Transcription d'une conférence d'Alain Connes "von Neumann et les anneaux d'opérateurs" à l'occasion du 120^{ieme} anniversaire de la naissance de von Neumann à l'Institut de Recherches mathématiques Alfréd Rényi (15 septembre 2023)

Le maître de cérémonie : Bonjour Mesdames et Messieurs. Bienvenue dans le grand amphithéâtre de l'Institut de mathématiques Alfréd Rényi, ici à Budapest. Je souhaite la bienvenue à toutes les personnes présentes dans cette salle de conférence, ainsi qu'à celles qui suivent cette brève conférence organisée à l'occasion du 120e anniversaire de la naissance de John von Neumann.

Hier, nous nous sommes retrouvés à l'Académie des sciences, où nous avons assisté à de nombreuses conférences couvrant un large éventail d'activités menées par John von Neumann, de la théorie des jeux à l'informatique. Mais aujourd'hui, nous nous concentrerons sur les mathématiques. En effet, les mathématiques constituaient la principale activité de John von Neumann.

Et même dans tout autre domaine, qu'il s'agisse de physique, d'économie ou de problèmes militaires, les mathématiques étaient toujours au cœur de sa réflexion. C'est ce que nous célébrons aujourd'hui : les travaux de John von Neumann, l'impact de ses résultats et leur influence durable en mathématiques. Quatre conférenciers de renom aborderont les résultats novateurs de John von Neumann et, bien sûr, les développements ultérieurs dans ces domaines, notamment les algèbres d'opérateurs, la théorie ergodique et la théorie des ensembles.

La première conférence sera donc donnée à distance via zoom par le professeur Alain Connes. Le professeur Connes est reconnu pour ses contributions fondamentales à l'étude des algèbres d'opérateurs. Il est également le fondateur de la géométrie non-commutative.

Il a été professeur au Collège de France, à l'Institut des Hautes Études Scientifiques, à l'Université d'État de l'Ohio et à l'Université Vanderbilt. Il a reçu la médaille Fields en 1982.

Il fut conférencier invité au Congrès international des mathématiciens en 1974 et en 1986, et également conférencier plénier au CIM en 1978 avant de recevoir la médaille Fields.

Le titre de sa conférence aujourd'hui est "von Neumann et les anneaux d'opérateurs". Professeur Connes, je vous invite à commencer votre présentation. Merci.

Alain Connes : Merci, j'espère que vous m'entendez bien. Ce que je vais vous expliquer, c'est que, suite à la découverte de la mécanique matricielle par Heisenberg en 1925, von Neumann a développé deux théories mathématiques extrêmement importantes.

La première est le formalisme de l'espace de Hilbert en mécanique quantique, qui a eu des conséquences considérables.

Le second point concerne les anneaux d'opérateurs. Je vais donc vous expliquer ces contributions fondamentales, ainsi que leur impact après leur découverte, car il est essentiel pour la recherche

Référence de la vidéo : https://video.renyi.hu/video/von-neumann-and-rings-of-operators-685.

Transcription en LaTeX et traduction : Denise Vella-Chemla (assistée d'outils google, et turboscribe).

mathématique, et leurs conséquences très fructueuses.

Donc, si vous voulez savoir, voici le plan de mon exposé. Je commencerai par expliquer les anneaux d'opérateurs. Ensuite, j'exposerai la découverte de ce fait incroyable : les facteurs de type III possèdent un temps intrinsèque, autrement dit, une sorte d'évolution temporelle prédestinée.

Ensuite, j'expliquerai la classification des facteurs. Puis, si vous voulez, nous aborderons l'un des fruits de cette découverte de von Neumann l'existence de nombreux espaces.

Ce sont des espaces très délicats, que l'on appelle espaces non commutatifs. Par exemple, l'espace des feuilles ou des foliations, qui appartiennent à une géométrie nouvelle.

Et la différence, si vous voulez, entre cette nouvelle géométrie et la géométrie ordinaire, c'est précisément que la géométrie ordinaire est statique, tandis que la nouvelle géométrie possède une sorte de temps intrinsèque intégré. Nous verrons les conséquences de cette nouvelle théorie, mais d'une manière ou d'une autre, elle aura des répercussions. Von Neumann a écrit un article intitulé "Mathématiques" dans lequel il explique de nombreux aspects des relations entre les mathématiques, la physique et d'autres domaines.

