

ANALYSE FONCTIONNELLE. *États presque périodiques sur une algèbre de von Neumann*. Note¹ de M. ALAIN CONNES, transmise par M. Gaston Julia.

Dans I nous répondons à une question de M. Takesaki en montrant la continuité de la dépendance entre l'état normal fidèle φ et le groupe d'automorphismes modulaires σ_i^φ . Dans II et IV (th. 11), nous relierons la propriété L_λ de Powers et l'invariant S de². Dans III nous répondons à une question de E. J. Woods³ en montrant que la classification des facteurs *non hyperfinis* de type III n'est pas standard. Dans IV, nous introduisons et étudions les états normaux fidèles dont le groupe d'automorphismes modulaires σ_i^φ est fortement presque périodique.

Dans toute cette Note, M désigne une algèbre de von Neumann dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ où elle admet un vecteur séparateur et totalisateur. M_* désigne le prédual de M , muni de la topologie normique, $\mathfrak{F}$ désigne l'ensemble des états normaux fidèles muni de la topologie induite.

Pour $\varphi \in \mathfrak{F}$, σ_i^φ désigne le groupe d'automorphismes modulaires correspondant⁴. Pour $\varphi \in \mathfrak{F}$, on choisit un élément ξ_φ de $\mathfrak{H}$, totalisateur pour M , tel que $\varphi(x) = \langle x\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle$ pour tout x de M , et l'on note $\Delta\varphi$ l'opérateur modulaire correspondant.

I. PERTURBATION DES AUTOMORPHISMES MODULAIRES.

THÉORÈME 1. (a) $\mathfrak{F}$ est un G_δ dans M_* . [cf. ⁵].

(b) Quand $\psi \rightarrow \varphi \in \mathfrak{F}$, pour tout $x \in M$, et tout $t \in R$, on a $\sigma_i^{\psi(x)} \rightarrow \sigma_i^\varphi(x)$ fortement; la convergence est uniforme en t , pour $|t| \leq t_0$.

L'estimé principal est le suivant :

LEMME 2. Si la mesure spectrale de $\Delta\varphi$ sur $x\xi_\varphi$ est portée par l'intervalle $[\gamma^{-1}, \gamma]$, $\gamma \geq 2$ et si

$$\|\psi - \varphi\| \leq 4^{-40} \gamma^{-20} (\text{Log } \gamma)^{-30},$$

on a

$$|\psi(\sigma_i^\psi(x)x^*) - \varphi(\sigma_i^\varphi(x)x^*)| \leq 36(1 + 4t^2)^{1/2} \|x\|^2 \|\psi - \varphi\|^{1/10}.$$

II. LA PROPRIÉTÉ L_λ DE POWERS ET L'INVARIANT S.

THÉORÈME 3. Soit λ , $0 < \lambda < 1/2$; si M vérifie la propriété L_λ de Powers, on a

$$\frac{\lambda}{1 - \lambda} \in S(M) = \bigcap \text{Spectre } \Delta\varphi, \quad \varphi \in \mathfrak{F}.$$

1. Séance du 24 avril 1972.

2. A. CONNES, *Comptes rendus*, 274, série A, 1972, p. 175.

3. E. J. WOODS, *The classification of factors is not smooth* (preprint).

4. M. TAKESAKI, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Springer, Berlin, Lecture notes in Mathematics n° 128.

5. J. DIXMIER et O. MARÉCHAL, *Vecteurs totalisateurs dans les algèbres de von Neumann*.

La démonstration utilise le lemme plus précis suivant :

LEMME 4. Soit $\lambda, 0 < \lambda < 1/2$; soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in \mathfrak{F}$; soit $u \in M$, $u^2 = 0$, $uu^* + u^*u = 1$ tel que

$$|\lambda\varphi(ux) - (1 - \lambda)\varphi(xu)| \leq \varepsilon\|x\|, \quad \forall x \in M;$$

on a alors

$$|\lambda\varphi(ux) - (1 - \lambda)\varphi(xu)| \leq 15 \varepsilon^{1/2} [\varphi(x^*x + xx^*)]^{1/2}, \quad \forall x \in M.$$

III. INVARIANT T ET CLASSIFICATION DES FACTEURS NON HYPERFINIS DE TYPE III DANS UN ESPACE DE HILBERT SÉPARABLE.

THÉORÈME 5. L'espace borélien des classes d'isomorphisme algébrique des facteurs de type III non hyperfinis dans l'espace de Hilbert séparable n'est pas dénombrablement séparé.

