantiques, c'est-à-dire de diviser le système en sous-systèmes.

Eh bien, il s'avère, si vous voulez, qu'ils pensaient qu'il s'agissait d'une factorisation de l'espace de Hilbert. Ils cherchaient donc à prouver que l'espace de Hilbert se décompose en un produit tensoriel, et que les observables correspondant au premier système correspondent aux opérateurs du premier espace de Hilbert, et les opérateurs du second sous-système aux opérateurs du second espace de Hilbert. Ce qu'ils ont découvert, et c'est absolument stupéfiant, c'est que cela est faux.

Il s'agissait donc d'une découverte fondamentale. Ils ont découvert qu'ils voulaient écrire plus tard : "Non, ce n'est pas vrai."

Et ils ont découvert non seulement que c'était faux, mais ils dévoilaient, voyez-vous, toute la beauté des mathématiques. Face à un problème, si vous dites : "Eh bien, ce sera toujours comme ça, et je n'ai pas besoin de le prouver", vous n'irez nulle part. Mais si vous essayez de prouver que c'est faux, et que vous commencez à vous dire : "Ca ne semble pas tout à fait correct..."

Puis on commence à réfléchir, à prendre des exemples, etc. Et ce qu'ils ont découvert, c'est qu'il existait en fait trois types. Il y a bien sûr un type trivial, appelé type I, dans lequel l'espace de Hilbert se factorise.

C'est d'ailleurs l'origine du terme "factorisation". L'espace de Hilbert se factorise comme un produit tensoriel. Mais ils ont ensuite découvert un autre cas, qui constitue en soi une découverte majeure.

Car dans ce second cas, appelé type II, lorsqu'on considère tous les opérateurs de l'espace de Hilbert, on peut classifier les projections de ces opérateurs algébriques. On constate que cela correspond aux sous-espaces de l'espace de Hilbert, et ces sous-espaces sont classés selon leur dimension, qui est un entier. Or, ce que Murray et von Neumann ont découvert dans le cas du type II, c'est que la dimension de ces sous-espaces est en fait un nombre réel.

Et ce fut une découverte capitale, illustrée par de nombreux exemples ultérieurs. Bon, et puis il restait quelque chose. Plus précisément, dans le cas de type II, il subsiste une trace, comme dans le cas de type I, et cette trace efface en quelque sorte la non-commutativité.

Cela permet donc d'aller assez loin. Mais il ne restait plus que le cas de type III. Voici comment les choses se sont passées.

À la fin des années 60, trois physiciens théoriciens, Rudolf Haag, Nicolaas Marinus Hugenholtz et Marius Winnink, se sont inspirés des travaux de trois autres physiciens : Kubo, Martin et Schwinger. C'est l'origine de ces initiales. Avec une certaine modestie, ils ont nommé cette condition d'après ces trois physiciens. Mais en réalité, entre nous, elle devrait être attribuée à Haag, Hugenholtz et Winnink. Ils ont donc reformulé une condition qui était une condition limite pour les physiciens d'origine.

Et c'est très simple à énoncer. Vous comprenez pourquoi ? Parce qu'en mécanique quantique, on a ce qu'on appelle l'état d'équilibre, l'état de Gibbs ou l'état de Boltzmann, à la température inverse de β, qui est donné par cette fonctionnelle, normalisée. Et à l'autre extrémité, on a également l'évolution temporelle de Heisenberg.

Il n'est pas très difficile de voir que la fonctionnelle donnée par cette formule n'est pas une trace, car il y a ce facteur. Cependant, comme la trace est préservée par permutation cyclique, on peut comparer l'état du produit AB avec celui obtenu sur BA. Il suffit de laisser l'observable B évoluer selon l'évolution temporelle de Heisenberg, à ceci près que cette évolution est effectuée en temps imaginaire pur, ce qui est remarquable. Ce temps imaginaire pur est le produit de la racine carrée de moins un ($i = \sqrt{-1}$) par β, qui est l'inverse de la température.

C'est donc un fait très important. Puis, en 1970, Tomita et Takesaki ont fait une découverte capitale : la relation entre un état et son évolution, exprimée par une formule, se propage à travers deux facteurs et s'étend à l'algèbre fondamentale générale.

Ainsi, pour un état (fidèle, normal, etc.) défini dans l'algèbre fondamentale, on obtient une évolution temporelle donnée par cette formule. C'est par là que j'ai commencé mes recherches, notamment ma thèse de 1971.

En 1971, j'avais déjà défini deux invariants en m'appuyant sur les travaux d'Araki-Woods. Mais leur calcul était extrêmement complexe. J'effectuais alors des calculs très compliqués, impliquant une infinité de produits.

Et c'est seulement au prix de ces calculs extrêmement complexes que j'ai finalement découvert quelque chose d'incroyablement simple : lorsqu'on change l'état d'une algèbre fondamentale, on passe à un autre état. En fait, on ne change pas la classe de cet automorphisme modulaire lorsqu'on travaille avec des automorphismes intérieurs modulaires. Ainsi, l'effet de cela a été que ces deux invariants, que j'avais définis auparavant et qui étaient impossibles à calculer, sont devenus faciles à calculer grâce à une propriété d'invariance générale. Cette propriété ne dépendait plus du choix de l'état, mais elle indiquait, en quelque sorte, que la non-commutativité, ou du moins la quasi-non-commutativité au niveau algébrique, implique une évolution temporelle intrinsèque, à condition de négliger les automorphismes triviaux, qui existent toujours dans le cas non-commutatif, c'est-à-dire les automorphismes intérieurs.

Donc, vous savez, ce fait a bien sûr engendré non seulement l'invariant, c'est-à-dire la calculabilité des invariants, mais aussi, comme je l'ai démontré dans ma thèse, qu'avec ces éléments, on pouvait réduire le type III au type II et aux automorphismes. J'ai présenté ce résultat dans ma thèse de 1972. Il manquait un cas dans ma thèse : le cas III_1, qui a été résolu bien plus tard par Takezaki.