Et il explique, si vous voulez, qu'en mathématiques, il y a effectivement deux découvertes essentielles la géométrie et le calcul infinitésimal. Et c'est assez remarquable que les conséquences de ses travaux soient, si vous voulez, la nouvelle géométrie, qui est la géométrie non commutative, et le nouveau calcul infinitésimal, qui est le calcul quantifié. Permettez-moi donc de vous montrer d'abord une photo de von Neumann lorsqu'il était à l'Institut de Princeton.

Et je veux dire, c'est lorsqu'il était à l'Institut de Princeton, avec son collègue doctorant Francis Murray, qu'il a posé la question suivante et qu'ils ont travaillé dessus. Il s'agit d'une question de factorisation. Il y a donc ce terme de *facteurs*, vous savez, qui est très important dans les algèbres d'opérateurs.

Le terme "facteur" provient du fait que si l'on considère un espace de Hilbert et que celui-ci se factorise en un produit tensoriel ($H = H \times H$), alors on obtient un candidat naturel pour la description d'un sous-système d'un système quantique. von Neumann et Murray sont partis, en quelque sorte, de la question de ce qui se produit lorsqu'on examine les algèbres d'observables correspondant à une telle factorisation.

Et ce que vous découvrez, c'est que l'algèbre des opérateurs appartenant à l'espace de Hilbert H et l'algèbre des opérateurs appartenant à l'espace de Hilbert H satisfont à certaines règles algébriques, d'accord ? Et je veux dire, si vous voulez, dans leur article, ils ont écrit les règles correspondantes, qui sont bien sûr des règles concernant les anneaux M_1 et M_2.

En fait, ils précisent que cela est suggéré par la mécanique quantique, à savoir qu'il faut considérer les quantités observables qui se manifestent dans le système mécanique. On considère deux sous-systèmes, σ et a, et on examine, si on le souhaite, les propriétés des observables correspondant à a et à σ.

Au départ, Murray et von Neumann s'attendaient à démontrer que, dans le cas général, la solution serait donnée. par une factorisation de l'espace de Hilbert, c'est-à-dire que l'espace de Hilbert se décomposerait en un produit tensoriel. Le fait le plus surprenant fut que, lors de leurs travaux, ils découvrirent, comme indiqué ici, que cela n'était pas vrai. Ils découvrirent alors ce qu'ils appelèrent initialement des anneaux exceptionnels, qui, en quelque sorte, possèdent toutes les propriétés algébriques requises pour une telle factorisation, mais qui ne proviennent pas d'une factorisation de l'espace de Hilbert.

Ils sont donc allés beaucoup plus loin dans plusieurs articles. Et ce qu'ils ont découvert, c'est qu'il existait en fait trois types de factorisations.

Il existe donc un premier type, appelé type I, qui correspond à la factorisation de l'espace de Hilbert en un produit tensoriel.

Mais deux autres types ont été découverts. Le second, appelé type II, est particulièrement intéressant pour la raison suivante : lorsqu'on considère un espace de Hilbert et qu'on classe ses sous-espaces, ceux-ci sont classés selon leur dimension, qui est un entier pouvant être infini, mais prenant également toutes les valeurs finies.

Or, Murray et von Neumann ont découvert que, dans une factorisation de type II, la classification des sous-espaces correspondants révèle que les dimensions de ces sous-espaces sont réelles. Elles sont donc continues. Et à partir de ces dimensions continues, on peut construire une trace.

Et d'une certaine manière, l'existence de la trace induit une non-commutativité, car la trace du produit de deux opérateurs AB est égale à la trace de BA. De plus, on a découvert d'autres factorisations, dites de type III, définies par le reste.

On les définit donc, si l'on veut, par ce qui n'est pas de type I et ce qui n'est pas de type II. Telle était la situation jusqu'à la fin des années 60, début des années 70. Entre-temps, les physiciens Haag, Huygens et Wienink ont apporté une contribution très importante à la mécanique statistique quantique. Ils ont trouvé un moyen, si l'on veut comprendre la relation entre l'état d'équilibre de Boltzmann, donné par la trace d'une observable multipliée par l'exponentielle de moins βH, et l'évolution de Heisenberg, donnée par la conjugaison par l'exponentielle de itH ????.