La démonstration s'appuie sur la construction effectuée dans (4) et sur le lemme suivant :

LEMME 6. Soient P un ITPFI, N un facteur fini; on a

$$T(P \otimes N) = T(P) = \left\{ T_0, \exp\left(-\frac{2\pi}{T_0}\right) \in \rho(P) \right\},$$

où T désigne l'invariant défini dans (1).

IV. ÉTATS PRESQUE PÉRIODIQUES SUR UNE ALGÈBRE DE VON NEUMANN.

LEMME 7. Pour $\varphi \in \mathfrak{F}$ les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Pour tout élément x de M l'ensemble $\{\sigma_i^\varphi(x)\xi_\varphi, t \in \mathbb{R}\}$ est normiquement précompact dans $\mathfrak{H}$;
- (b) Pour tout couple (x, y) d'éléments de M la fonction

$$t \rightarrow f(t) = \varphi(\sigma_i^\varphi(x)y)$$

est presque périodique ;

- (c) Il existe une famille E_λ , $\lambda \in R_+^*$ de projecteurs deux à deux orthogonaux de $\mathfrak{H}$ tels que $\Delta_\varphi = \sum \lambda E_\lambda$, $\lambda \in R_+^*$;
- (d) Il existe un groupe commutatif compact K, un homomorphisme fortement continu H de K dans le groupe des automorphismes de M qui laissent φ invariant, un homomorphisme β du dual $\hat{K}$ dans R_+^* tels que $\forall x \in M, \forall y \in M$, en posant pour $g \in K$,

$$f_1(g) = \varphi(H_g(x)y) \quad \text{et} \quad f_2(g) = \varphi(yH_g(x)),$$

on ait Fourier $f_1 =$ Fourier f_2 .

DÉFINITION 8. Soit $\varphi \in \mathfrak{F}$; on dit que φ est presque périodique et on note $\varphi \in \mathfrak{F}_{PP}$ s'il vérifie les conditions équivalentes du lemme 7.

LEMME 9. Si M est un produit tensoriel infini d'algèbres de von Neumann semi-finies de genre dénombrable (et en particulier si M est ITPFI, ou finie), $\mathfrak{F}_{PP}$ est dense dans $\mathfrak{F}$.

THÉORÈME 10. Soit $\varphi \in \mathfrak{F}_{PP}$; pour $\lambda \in R_+^*$, on pose

$$N_\lambda = \{x, x \in M, \sigma_i^\varphi(x) = \lambda^{it}x, \forall t \in \mathbb{R}\}, \quad N = N_\varphi, \quad C = \text{Centre de } N.$$

Pour $x \in M$, on note $\gamma(x)$ le plus petit projecteur γ de C tel que $x\gamma = x$.

1° On a $N' \cap M \subset N$, où N' désigne le commutant de N .