En fait, on a deux invariants : le module S de M, qui est le sous-groupe fermé de $\mathbb{R}_+^*$, et c'est ce module qui a permis de décomposer les facteurs de type III en III_λ de type 3, où λ est compris entre 0 et 1. En 1972, j'ai démontré, en m'appuyant sur les travaux de Krieger en théorie de la mesure, qu'il existe un facteur hyperfini qui n'est pas un produit tensoriel infini et qui n'est pas isomorphe à un produit tensoriel infini (facteur de type I). Ensuite, pendant un an, entre 1974 et 1975, alors que j'étais à Kingston, j'ai pu achever les calculs non seulement pour l'infini hyperfini de type II, mais aussi pour les automorphismes. Cela a donc permis, en quelque sorte, de terminer la classification des facteurs hyperfinis, enfin presque, car il restait le cas III_1, qui était ouvert et qui a été magnifiquement résolu dans les années 80 par Uffe Haagerup.

Voilà donc la situation. Après 1975, j'ai été invité à travailler à l'IHES. À mon arrivée, j'avais la tête pleine de facteurs et de tout ça. J'étais assis à table, et pendant le déjeuner, on parlait beaucoup de complexes de de Rham et de théories étranges. Je me sentais un peu à part.

Comment expliquer ça aux autres ? Heureusement, il y avait quelqu'un de formidable, Dennis Sullivan, qui était très ouvert. Et ce que j'ai découvert après un certain temps, en discutant avec lui – il était très amical, etc. –, c'est qu'il existait en fait un moyen d'expliquer à ces gens ce que je faisais. La raison était que, lorsqu'on a un feuilletage – et ces gens-là les connaissaient très bien, il y a de nombreux exemples de feuilletages – ils ont ça en poche - ce que j'ai découvert en 1976, c'est que lorsqu'on a un feuilletage, on a une algèbre fondamentale canoniquement associée. On n'a pas besoin de choisir, elle est là, sous nos yeux. Et puis, quand on regarde des exemples de feuilletages, comme le fait qu'il n'existe pas de feuilletage souple du fibré canonique de la surface, on obtient des facteurs précis, très complexes, très difficiles à déterminer. Et puis, d'une certaine manière, les choses ont commencé à prendre sens.

En fait, la définition de l'algèbre fondamentale d'un feuilletage est très simple. Que faire ? Que faire si, lorsqu'on a des feuilletages, du fait de leur ergodicité (ils sont généralement ergodiques), on ne peut pas trouver de fonctions à valeurs réelles ou complexes sur l'espace des feuilles. De telles fonctions seront constantes presque partout.

Donc, ce n'est pas intéressant. Mais ce que l'on trouve, ce sont ce que Dirac aurait appelé des fonctions à deux valeurs. Dirac avait cette idée de deux nombres, et ces deux nombres sont des opérateurs dans l'espace.

Comment définir des fonctions à deux valeurs sur un feuilletage ? C'est très simple. On considère, pour chaque feuille, son espace L^2, qui est intrinsèquement défini si l'on exclut les densités. Une fonction à q valeurs sur l'espace des feuilles est alors simplement une application à laquelle chaque feuille s'associe un opérateur dans son espace L^2.

Pourquoi y en a-t-il autant ? Parce que, par exemple, on peut prendre une fonction sur la variété ambiante et prendre l'opérateur de multiplication par la restriction de cette fonction à la feuille. C'est évident, c'est une fonction non triviale. Il existe donc une multitude de telles fonctions.

Et ce qui se passe alors, c'est que vous commencez à réaliser qu'il se passe quelque chose de vraiment très complexe, car si vous. . ..

[...]

von Neumann a en effet beaucoup travaillé sur la théorie des ensembles – et je veux dire, en théorie des ensembles, il existe une partie très ambiguë du lemme de Zorn et de l'axiome du choix, si vous préférez, lorsqu'on n'est pas dans le domaine dénombrable. Ce qui se passe, c'est que si vous ignorez l'axiome du choix dans le cadre indénombrable, vous découvrirez que cet espace de feuilles de feuilletages complexes, de type III, de type III_1, etc., en fait, lorsque vous essayez de calculer leur cardinalité, la cardinalité de l'espace des feuilles n'est pas continue, elle est discrète. Et c'est précisément ce que permet la géométrie non-commutative.

Maintenant, si vous voulez, au niveau de la théorie de la mesure, voici ce qui se passe. Il faut garder à l'esprit qu'un des premiers résultats de von Neumann établit que les algèbres fondamentales commutatives correspondent exactement à la théorie de la mesure ordinaire. C'est un fait très simple. La situation est alors devenue très intéressante, et ce pour la raison suivante : même si nous nous limitons à la théorie de la mesure, il est clair qu'un feuilletage, et plus précisément son espace feuilleté, n'est pas simplement un espace mesuré.

Il possède une structure géométrique différentielle, une structure topologique, et toutes ces structures. Il faut les comprendre dans le même langage que celui des anneaux d'opérateurs de von Neumann, ce qui montre à quel point c'est complexe. C'est extrêmement complexe. Et voici ce qui se produit.

Voilà ce qui se produit : depuis Gelfand, nous avons, en quelque sorte, un substitut à la topologie lorsque nous travaillons dans le formalisme des espaces de Hilbert, à savoir les algèbres C^*. Nous verrons plus tard que nous avons également un substitut à la géométrie riemannienne. Je vais l'expliquer très prochainement. Mais nous constaterons aussi que, grâce aux opérateurs des espaces de Hilbert, nous avons un substitut au calcul différentiel et intégral. C'est un fait très frappant, car en lisant Newton, les Principia et autres, vous découvrirez qu'il faisait du calcul différentiel et intégral, mais en réalité, contrairement à Leibniz, il avait une conception très juste de ce calcul. Je vais vous montrer pourquoi il avait cette conception juste. Voyez, oui, laissez-moi vous le montrer tout de suite.