C'est pourquoi on appelle cela la condition KMS, en référence à Kubo, Martin et Schwinger. Il s'agit d'une condition abstraite, purement mathématique, qui relie un état d'une algèbre à une évolution temporelle. Et je veux dire, il est intéressant de constater ici la présence d'une constante bêta, qui fait intervenir à la fois la constante de Planck, $\hbar$, la constante de Boltzmann, K, et la température absolue T_0 ????.

C'était donc vers la fin des années 60. Et au début des années 70, Tomita et Takezaki ont obtenu un résultat remarquable qui montrait que, lorsqu'on considère une algèbre fondamentale, celle-ci peut être un facteur. Et si l'on considère un état fidèle et normal de cette algèbre, alors il existe en fait une unique évolution temporelle, dépendant de l'état, caractérisée par la condition KMS, mais pour une constante β égale à un.

C'est donc par là que j'ai commencé à travailler sur le sujet.

Dans ma thèse de 1971-1972, le point de départ est que l'évolution temporelle ne dépend pas du choix de l'état, pourvu qu'on travaille modulo les automorphismes intérieurs. En effet, une algèbre non commutative possède automatiquement certains automorphismes, triviaux en un sens, obtenus par conjugaison à un élément unitaire de l'algèbre. Or, il s'avère que l'évolution temporelle associée à un état ne dépend pas de cet état lorsqu'on travaille modulo les automorphismes intérieurs.

C'est donc un fait remarquable, car il nous apprend que l'algèbre fondamentale en général possède une évolution temporelle canonique, définie par un homomorphisme de la droite réelle vers le groupe des automorphismes extérieurs. Et, précisément, ce résultat est non trivial dans le cas du type III.

Et cela montre que, d'une certaine manière, vouloir une non-commutativité, qui est une notion purement algébrique, implique une évolution temporelle.

Après cela, j'ai effectué une classification des facteurs, présentée dans ma thèse, où j'ai découvert de nouveaux invariants, mais aussi un résultat fondamental : la réduction du type III, totalement mystérieux, au type II, avec automorphismes. Dans ma thèse, j'avais laissé de côté un cas non élucidé, le cas 3 de ma classification, qui fut ensuite résolu par Takezaki.

Les invariants que j'ai définis sont le module, qui est, si vous voulez, l'intersection des spectres des automorphismes modulaires, et un autre invariant très important : les périodes. Autrement dit, ce sont les instants de l'évolution temporelle où rien ne bouge.

Donc, si vous voulez, c'est un sous-groupe de la droite réelle, formé des périodes du facteur, c'est-à-dire du noyau, si vous préférez, de l'évolution temporelle. Après ma thèse, j'ai poursuivi mes recherches et j'ai effectué la classification des facteurs hyperfinis, en 1975-1976. Il restait cependant un cas ouvert : celui du facteur hyperfini à trois facteurs, résolu une dizaine d'années plus tard par Uffe Haagerupb. Après ces travaux, je me souviens être allé à I'IHES. Au déjeuner à la cafétéria, les gens parlaient du complexe de de Rham, de géométrie, etc. J'avais du mal à expliquer ces résultats sur les algèbres d'opérateurs à des mathématiciens principalement préoccupés par la géométrie, les variétés et autres sujets similaires.

Et après un certain temps, j'ai découvert qu'il existait en fait une manière d'expliquer les facteurs, etc., et de montrer, si vous voulez, la profondeur de la théorie de von Neumann. Cette manière découlait du fait qu'un feuilletage engendre automatiquement et naturellement, canoniquement, une algèbre d'opérateurs, un anneau d'opérateurs au sens de von Neumann. Ainsi, un feuilletage est quelque chose de très simple à expliquer, mais d'assez profond, même au niveau de la théorie des ensembles. En un mot : lorsqu'on considère un feuilletage, comme celui que je montre sur le tore, où l'on a une ligne sinueuse de pente irrationnelle, alors ce qui se passe, c'est que lorsqu'on regarde l'espace des feuilles de ce feuilletage, il n'est pas possible, voyez-vous, de trouver des fonctions intéressantes sur cet espace de feuilles. La raison en est, eh bien, on pourrait dire que c'est la théorie ergodique, mais ce n'est pas vraiment le cas, dans le sens où, vous savez, en théorie ergodique, il faut une paramétrisation des orbites, mais pour un feuilletage, il n'y a pas de paramétrisation.