2° (a) Soit $\lambda \in R_+^*$; pour que λ appartienne au spectre ponctuel de Δ_φ , il faut et il suffit que $k(\lambda) \neq 0$, où

$$k(\lambda) = V\gamma(x), \quad x \in N_\lambda;$$

(b) Pour tout $\lambda \in R_+^*$, il existe un isomorphisme unique ω_λ de l'algèbre réduite $C k(\lambda)$ sur $C k(\lambda^{-1})$ tel que pour tout x de N_λ on ait

$$\gamma(x^*) = \omega_\lambda(\gamma(x));$$

(c) Pour tout couple (λ_1, λ_2) d'éléments de R_+^* et tout projecteur q de C tel que $q \leq k(\lambda_1), \omega_{\lambda_1}(q) \leq k(\lambda_2)$, on a

$$q \leq k(\lambda_1, \lambda_2) \quad \text{et} \quad \omega_{\lambda_1\lambda_2}(q) = \omega_{\lambda_2}(\omega_{\lambda_1}(q)).$$

3° Pour que M soit un facteur il faut et il suffit que pour tout couple (q_1, q_2) de projecteurs non nuls de C il existe $\lambda \in R_+^*$ tel que

$$q_1 k(\lambda) \omega_{\lambda^{-1}}(q_2 k(\lambda^{-1})) \neq 0.$$

4° Si M est un facteur, l'algèbre de von Neumann N est soit discrète, soit continue.

Pour tout projecteur non nul e de N , φ_e désigne l'état défini sur l'algèbre réduite M_e par l'égalité $\varphi_e(x) = \varphi(x)/\varphi(e)$.

Pour $\varphi \in \mathfrak{F}_{PP}$, G_φ désigne le sous-ensemble fermé de R_+^* , intersection des spectres des opérateurs modulaires Δ_{φ_e} quand e décrit l'ensemble des projecteurs non nuls de N .

THÉORÈME 11. 1° Soit $\varphi \in \mathfrak{F}_{PP}$ et soit $\lambda \in R_+^*$, $\lambda \neq 1$:

(a) Pour que λ appartienne à G_φ , il faut et il suffit que pour tout projecteur non nul q de C et tout voisinage V de λ il existe un $\mu \in V$, tel que

$$k(\mu) q \omega_{\mu^{-1}}(k(\mu^{-1}) q) \neq 0;$$

(b) G_φ est un sous-groupe multiplicatif fermé de R_+^* ;

(c) Pour que λ appartienne à G_φ , il faut et il suffit que pour tout état ψ commutant avec φ et tout nombre positif ε , il existe un élément u de M tel que

$$u^2 = 0, \quad uu^* + u^*u = 1, \quad |\psi(ux)^\sim - \lambda\psi(xu)| \leq \varepsilon\|x\|, \quad \forall x \in M.$$

2° Soit M un facteur de type III tel que $\mathfrak{F}_{PP}$ soit dense dans $\mathfrak{F}$:

(a) Soit $S(M) = \bigcap \text{Spectre } \Delta\varphi, \quad \varphi \in \mathfrak{F}$ [cf. (1)] ; on a

$$S(M) = \bigcap \text{Spectre } \Delta\varphi, \quad \varphi \in \mathfrak{F}_{PP} = \bigcap G_\varphi, \quad \varphi \in \mathfrak{F}_{PP} ;$$

(b) $S(M)$ est un sous-groupe multiplicatif fermé de R_+^* ;

(c) Pour que M vérifie la propriété L_λ de Powers, il faut et il suffit que $\lambda/(1-\lambda)$ appartienne à $S(M)$ (on suppose $(0 < \lambda < 1/2)$).

COROLLAIRE 12. Soit M un facteur ; soient $\varphi \in \mathfrak{F}$, et $\lambda, 0 < \lambda < 1$ tels que

$$\text{Spectre } \Delta\varphi = \{\lambda^n, n \in \mathbb{Z}\} = S(M) ;$$

alors l'algèbre

$$N = \{x, x \in M, \sigma_t^\varphi(x) = x, \forall t \in R\}$$

est un facteur (fini, continu).

COROLLAIRE 13. Soit M un produit tensoriel infini d'algèbres de von Neumann semi-finies de genre dénombrable ; soit $\lambda, 0 < \lambda < 1/2$; M vérifie la propriété L'_λ d'Araki si (et seulement si) M vérifie la propriété L_λ de Powers.

1, avenue Mathilde,
95-Saint-Gratien,
Val-d'Oise.