Donc, Newton, oui, donc, oui, si vous voulez, d'accord, contrairement à Leibniz, il pensait qu'une variable, un infinitésimal, n'est pas un nombre inférieur à n'importe quel nombre, car ce serait absurde, d'accord ? Non, il pensait qu'un infinitésimal est une variable, et que c'est une variable qui peut devenir aussi petite qu'on le souhaite, à condition d'ignorer certaines valeurs. D'accord ? Revenons-en maintenant au formalisme quantique. Tout d'abord, on découvre qu'un autre élément, une chose très élémentaire, est le suivant : imaginez que vous essayiez d'expliquer à un mathématicien ce qu'est une variable réelle. La plupart des gens vous diront qu'une variable réelle est un ensemble X et l'application de X sur la droite réelle. C'est ce que tout le monde vous dira. C'est la conception classique d'une variable réelle. Mais si vous réfléchissez un peu plus, vous constaterez que, selon cette définition, les variables continues ne peuvent pas coexister avec les variables discrètes. La raison est simple : si vous avez une variable continue, l'ensemble X doit avoir une cardinalité au moins égale à celle du continu. Or, dans ce cas, il ne peut pas admettre de variable discrète, car une variable discrète ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, ou une infinité dénombrable, pour chaque valeur. Donc, ça ne fonctionne pas. Mais la beauté du formalisme de von Neumann et du formalisme quantique réside précisément dans le fait que les variables discrètes coexistent avec les variables continues. Pourquoi ? Grâce à l'unicité de l'espace de Hilbert.

Il faut se rappeler que l'espace de Hilbert, de dimension infinie et à base dénombrable (bon, j'oublie tout ça), est unique. Et cette unicité, qu'est-ce que cela signifie ? Cela signifie que si l'on prend l'espace de Hilbert classique des petites suites multipliées par n, on a bien sûr une variable discrète. On peut aussi prendre les fonctions L^2 sur l'intervalle $[0, 1]$. Ici, on a une variable continue, mais comme les espaces de Hilbert sont identiques, on peut regrouper les deux, c'est-à-dire dans le même espace de Hilbert.

Le seul prix à payer, c'est que ces deux variables, la continue et la discrète, ne peuvent pas commuter. Si elles commutaient, il existerait un espace X qui leur correspondrait à toutes les deux, ce qui est impossible. La beauté du formalisme quantique réside précisément en ceci : d'un côté, le côté classique ; de l'autre, le côté quantique, dû essentiellement aux travaux de Heisenberg, Dirac et von Neumann. Du côté quantique, la variable réelle est simplement un opérateur auto-adjoint, rien de plus. Elle possède un spectre (les valeurs de la variable), une multiplicité spectrale, bref, toutes les propriétés nécessaires, et bien sûr les opérations. Mais la grande différence, c'est qu'il est possible d'envisager la non-commutativité ; sans cela, le formalisme ne serait pas adapté.

Voilà, c'est tout. Maintenant, vous comprenez vraiment pourquoi je parle de variables quantiques. Par exemple, il existe des ordinateurs qui génèrent des nombres aléatoires, mais si vous étiez suffisamment doué en informatique, vous pourriez reproduire ces nombres quantiques d'une manière très astucieuse, pas avec ce que les ingénieurs suisses ont fabriqué. Ce petit appareil, qu'on peut mettre sur son iPhone, envoie des photons à des cellules photoélectriques. À cause du principe de Heisenberg, personne ne peut savoir sur quelle cellule photoélectrique le photon va atterrir. Cela signifie qu'avec leur appareil, ils peuvent générer des nombres aléatoires que personne, absolument personne, ne peut reproduire, toujours à cause de Heisenberg. C'est ce que j'entends par variabilité quantique, et cette variabilité est entièrement incarnée par le formalisme quantique. Voilà où nous en sommes. Comme je l'ai dit, Newton avait cette expression incroyable, que j'ai apprise moi-même... Je suis allé à la conférence d'Euler à Leningrad, et il y explique qu'une variable est dite infinitésimale si, parmi ses valeurs particulières, il en existe une telle que cette valeur, ainsi que toutes les suivantes, soient inférieures en valeur absolue à un nombre arbitraire donné. On se demande alors : "Qu'est-ce que cela signifie dans le formalisme quantique ? Qu'est-ce que Newton essayait d'expliquer ?" On se demande ce que cela signifie, dans le cadre quantique, pour une variable. On constate que cela correspond exactement à ce que l'on appelle des opérateurs compacts. Un opérateur compact est un opérateur dont les valeurs caractéristiques peuvent être ordonnées de telle sorte que... et miracle ! Les opérateurs compacts, lorsqu'on les additionne, restent compacts, comme il se doit pour une variable infinitésimale. De même, lorsqu'on les multiplie par un opérateur borné, le résultat reste compact. Voilà une idée intéressante, et ainsi de suite. Donc, si vous voulez, nous pouvons maintenant approfondir le formalisme et découvrir que les variables infinitésimales correspondent à des opérateurs compacts. Mais nous découvrons aussi une autre chose remarquable : alors que, normalement, en calcul différentiel et intégral, il faut savoir que dx est un infinitésimal d'ordre un, son carré est un infinitésimal d'ordre deux, etc., c'est exactement ce qui se passe dans le formalisme quantique, car on peut observer ce qu'on appelle les valeurs caractéristiques des opérateurs compacts. Étonnamment, grâce à un ancien résultat de Dixmier, que j'ai découvert lors d'un déjeuner avec lui à l'IEHS il y a longtemps, et qui constituait un contre-exemple (Dixmier l'avait construit dès les années 50), il s'avère que ce résultat remplace l'intégrale.

Il existe de nombreux ouvrages, notamment ceux de Sukochev et Zanin, qui traitent de ce sujet. Ces intégrales, en un sens, permettent d'appréhender le monde classique en utilisant les divergences, pour éliminer tous les phénomènes quantiques non pertinents du point de vue classique. Voici donc l'image qui se dégage : en filtrant tous ces détails quantiques, on observe le monde classique. Voici donc la bonne façon de concevoir, si vous voulez, la limite classique. Il n'y a pas de h tendant vers 0, ni rien de ce genre. C'est tout. On peut donc poursuivre et faire le lien avec Riemann.

Car, après tout, l'essence de la géométrie réside dans la leçon inaugurale que Riemann a donnée il y a longtemps. Et dans cette leçon, Riemann était non seulement incroyablement clairvoyant, mais aussi incroyablement prudent. Il était presque prophétique.