Ce que vous avez, c'est simplement que si vous voulez la relation qui vous indique que deux points appartiennent à la même feuille, cela vous permet de définir l'espace des feuilles. Mais comme je l'ai dit, il est impossible de trouver des fonctions à valeurs réelles sur cet espace à cause de l'ergodicité. Cependant, il est possible de trouver des fonctions à valeurs opérateurs, et ce que vous faites, c'est simplement qu'il s'avère que les opérateurs, qui sont définis en donnant un opérateur pour chaque feuille de l'espace L^2, dans l'espace des fonctions de carré intégrable sur la feuille, et lorsque vous considérez ces opérateurs, il s'avère qu'ils forment une algèbre car vous pouvez les multiplier point par point, et vous pouvez les additionner point par point, et bien sûr, je veux dire, vous pouvez aussi dire que la famille est négligeable si elle est nulle presque partout.

Il existe de nombreux opérateurs de ce type, contrairement aux fonctions à valeurs réelles. Ils forment une algèbre fondamentale associée canoniquement au feuilletage, et de plus, si vous voulez, les feuilletages les plus simples illustrent les algèbres d'opérateurs les plus profondes, c'est-à-dire les plus complexes. Par exemple, le feuilletage du tore que je vous ai montré illustre le facteur hyperfini de type II.

Lorsqu'on considère le feuilletage, donné par ce qu'on appelle, si l'on veut, le feuilletage d'Anosov sur le fibré sphérique d'une surface de Riemann, on obtient le facteur hyperfini de type III. Or, le fait qui a motivé la suite est que, lorsqu'on considère un feuilletage, l'algèbre de von Neumann associée décrit essentiellement une théorie de la mesure de l'espace des vues. Et la raison en est la suivante : la raison est que, lorsqu'on considère les algèbres de von Neumann commutatives, un résultat ancien de von Neumann établit leur correspondance exacte avec la théorie de la mesure ordinaire. Plus précisément, une algèbre de von Neumann commutative est l'espace des fonctions L sur un espace mesuré ordinaire. Ainsi, lorsqu'on examine les feuilletages, et notamment les algèbres de von Neumann qui en découlent, il apparaît clairement que, du fait de l'origine, si l'on veut, de la géométrie différentielle du feuilletage, il existe une structure bien plus complexe que la simple théorie de la mesure.

Il s'avère, si vous voulez, que si la théorie de la mesure correspond à l'algèbre de von Neumann, il existe une théorie mathématique très inspirée de cette dernière : la théorie des algèbres C^*, qui encode la topologie de l'espace des feuilles. En fait, la question posée dès le départ par l'exemple des feuilletages était de comprendre la géométrie et le calcul sous-jacents. Pourquoi ce calcul ? Parce qu'il existe désormais le cadre, fourni par von Neumann, du formalisme de la mécanique quantique.

Il s'avère que ce formalisme de la mécanique quantique nous permettra de définir un nouveau calcul, parfaitement adapté à la manipulation de ces espaces non commutatifs. J'en reviens donc, si vous voulez, à cette seconde contribution de von Neumann : le formalisme de la mécanique quantique. Ce formalisme présente un avantage considérable par rapport au formalisme classique, très simple à expliquer si l'on considère la formulation classique des variables réelles et que l'on demande à un mathématicien ce qu'est une variable réelle, la réponse la plus courante sera qu'une variable réelle est définie par un ensemble X et une application de X sur la droite réelle.

Cependant, en y réfléchissant un instant, vous constaterez que ce formalisme ne permet pas la coexistence de variables discrètes et continues. La raison est extrêmement simple : si X comporte une variable continue, alors la cardinalité de X doit être le continuum, au moins.

Une variable discrète ne peut alors exister, car elle devrait prendre une infinité de fois la même valeur. Ce problème est résolu grâce au formalisme de la mécanique quantique, élaboré par John von Neumann. Voici pourquoi.

La raison est que, dans ce formalisme, une variable réelle n'est pas définie par une application d'un ensemble vers la droite réelle, mais par un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert. Du fait de l'unicité de l'espace de Hilbert à base dénombrable, on peut le décrire soit à l'aide de fonctions L^2, par exemple sur le cercle ou la droite, soit de manière discrète à l'aide de suites de carré intégrable. Comme ces espaces de Hilbert sont identiques, une variable continue peut coexister. Dans le cas de variables discrètes, les valeurs possibles de cette variable sont données par le spectre de l'opérateur correspondant, et la variable discrète peut, par exemple, provenir de la multiplication par n sur l'espace des suites.