En effet, ce qu'il a écrit, c'est que, lorsqu'on aborde la géométrie, le point qui le préoccupait était le suivant : nous fondons nos notions géométriques sur la notion de rayon lumineux, ou sur la notion de corps solide, etc. Ce qu'il disait, c'est que nous ne pouvons absolument pas être sûrs que, lorsqu'on observe l'infiniment petit, ces notions de géométrie soient les bonnes.

La raison en est que les notions de rayon lumineux et de corps solide n'ont plus de sens à l'échelle microscopique. Il en concluait que, de fait, les notions géométriques, le fondement même de ces notions, ne devraient pas provenir des forces qui s'exercent sur elles. Or, nous verrons qu'avec le formalisme de la géométrie non-commutative, c'est précisément le cas : la relation métrique, c'est-à-dire l'élément de longueur, que nous allons maintenant examiner, incarne exactement les forces de la nature.

Ainsi, en quelque sorte, c'est précisément la géométrie, son incarnation à travers l'élément de longueur, qui est aussi l'incarnation des forces de la nature. Voyons cela plus en détail.

Alors, que se passe-t-il ? Eh bien, si l'on considère le paradigme riemannien, qui repose, si vous voulez, sur quoi ? Sur le carré de l'élément de longueur. On n'obtient donc pas directement l'élément de longueur, mais son carré.

Et la prescription riemannienne, si vous voulez, consiste à écrire le carré de l'élément de longueur sous la forme $\mu dx \mu dy$, une forme quadratique. D'accord. Et ensuite, on peut calculer.

D'accord, on peut calculer à grande échelle. Bien sûr, la pensée de Riemann à l'époque était fortement influencée par Gauss, car Gauss effectuait des mesures. Et donc, voici ce qui se passe. Et je suis désolé de répéter cette histoire à ceux qui l'ont déjà entendue maintes fois, mais je la trouve tellement amusante que je ne résiste jamais à la tentation de la raconter. Alors, voici l'histoire : en France, avant la Révolution, il y avait autant d'unités de longueur que de villes.

Par exemple, si vous vendiez du papier toilette, en arrivant dans une ville, vous deviez prendre l'unité de longueur de cette ville et faire le tour pour vendre votre papier toilette. Forcément, il a fallu un jour unifier le système. Et il y avait des gens extrêmement brillants à cette époque, comme Laplace, Lagrange, etc.

Ils ont donc discuté ensemble. Et ils ont constaté que la seule bonne solution, c'est-à-dire la plus universelle, pour définir une unité de longueur était de prendre la circonférence de la Terre et d'en prendre un quarante millionième. Alors ils se sont dit : “Bon, qui va faire le tour de la Terre ?” Personne.

Mais il est très simple de calculer un angle à l’aide des étoiles, puis d’en déduire la proportion correspondante de la circonférence terrestre. Ils ont donc calculé l’angle formé par la distance entre Barcelone en Espagne et Dunkerque en France, une distance suffisamment grande pour que toute erreur de mesure soit imperceptible. Ok.

Des personnes ont alors mis en place un système de triangulation pour mesurer cet angle et en déduire la proportion correspondante. C’était passionnant, sauf qu’en Espagne, ils disposaient de télescopes.

Ils effectuaient donc des triangulations au sommet des montagnes. Or, la guerre faisait rage avec l’Espagne. Il leur était très difficile d’expliquer aux Espagnols qu’ils n’étaient pas des espions.

Voilà ce qui s’est passé. Ils ont ensuite compilé leurs résultats.

Puis ils ont fabriqué une barre de platine qu’ils ont déposée près de Paris. Quand j’étais à l’école, on apprenait que le mètre avait été déposé à Paris, au Pavillon de Breteuil. D’accord, très bien.

Bien, sauf qu’il s’est passé quelque chose, qui est assez révélateur, c’est que vers 1925, un type est arrivé à une conférence sur le système métrique et a dit : “Vous savez, il y a un problème avec votre unité de longueur.

- Ah bon ?

- Oui, parce que votre unité de longueur change de longueur.”

Alors ils ont dit : “D’accord, comment pouvez-vous le savoir ?” Et le type était intelligent. Et il a dit : “Eh bien, vous savez, j’ai mesuré votre unité de longueur en la comparant à la longueur d’onde du krypton pour une certaine transition du krypton.” Et en fait, ça change.

Comment peut-on appeler ça une unité de longueur ? Alors, à partir de là, il a fallu la changer. Et ils l’ont changée. C’étaient des gens intelligents, bien sûr.

Finalement, ils sont passés au krypton en 1967. Ce qu’ils ont fait était évident. L’unité de longueur n’était pas adaptée.

Prenons maintenant ce qui nous a permis d’affirmer son instabilité : la longueur d’onde du krypton. Puis, ils ont trouvé bien mieux, car il s’avère qu’en physique, il existe ce qu’on appelle une transition hyperfine. Qu’est-ce qu’une transition hyperfine ? C’est une transition entre deux niveaux atomiques extrêmement proches. Et comme ils sont extrêmement proches, la différence de fréquence est très faible.

Et la longueur d’onde correspondante est très grande. En fait, c’est une longueur d’onde micro-onde.

Vous pouvez donc maintenant acheter en magasin un instrument qui vous permet de mesurer des distances avec 10 décimales grâce à cette quasi-unité, d'accord ? Mais voyez-vous, qu'est-ce qu'une transition ? La transition est très proche de ce qui se passe en géométrie non-commutative. Car, concrètement, on remplace la mesure des longueurs par le calcul d'une géodésique entre deux points, selon une définition spectrale. Et c'est ce que nous faisons maintenant, d'accord ? Donc, ce que nous faisons maintenant, c'est que, dans le paradigme spectral, nous remplaçons la mesure de la distance entre deux points par le chemin allant de A à B et en prenant le plus court sur lequel vous intégrez la racine carrée de $d\mu\nu dx\mu dx\nu$ et c'est remplacé par l'envoi d'une onde de A à B, en bornant la fréquence de cette onde. Comment ? On utilise ici l'opérateur de Dirac.

On exploite donc le fait qu'il existe un opérateur, qui jouera un rôle central désormais, permettant de mesurer le gradient d'une fonction : le commutateur. Ce commutateur, appliqué à la fonction, est donné par la multiplication de la fonction sous la forme clé par son gradient.

La norme de cet opérateur est donc la norme lipschitzienne de la fonction, car elle est la norme maximale de son gradient. C'est ce qu'on appelle le dual de Kantorovich de la formule usuelle. Son principal avantage est de ne plus supposer que l'espace est connexe par arcs. C'est une hypothèse très forte que de supposer que votre espace est connexe par arcs, car cela signifie que vous ne pouvez même pas considérer un espace discret ou quoi que ce soit de ce genre.

Bien, avec ce formalisme, que je vais expliquer plus en détail, voici comment procéder : vous remplacez l'élément de longueur de Riemann, qui est donné par son carré, par...

vous le remplacez par... vous avez déjà extrait la racine carrée. Vous avez donc extrait la racine carrée de ds^2. Et cette extraction de la racine carrée est due à Clifford, Dirac et Hamilton, qui ont réussi à extraire la racine carrée du laplacien.

Deuxièmement, vous avez cette formule pour la distance, comme je l'ai dit. Bien, et il y a beaucoup d'autres choses que nous verrons plus tard. Mais l'élément de longueur n'est plus donné par son carré, si vous voulez.

On a extrait la racine carrée. Et je veux dire, vous savez, par exemple, l'ordinateur n'aime pas du tout les racines carrées. Il est donc très important d'avoir extrait la racine carrée.

Lorsqu'on extrait la racine carrée, il y a un choix, bien sûr. Et ce choix correspond précisément à la structure de spin sur la variété correspondante. Voilà où nous en sommes. Et maintenant, il y a une chose immédiate pour les physiciens, qui, malheureusement, ne semble pas avoir été prise en compte. Je ne l'ai donc probablement pas mentionnée.

Je devrais l'expliquer, d'accord ? Alors, voici ce qu'il en est. Maintenant que l'élément de longueur est l'inverse de l'opérateur de Dirac, ces physiciens lui ont donné un nom : le propagateur de fermions.

Et ils en ont une représentation graphique. Cette représentation consiste à prendre un diagramme de Feynman et à tracer une ligne droite entre deux points. Ces deux points sont très proches.

Il faut les considérer comme extrêmement proches, d'accord ? Mais il y a là une beauté. Quelle est-elle ? C'est que lorsqu'on étudie la théorie quantique des champs, on découvre que le propagateur de Dirac peut être "habillé". Il est "habillé" par les corrections quantiques.

Et qu'entend-on par "habillé" par les corrections quantiques ? Cela signifie que cet opérateur, qui est l'inverse de l'opérateur de Dirac, subit en fait des transformations, appelées "habillage", et qui sont données par une série formelle de puissances de la constante de Planck, d'accord ? Et qu'est-ce que cela signifie ? Cela signifie que si l'on considère le formalisme de la géométrie non-commutative, on a toujours un espace géométrique. Mais cette géométrie devient plus subtile, car elle est "habillée" par la théorie quantique des champs, d'accord ? Déjà à ce niveau, le formalisme est bien plus apte à s'adapter aux corrections quantiques, au monde quantique, qu'il ne l'était auparavant. Et ce, pour l'espace ordinaire. À ce stade, nous n'avons donc découvert aucun nouvel espace.

Nous avons simplement compris beaucoup plus finement ce qu'est, si vous voulez, la métrique, ce qu'est, si vous voulez, l'élément de longueur de l'espace. En tenant compte de cette correction quantique, etc. Alors, que s'est-il passé ? Grâce à de nombreux travaux, menés pendant de nombreuses années, en fait, depuis 1996 avec Ali Chamseddine. . .. En réalité, je devrais vous raconter la véritable histoire, car sinon, ce n'est pas exact.

En d'autres termes, pourquoi la géométrie non-commutative aurait-elle un lien avec la physique ? La voici. La véritable histoire, c'est qu'en 1986, je m'amusais à calculer une action qui ressemblait à l'action de Yang-Mills, etc. Et puis un jour, je me suis dit : pourquoi ne pas essayer ? Dans cette algèbre, on a l'habitude de compacter un espace en ajoutant une unité.

Alors, je me suis dit : pourquoi ne pas ajouter une unité à $\mathbb{R}^4$? J'ai donc ajouté une unité à $\mathbb{R}^4$. J'ai calculé l'action. Elle était vraiment bien.

Ensuite, je me suis dit : pourquoi ne pas ajouter une autre couche, c'est-à-dire traverser l'espace par un espace à deux points ? Là, ça a du sens, car on a ce D, qui peut prendre en compte un espace discret ? Alors je me suis dit : que se passe-t-il si je calcule l'action, la fonction d'action, pour un espace comme celui-ci ? Je ne suis pas fou. J'ai choisi cet espace pour une raison précise.

Et cette raison est la suivante : j'avais en tête que l'espace que j'examinais avait deux faces. Une face vers le haut et une face vers le bas. Quand on considère un tel espace, vous savez, que se passe-t-il ? C'est le produit d'un espace ordinaire par un espace à deux points, l'un vers le haut et l'autre vers le bas. Ce qui se passe, c'est que si vous prenez un espace comme celui-ci, vous pouvez définir une fonction sur cet espace. Vous pouvez dériver la fonction au niveau supérieur. Vous obtiendrez ce que les physiciens appellent une théorie de jauge, comme un chromatisme. Vous pouvez dériver la fonction au niveau inférieur. Évidemment, ces deux théories sont covariantes par rapport au groupe de rotation, donc elles ont un spin égal à 1. Ce sont des théories de spin 1, de forme différentielle, d'accord ? Mais on peut aussi faire autre chose.

En fait, on peut prendre la différence finale de la fonction sur la couche supérieure par rapport à la couche inférieure, d'accord ? Évidemment, en faisant cela, elle ne changera pas lors de la rotation, donc le spin sera de 0, d'accord ? J'ai donc calculé l'action. J'ai obtenu une fonctionnelle d'action très élégante, quartique dans le corps que j'obtenais ainsi. Puis j'ai consulté des ouvrages, et j'ai constaté que j'avais le mauvais signe.