Et bien sûr, les opérations algébriques correspondent à l'algèbre des opérateurs. Un fait très important est que la coexistence du discret et du continu est impossible dans la formulation classique précisément parce qu'ils ne commutent pas dans le formalisme quantique. S'ils commutaient, il y aurait une contradiction.

Bien sûr, tout cela est motivé par la variabilité quantique. Le formalisme de von Neumann pour la mécanique quantique incarne pleinement cette variabilité en encodant, dans un même formalisme, le discret et le continu. Et, comme vous le savez, la variabilité quantique est un phénomène extrêmement profond.

Par exemple, des ingénieurs suisses ont fabriqué un générateur de nombres quantiques qu'on peut intégrer à un téléphone portable. Cela démontre, en quelque sorte, que cette variabilité quantique, due au principe d'incertitude d'Heisenberg, est fondamentale. Or, il s'avère que ce formalisme permet d'approfondir la notion d'infinitésimal, telle que Newton la décrivait dans un problème donné, il faut d'abord définir ce qu'est une variable.

Une variable est donc une quantité qui prend une infinité de valeurs, lesquelles sont précisément déterminées par le problème et ordonnées selon un ordre défini. Newton définit également ce qu'est un infinitésimal. Or, l'essentiel est que, pour Newton, un infinitésimal n'est pas simplement un nombre, c'est une variable.

Il affirme donc qu'une variable est dite infinitésimale si, parmi ses valeurs particulières, il en existe une telle que cette valeur, ainsi que toutes celles qui la suivent, soient inférieures en valeur absolue à un nombre arbitraire donné. Or, le fait remarquable est que, dans le formalisme des variables fourni par von Neumann pour la mécanique quantique, les variables infinitésimales trouvent précisément leur place.

Ce qui est surprenant, si l'on peut dire, dans ce système quantique, c'est qu'il offre un cadre naturel aux variables infinitésimales et à ce qu'elles sont, ce que les mathématiciens appellent un opérateur compact.

Et l'opérateur compact est défini exactement en prenant, si vous voulez, mot pour mot, la définition de Newton, en la transcrivant pour des opérateurs. Et l'on constate que ces variables infinitésimales possèdent toutes les propriétés requises. Elles forment donc un idéal.

L'addition de deux de ces opérateurs reste égale à un, et ainsi de suite. Ils possèdent d'autres propriétés. Ce sont donc les opérateurs compacts dans l'espace inverse.

Mais leur autre propriété est l'infinitésimalité.

L'addition de deux de ces opérateurs reste égale à un, et ainsi de suite. Ils possèdent d'autres propriétés. Ce sont donc les opérateurs compacts dans l'espace inverse.

Mais une autre propriété des infinitésimaux est qu'ils possèdent un ordre. Un infinitésimal est donc d'ordre α. Cela signifie que les valeurs caractéristiques de l'opérateur ont un côté, la norme, qui est n puissance moins $-alpha$.

Lorsqu'on considère la n-ième valeur caractéristique, c'est-à-dire que ces valeurs sont discrètes, elles forment une suite discrète et sont organisées exactement comme l'a indiqué Newton, c'est-à-dire par ordre décroissant. On obtient alors la notion d'infinitésimal d'ordre α.

Elles satisfont toutes les propriétés requises : le produit d'ordre a par l'ordre β est égal à $\alpha + \beta$, et ainsi de suite. Enfin, il existe un substitut pour l'intégrale, donné par le coefficient de la divergence logarithmique de la trace de l'opérateur.

En fait, l'effet principal de cette intégrale est qu'elle efface, si vous voulez, toutes les fluctuations quantiques. Lorsqu'on intègre, on obtient une représentation classique d'un phénomène quantique. Au fil du temps, il est apparu que toutes les intégrales existantes, issues notamment de la théorie de la mesure, sont en réalité des cas particuliers de cette intégrale définie par la théorie des opérateurs dans un espace de Hilbert.