Alors je me suis dit : “Tant pis. C'est un calcul mathématique, mais ça n'a aucune signification physique.” J'ai consulté un autre ouvrage, même erreur de signe.

Bon, j'étais un peu déçu. Et puis, quelques mois plus tard, j'ai consulté un troisième ouvrage. Et le troisième livre portait le bon signe.

Et je me suis rendu compte que dans les deux livres, l'un avait copié sur l'autre. OK, alors j'étais pleinement rassuré, vous savez ? Et c'est la véritable origine, dans le sens où ce qui se passe, si vous voulez, c'est que vous pouvez immédiatement en déduire que ce que vous obtenez en effectuant ce calcul est, en fait, le champ de Brout, Englert et Higgs, d'accord ? Je veux dire, qui a été découvert indépendamment. Il y a deux articles tout à fait indépendants, l'un de Higgs et l'autre de Brout et Englert.

Et donc, je veux dire, vous trouvez ce champ. Et vous trouvez ce champ de manière tout à fait naturelle, comme provenant, si vous voulez, d'une structure fine de l'espace ou de l'espace-temps, comme vous voulez, d'accord ? Et du fait qu'il a cette composante légèrement plus complexe, qu'il est le produit de cet espace à deux points, d'accord ? Maintenant, après un certain temps, d'accord, vous savez, nous avons beaucoup travaillé là-dessus. Pendant de nombreuses années, nous avons donc travaillé sur ce sujet, etc.

Mais avec Ali Chamseddine, cela s'est produit dix ans plus tard. Nous avons découvert que l'action d'Einstein, couplée à la matière (c'est-à-dire à tous les éléments incroyablement complexes du modèle standard, comme le V moins A de Feynman et Gell-Mann, le mécanisme de Brout-Englert-Higgs, le mécanisme seesaw, etc.), se réduit en fait à la gravité pure dans un espace-temps légèrement plus raffiné qu'une variété ordinaire. Ce raffinement est double.

D'une part, comme je l'ai montré, il y a ces deux aspects, et d'autre part, elle est légèrement non-commutative. Par “légèrement non-commutative”, j'entends une non-commutativité très faible. C'est comme si vous vouliez une tensorisation par matrices, d'accord ? Maintenant, pourquoi devrait-elle être légèrement non-commutative du point de vue de la physique ? Eh bien, si vous y réfléchissez un peu, vous constaterez que c'est tout à fait évident.

Pourquoi ? Parce que les physiciens travaillent, grâce à Young et Mills, avec des théories de jauge, des théories de jauge non abéliennes. Et vous pouvez vous demander : qu'est-ce que cela signifie, au niveau algébrique, de travailler avec une théorie de jauge non abélienne ? Eh bien, nous utilisons la théorie de jauge en permanence. Nous la maîtrisons.

Que savons-nous en théorie de jauge ? Vous savez que l'étude de l'algèbre des fonctions ne suffit pas. Il faut considérer les matrices de fonctions, d'accord ? Or, lorsque vous étudiez les matrices de fonctions, si vous réfléchissez un peu, vous constaterez que les automorphismes de ces matrices sont de deux types. Vous avez les automorphismes intérieurs, d'accord ? Que sont les automorphismes intérieurs ? Ce sont essentiellement des applications de la variété vers le groupe, qui est SU_n, si vous préférez, d'accord ? C'est donc comme une théorie de jauge du groupe SU_n, d'accord ? Et puis vous avez les difféomorphismes, d'accord ? Mais c'est exactement ce que vous avez en physique, car lorsque vous prenez le modèle standard couplé à la gravité, vous avez un groupe d'invariants, qui n'est évidemment pas uniquement constitué de difféomorphismes.

Vous avez également ce qu'on appelle les transformations de jauge de seconde espèce, qui sont des applications de la variété vers le groupe de jauge, d'accord ? Et c'est un produit semi-direct des deux. Voilà ce que vous obtenez. Vous l'obtenez gratuitement, simplement en remplaçant l'algèbre des fonctions par des matrices, d'accord ? Donc, ce qui s'est passé ensuite, c'est que nous avons dû faire deux choses.

Il nous a fallu trouver l'algèbre correcte pour décrire la physique de l'espace-temps, et le bon substitut pour l'action d'Einstein. C'est ce que je veux expliquer maintenant, d'accord ? Je ne sais pas trop ce que je fais avec le temps. Je me débrouille plutôt bien, je crois.

Oui, je peux donc ralentir un peu, d'accord ? Bon, pendant longtemps, pour obtenir l'algèbre, nous sommes partis du résultat physique, d'accord ? Et nous avons essayé de la construire un peu à la main. C'était donc une méthode ascendante. Donc, si vous voulez, partons de la physique, en regardant ce qu'ils ont…

Par exemple, on peut dire qu'ils ont des matrices $3\times\ 3$ ou $2\times\ 2$. On peut partir de là. Mais bien sûr, si vous faites ça, beaucoup vous diront que c'est pour imiter la physique.

Mais pourquoi faire ça d'un point de vue purement mathématique ? C'est ce que je vais expliquer en premier. Ensuite, j'expliquerai ce qu'est l'action. Comme nous le verrons, l'action est particulièrement élégante car elle est purement spectrale. L'action dépend donc uniquement de l'élément de longueur de manière purement spectrale, en termes d'invariance, c'est-à-dire la somme absolue des invariances, c'est-à-dire l'invariance sous tout espace linéaire unitaire, voyons cela. Donc, la première chose que nous essayons de comprendre, car beaucoup se demandent si la science n'est pas justifiée par son utilité, c'est ridicule et contre-productif.

Je pense que nous faisons de la science parce que nous voulons comprendre. Et quand on veut comprendre, il n'y a pas de place pour l'amalgame. Voyez-vous, si vous résolvez les algèbres à la main, vous ne comprenez pas ce que vous faites.

C'est évident. Vous pouvez vous contenter de dire : "J'ai reproduit le modèle standard, etc."

Mais vous ne comprenez pas vraiment ce qui se passe. Alors, pour comprendre, il faut faire mieux. Et pour expliquer la solution, je vais vous expliquer un point fondamental concernant la non-commutativité. C'est probablement le plus important.