De plus, et c'est très intéressant, c'est que seule cette formulation permet au signe de l'intégrale d'être indépendant de l'infinitésimal intégré. Normalement, en théorie de la mesure, on écrit l'intégrale de $u(x)$, et c'est un tout. Autrement dit, on a l'intégrale avec la mesure.

Mais ici, le symbole de l'intégrale et celui de l'infinitésimal sont indépendants l'un de l'autre. Or, si l'on s'intéresse à l'influence des idées de von Neumann sur la géométrie, il faut savoir qu'elles ont convergé avec celles de Riemann. Car, bien sûr, Riemann ne pouvait imaginer à son époque l'avènement de la mécanique quantique.

Mais il a en réalité pris un soin extrême, dans son cours sur la géométrie, dans sa formulation même de la géométrie, à laisser précisément la place, si l'on veut, à des modifications ultérieures. Et je veux dire, il a écrit, dans sa leçon inaugurale sur la géométrie, que soit la réalité qui sous-tend l'espace doit être discrète, soit nous devons chercher le fondement de ses relations métriques en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent sur lui. Et donc, ce que je vais expliquer maintenant, si vous voulez, c'est que, précisément, en utilisant le formalisme de la mécanique quantique, le formalisme créé par von Neumann, permet d'aller beaucoup plus loin et d'adapter le paradigme riemannien à la situation non commutative, et, grâce à cela, d'explorer beaucoup plus en profondeur ce qui se passe dans l'espace-temps et en physique.

La manière dont ces phénomènes se produisent est très étroitement liée à ce qui s'est passé en physique avec l'élément de longueur. Dans le paradigme riemannien, on mesure une longueur en prenant le chemin le plus court reliant deux points. Ainsi, en quelque sorte, la distance entre deux points est définie par la minimisation de cette longueur.

Cela correspond à ce qui se faisait, si l'on veut, lorsque l'on a tenté d'unifier le système métrique pendant la Révolution française, c'est-à-dire à la fin du XVIIIe siècle. On cherchait alors à unifier l'unité de longueur, car à cette époque en France, il existait de nombreuses définitions différentes et incompatibles. Concrètement, on a donc établi et tenté de mesurer la distance entre Dunkerque et Barcelone.

C'était une entreprise de grande envergure. Au final, ils ont créé une unité de longueur : une barre de platine en béton, appelée mètre, déposée près de Paris, et considérée comme l'unité de base des mesures. Et maintenant ?

Et ce sera la transition, si vous voulez, vers le quantique.

Pendant longtemps, cette unité de longueur a quasiment servi de définition aux distances. Mais vers 1920, on a découvert que la longueur de cette unité n'était en réalité pas constante. Comment ? Grâce à la mesure d'une barre de platine, effectuée à l'aide des longueurs d'onde du crypton, je crois.

Or, on a constaté que cette longueur était en réalité variable. Il était donc évident que la définition de l'unité de longueur ainsi définie n'était pas adéquate. Progressivement, elle fut remplacée par une définition basée sur les spectres.

Et, je veux dire, ce changement s'est produit en plusieurs étapes. Il y en a eu une en 1967 et une autre en 1984. Et ce qui a été constaté, c'est que la définition la plus pratique est celle d'une séparation hyperfine dans le spectre du césium.

Ainsi, ce qui se produit, c'est qu'il existe une séparation très fine qui, lorsqu'on examine les longueurs d'onde correspondantes (l'inverse de la différence de fréquence), donne une longueur d'onde de l'ordre de 3,26 centimètres. Grâce à cette définition, on peut disposer d'un instrument portable capable de mesurer des longueurs avec une précision de neuf décimales. En d'autres termes, la définition en termes de longueur minimale, et donc de ds et de la racine carrée de ds^2, est remplacée par une définition spectrale.

Et c'est précisément le changement qui se produit en géométrie non commutative. Ce changement comporte deux aspects. Le premier est la racine carrée.

Vous vous souvenez que lorsque je vous ai montré la définition de la longueur en termes de géométrie riemannienne, il y avait une racine carrée de ds^2, à savoir une racine carrée de $g_{\mu\nu}u\ dx\mu\ dx\nu$. Or, en travaillant dans le cadre des opérateurs, grâce à Paul Dirac, on peut extraire la racine carrée du laplacien. Et en fait, cela établit un lien direct avec le formalisme quantique : l'élément de longueur devient alors le propagateur des fermions.

La distance entre deux points n'est pas définie en mesurant le chemin le plus court entre A et B, mais en propageant une onde de A à B dont la fréquence est contrôlée. Cette fréquence est contrôlée par le commutateur de l'opérateur de Dirac. Ainsi, dans le cas de la géométrie riemannienne, l'inverse de l'opérateur de Dirac de cette géométrie, appliqué à l'élément de longueur, donne exactement la même distance que celle obtenue par la méthode de la longueur minimale.

Il s'agit d'une dualité de Kantorovich de la formule usuelle. Mais la nouvelle formule, si vous voulez, puisqu'elle ne présuppose pas que l'espace considéré soit connexe, vous offre une bien plus grande liberté pour comprendre, voire évaluer, la géométrie à l'échelle de l'espace-temps infinitésimal..

Et donc, si vous voulez, il existe un dictionnaire, le dictionnaire qui vous permet de passer de la vision classique à la vision quantique.

Néanmoins, je parle bien sûr du formalisme de von Neumann, si vous préférez, de la mécanique quantique. Ainsi, par exemple, l'élément de longueur, défini dans le paradigme riemannien par le carré de l'élément de longueur (donné localement par $g_{\mu\nu}\ dx\mu\ dx\nu$), est remplacé par un opérateur. Cet opérateur est appelé propagateur par les physiciens.

Je vais vous montrer l'image dans une seconde. Et avec cet opérateur, vous avez, bien sûr, un opérateur dans l'espace de Hilbert. Autrement dit, ce qui remplace l'espace lui-même, c'est l'algèbre des fonctions sur cet espace.

Et lorsqu'on utilise cette algèbre de fonctions pour mesurer les distances, on obtient, dans le cas riemannien, le même résultat qu'auparavant. Mais cette fois, bien sûr, l'algèbre peut être non calculable. Et elle peut être beaucoup plus libre, si on le souhaite, i.e. libérée des hypothèses préalables concernant la connexité, etc., que dans le cas précédent.

Le volume, par exemple, est calculé à l'aide de l'intégrale, c'est-à-dire comme la puissance de la force de l'élément de longueur. Or, cet élément de longueur a une signification physique : il représente, en quelque sorte, le propagateur des fermions, un concept que les physiciens utilisent dans les diagrammes de Feynman. Concrètement, ils le visualisent comme un segment de droite infinitésimal reliant deux points, par exemple dans une réaction nucléaire.

Il faut donc se représenter mentalement un segment extrêmement fin entre deux points. Or, l'un des premiers faits étonnants est que, dans le cadre de la théorie quantique des champs, le propagateur du fermion est "habillé". Autrement dit, sa valeur classique n'est plus remplacée par une sorte de série formelle en puissances de la constante de Planck $\hbar$.

Et maintenant, puisque c'est ce propagateur qui vous donne la géométrie, cela signifie que même au niveau de la théorie quantique des champs, où l'on ne tient pas compte de la gravité, la géométrie est déjà modifiée et corrigée par la mécanique quantique. J'espère que vous comprenez maintenant comment von Neumann a créé cette nouvelle voie, cette nouvelle étape dans laquelle les mathématiques s'inscrivent grâce à la mécanique quantique et qui change complètement notre façon de penser, même en géométrie et en calcul différentiel et intégral.

Dans nos travaux avec Chamseddine et van Suijlekom, ainsi qu'avec Slava Mukhanov, nous avons appliqué ce principe à la physique, et plus précisément à l'espace-temps. Dans le cadre euclidien, nous effectuons une rotation faible pour obtenir un temps imaginaire. Nous exprimons ensuite le lagrangien complexe donné par la gravité couplée au modèle standard. Or, Riemann affirmait explicitement que la géométrie de l'espace-temps devait être comprise à partir des forces qui lient les points entre eux.

Et notre connaissance de ces forces a évolué lentement depuis l'époque de Newton, etc. Le meilleur modèle que nous connaissions actuellement est ce qu'on appelle le modèle standard. C'est une formule très complexe qui décrit le fonctionnement du modèle standard.

Et elle recèle de nombreuses subtilités. Elle comprend, si vous voulez, ce qu'on appelle le mécanisme de Higgs, le mécanisme de seesaw, le V moins A, et ainsi de suite. Or, il s'avère que tous ces mécanismes très complexes, y compris le mécanisme de Higgs, admettent une interprétation purement géométrique, ou plutôt une interprétation, dans un cadre non computationnel.