Le message que je veux vous transmettre est le suivant. C'est un message qui pourrait vous faire croire que ceux qui s'intéressent aux opérations non-commutatives sont un peu fous, car la géométrie algébrique est déjà suffisamment complexe, vous savez ? En géométrie algébrique, on utilise des variables commutatives, etc. Alors pourquoi ? Quel intérêt y aurait-il à passer au monde non-commutatif ? La raison est la suivante.

La raison est que, en réalité, nous connaissons tous très bien ce phénomène. Voyez-vous, si je vous donne, par exemple, deux mots : “listen” et “silent”.

Je prétends que ces deux mots sont commutativement identiques. Car, si vous permutez leurs lettres, ils sont exactement les mêmes. Ils sont identiques. Et il y a un jeu que nous connaissons tous.

C’est le Scrabble. Au Scrabble, on utilise un paquet de lettres. Donc, vous jouez, vous partez, on vous donne un système commutatif, d’accord ? Et assembler ce paquet de lettres pour former un mot qui a du sens, c’est le jeu du Scrabble, d’accord ? Ce que je veux dire, c’est qu’il faut bien comprendre que la transition du système commutatif au système non-commutatif est précisément ce qui se passe au Scrabble.

Et l’avantage est considérable. Pourquoi ? Parce que le contenu informationnel est considérablement plus important dans un système non-commutatif que dans un système commutatif. Il est considérablement plus important.

Parce que, précisément, on n’autorise pas l’identification des lettres muettes et audibles, d’accord ? Et cela s’explique mathématiquement pour la raison suivante. Voilà comment cela s’est passé mathématiquement. Voyez-vous, il s’est avéré que, là où je travaillais avec Giovanni [1], dans une situation non-commutative, par exemple, si je veux décrire la sphère à deux dimensions, on peut la décrire par trois coordonnées, d’accord ? Mais on peut aussi la décrire d’une manière complètement différente. On peut la décrire comme étant une matrice 2×2, on ne va pas décrire les fonctions de l’algèbre commutative ordinaire de la sphère.

Je vais décrire les algèbres des fonctions à valeurs matricielles de la sphère à deux dimensions. Et il s’avère que cette algèbre, qui est non-commutative, est beaucoup plus simple à décrire que l’algèbre commutative. Pourquoi ? Parce qu’il s’agit d’un produit libre de matrices 2×2 par un élément de ponctuation γ, qui satisfait à la condition $\gamma^2 = 1$. Je passe sur les détails, mais bon.

Ce que je veux dire, c’est que, si je cherche une formulation économique des fonctions, il est bien plus efficace de rester dans le paradigme non-commutatif et de ne pas utiliser les fonctions algébriques classiques, mais plutôt une variante, comme des matrices 2×2. Ah, mais il faudrait alors appliquer la notion d’espace-temps.

Dans ce cas, il faudrait trouver pourquoi il est beaucoup plus simple d’exprimer les fonctions sur l’espace-temps telles qu’elles sont définies dans le modèle standard plutôt que par une algèbre commutative. Et cela a pris du temps. Beaucoup de temps, beaucoup de travail. Et la raison abstraite, je vais maintenant aborder un point un peu technique, mais la raison abstraite de l’émergence de cette idée, c’est que, si vous voulez, la K-théorie, la K-homologie, leurs appariements, etc., ont joué

1. Giovanni Landi.

un rôle fondamental en géométrie non-commutative.

Et en particulier, la classe fondamentale en K-homologie, donnée par l'opérateur de Dirac. Mais pendant longtemps, on ne comprenait bien que cela. Et ce que nous avons compris, c'est qu'il fallait aussi définir les coordonnées d'une manière bien plus précise.

Vous savez très bien que, si je veux parler, par exemple, de quatre nombres, il est bien plus simple de les considérer comme un quaternion. Si je veux parler de deux nombres réels, il est bien plus simple de les considérer comme un nombre complexe, d'accord ? C'est donc la même idée.

Et en fait, cette idée est incarnée par les algèbres de Clifford. Et cela se manifeste par ce que l'on appelle la barre oblique de Feynman. Nous avons donc découvert qu'en réalité, si l'on tente de quantifier non seulement la classe fondamentale de K-homologie, à savoir par l'opérateur de Dirac, mais aussi la classe fondamentale de la K-théorie, alors on trouve une solution.

Car on constate qu'il faut un peu de non-calculabilité. Et cette non-calculabilité nécessaire, on la découvre en consultant le tableau des algèbres de Clifford : elle correspond à deux algèbres de Clifford, données ici par une matrice 2×2 de quaternions et une matrice 4×4 de nombres complexes. Et puis il y a un théorème très important qui montre qu'avec cette procédure, on peut décrire les quatre variétés de spin de la même manière que je décrivais la sphère à deux dimensions avec des matrices 2×2.

Mais c'est un résultat très important, que nous avons obtenu avec Chamseddine et Mukhanov. Une fois qu'on a ça, on commence à se dire : "Je crois que je comprends. Je crois que je comprends pourquoi nous avons toutes ces théories de jauge dans le modèle standard, pourquoi cette non-commutativité intervient."

En fait, la nature veut nous communiquer les choses d'une manière beaucoup plus efficace qu'en nous disant qu'il existe une variété à quatre dimensions, ce serait absurde. Non, la nature nous dit que nous avons des mots.

Et ces mots sont écrits en termes de Clifford et en termes de ponctuation. Voilà. Voilà votre algèbre.

Vous avez l'opérateur de Dirac correspondant. Vous avez l'appariement entre les deux. Et lorsqu'ils sont appariés, il existe une équation correspondante, qui est l'équation de Heisenberg d'ordre supérieur.

Cette équation de Heisenberg d'ordre supérieur, si vous le souhaitez, requiert l'explication suivante. Voyez-vous, une fois que Heisenberg a fait cette découverte des relations de commutation, etc., et de plus, Wigner a découvert qu'il existait une bonne description des particules grâce aux représentations irréductibles du groupe de Poincaré. Ensuite, il y a eu, bien sûr, un développement considérable.