Et ce qui se passe alors, c'est que l'on découvre que ce lagrangien extrêmement complexe et élaboré se révèle être la gravité pure sur l'espace-temps géométrique, qui est légèrement plus complexe que le continuum quadridimensionnel. Je terminerai donc mon exposé en expliquant un peu plus ce point, car, pendant longtemps, si vous voulez, nous obtenions l'algèbre, disons l'algèbre elle-même, en sachant qu'elle devait être non calculable en raison des théories de jauge non abéliennes non calculables en physique. Mais pendant longtemps, nous l'avons calculée manuellement.

En fait, nous étions motivés, si vous voulez, par l'interaction forte, l'interaction faible, etc. Et nous avons introduit manuellement cette part de non-calculabilité en rendant l'algèbre légèrement non-calculable. Je dois dire, dès le départ, que lorsqu'on remplace l'algèbre des fonctions, qui est commutative, par des matrices de fonctions $n \times n$, on obtient précisément le groupe d'automorphismes adéquat, qui mêle le groupe de gravité, c'est-à-dire les difféomorphismes, aux transformations de jauge de seconde espèce, qui sont les automorphismes internes de cette algèbre.

Mais il s'est avéré qu'aux alentours de 2014, avec Slava Mukhanov et Ali Chamseddine, nous avons découvert une méthode pour accéder à l'algèbre, et elle repose sur un fait très simple qui, en quelque sorte, résume pourquoi la non-commutativité est si cruciale pour le développement de la géométrie. Et la raison est la suivante : nous sommes, en réalité, habitués à la non-commutativité.

Nous y sommes très habitués, et c'est grâce à la langue. Nous y sommes habitués parce que nous avons une langue écrite, et nous savons très bien que si nous prenons, par exemple, le mot “lemon” en anglais (pour citron) et le mot “melon”, si on les considère de manière commutative, ils sont identiques. Ils ont les mêmes lettres.

Et si vous voulez, le passage du système commutatif au système non commutatif correspond exactement à ce que vous faites lorsque vous jouez au Scrabble. Le système commutatif représente un ensemble de lettres, et le système non commutatif, les mots. Or, il s'avère que les mots ont un contenu bien plus riche, comme vous pouvez l'imaginer, que leur équivalent commutatif.

Il s'avère que, grâce à cette idée, on peut représenter toutes les variétés de spin 4 à l'aide, si on le souhaite, d'un symbole de ponctuation et d'une très légère dose de non-commutativité. Cette dernière est fournie par l'algèbre constituée de matrices M_2 de quaternions et de matrices 4×4, qui apparaissent naturellement comme des algèbres de Clifford. Or, il s'avère que l'apparition de ces algèbres était liée à un problème mathématique abstrait, initialement sans rapport avec la physique, et qui a permis de définir ces deux algèbres de Clifford. Enfin, il s'avère que, lorsqu'on utilise l'approche de la géométrie non-commutative et qu'on calcule l'action correspondante, on obtient l'action attendue.

Comment obtient-on cette action ? Eh bien, il s'agit d'une action spectrale, c'est-à-dire, si vous préférez, d'une action calculée à partir de l'élément de longueur en supposant son invariance spectrale. Je voudrais donc conclure ainsi et vous montrer brièvement - sans entrer dans les détails un diagramme illustrant le développement des idées de von Neumann concernant le rôle de la mécanique quantique, le rôle des anneaux d'opérateurs, etc. L'un des résultats de ces travaux est la géométrie non-commutative, les espaces non-commutatifs. Dans le diagramme final que je vous présente, je montre, si vous voulez, toutes les interactions entre les différents domaines des mathématiques, notamment la topologie, la K-homologie, la K-théorie, la géométrie différentielle et la théorie des topos.

Je vais donc conclure mon intervention ici, et j'espère vous avoir convaincu de son impact considérable.

Le maître de cérémonie : Merci beaucoup, Professeur Connes, pour cette présentation très claire et agréable sur ce sujet si complexe. Y a-t-il des questions dans le public ? Il semble qu'il n'y ait pas de questions. Merci encore pour cette agréable conversation.

Alain Connes : Merci à vous.

Le maître de cérémonie : Merci de vous être joint à nous.