Dans ce cours, je vais parler de l'équation de Heisenberg, et cette équation de Heisenberg, si vous le souhaitez, requiert l'explication suivante. Vous voyez, une fois que Heisenberg a découvert les relations de commutation, et ainsi de suite, et que Wigner a découvert qu'il existait une bonne description des particules grâce aux représentations irréductibles du groupe de Poincaré, il y a eu, bien sûr, un développement considérable des représentations de dimension infinie des groupes de Lie. Donc, évidemment, nous en sommes toujours au même stade, avec l'espace de Hilbert, etc.

Nous ne changeons pas de stade. Mais, bon, si on fait cela, on est limité aux groupes de Lie, et on n'obtiendra jamais les quatre variétés, qui sont des variétés de spins, ni rien de ce genre. La différence ici, c'est que nous ne parlons pas de groupes, mais d'algèbres, engendrées par des préceptes très simples.

Et alors, on obtient une variabilité suffisante. C'est ce qui est vraiment surprenant. Vous disposez d'une variabilité suffisante, lorsque vous considérez cette équation de Heisenberg d'ordre supérieur, avec les variables d et z, pour englober, si vous le souhaitez, toutes les géométries possibles à quatre dimensions munies d'une métrique, et etc.

Et il existe maintenant de nombreux résultats, non, des résultats très importants, qui utilisent différentes métriques, plusieurs résultats, etc., qui montrent que lorsque l'on a ces relations de commutation de Heisenberg, ces relations de Heisenberg d'ordre supérieur, alors l'action spectrale, sur laquelle je vais conclure mon exposé, possède la propriété étonnante d'être quantifiée, au sens où le volume de la variété est automatiquement quantifié. Et puisque le volume est quantifié, le problème de la constante cosmologique disparaît. En effet, le volume étant quantifié, on ne peut pas le faire varier de manière continue.

On n'a donc plus ce problème de la constante cosmologique. Bien, j'en viens maintenant à l'action.

Quelle est donc l'action physique ? C'est bien d'avoir compris quelles sont les variables géométriques, mais qu'est-ce que l'action ? Qu'est-ce que l'action physique ? Donc, ce que nous avons découvert en 1996 avec Ali Chamseddine, c'est qu'il existe une action très naturelle. Cette action est une action spectrale. Et elle s'obtient comme suit : ce que vous recherchez, c'est un invariant spectral de l'élément de longueur. Que souhaitez-vous que cet invariant spectral possède ? Que si vous prenez deux espaces et que vous prenez leur union disjointe, l'invariant agisse.

C'est la seule condition requise. Et on peut démontrer que le seul invariant possédant cette propriété est la trace d'une fonction de d^2 sur λ^2. En calculant le développement asymptotique de cette trace, on retrouve la gravité, le phénomène de Higgs, le potentiel propre quartique de Higgs et l'action de Yang-Mills avec toutes les propriétés mentionnées précédemment.

Bon, voilà ce que vous obtenez en calculant. Le calcul est très complexe, bien sûr, mais voilà le résultat.

Mais vous vous dites peut-être qu'une critique subsiste. Eh bien, j'approche de la fin. Voici la critique : comment choisir une fonction f ? Existe-t-il un meilleur choix que la fonction f ? Masoud [2] a également travaillé sur ce point, notamment dans le cas des bosons, mais avec Chamseddine et van Suijlekom, nous avons découvert qu'il existe en fait un choix unique pour la fonction f. Ce

2. Masoud Khalkhali.

choix unique provient du fait qu'un cas particulier de cette action spectrale découle de l'entropie des fermions. Autrement dit, on utilise à nouveau KMS, et bien d'autres choses que je ne détaillerai pas ici. Mais ce qui se passe, c'est que lorsqu'on considère l'entropie des fermions au niveau des champs quantiques, c'est-à-dire les fermions de seconde quantification, qu'on examine ce qu'implique l'opérateur de Dirac (les fermions étant le paramètre des homomorphismes), qu'on considère les états KMS et qu'on calcule l'entropie de von Neumann correspondante, on obtient une fonction unique.

Cette fonction d'entropie des fermions a la forme suivante ; c'est une fonction de troncature, une fonction très spécifique. Mais ce qui nous a surpris lors de la rédaction de cet article avec Chamseddine et van Suijlekom, c'est que cette fonction est en fait liée à la fonction zêta de Riemann. Nous sommes donc extrêmement surpris, car lorsque nous avons calculé la dilatation thermique en utilisant cette fonction comme fonction de test spécifique pour l'action spectrale, nous avons constaté que le coefficient de T en A dans la dilatation thermique est donné par cette formule, où Ψ est la fonction Ψ de Riemann, qui est, si vous voulez, la restriction de la fonction zêta (ζ) de Riemann complète à la droite critique et où elle prend une certaine valeur.

Voilà donc ce que nous avons trouvé, et je vais m'arrêter là. Cela signifie que lorsque vous calculez les coefficients de dilatation thermique, vous constatez qu'ils sont donnés par des valeurs de données pour les entiers impairs, et vous découvrez quelque chose d'assez étonnant : il existe en fait une dualité entre ce qui se passe à basse énergie dans le cas des dimensions impaires et ce qui se passe à haute énergie dans le cas des dimensions paires. Il y a donc des caractéristiques très intéressantes qui apparaissent, et cela me servira en quelque sorte de transition vers ma deuxième conférence (sur trois).

Dans cette deuxième conférence, je décrirai le travail mené en collaboration avec Katia Consani, au cours duquel, si vous le souhaitez, j'expliquerai à nouveau l'origine du lien entre la géométrie non-commutative et la fonction zêta de Riemann. Encore une fois, il ne s'agira jamais d'une démarche du type “j'ai décidé de travailler sur la fonction zêta de Riemann”. Ce serait absurde. Ce que j'expliquerai est, là encore, le fruit du hasard. En effet, on découvre souvent des choses qu'on n'écrirait jamais dans une proposition (de travail à venir), car les mathématiques intéressantes émergent général par hasard, et elles ne correspondent souvent pas du tout ce que l'on s'attendait à trouver.

Je pense que je vais donc m'arrêter là. Merci beaucoup.