Extrait de Triangle de pensées dans lequel il est question (entre autres) du formalisme des matrices de Heisenberg

Alain Connes - Oui, mais il n'empêche que, de ces vérités approchées, se dégageait une vérité profonde. Cette vérité profonde est un "principe expérimental", en l'occurrence le principe de Ritz-Rydberg. Il n'est pas démontré, il est constaté expérimentalement, c'est un bon exemple de savoir. Cette constatation expérimentale, c'est d'abord que la formule qui donne les fréquences des raies spectrales est plus simple que celle qui donne leurs longueurs d'onde. Les raies spectrales sont mieux indexées par l'inverse de la longueur d'onde, c'est-à-dire par la fréquence ; pour les spectres les plus simples, comme celui de l'hydrogène, on obtient une formule assez compliquée avec les longueurs d'onde. En gros, on obtient des nombres qui sont de la forme : un carré divisé par une différence de carrés. Avec les inverses de ces nombres-là, la formule est simple : une différence de carrés. On s'aperçoit ainsi que les bonnes variables sont les fréquences.

Ainsi, la signature d'un corps simple est un ensemble de nombres réels, que l'on appelle son spectre de fréquences et qui permet d'identifier sa présence dans n'importe quel composé. Mais ce spectre S admet une structure remarquable, il est formé de l'ensemble des différences $a - b$ où a et b sont les éléments d'un ensemble plus simple X, formé lui aussi de nombres réels. Cela veut dire que les fréquences sont des différences entre des nombres plus simples, qui sont précisément désignés par des noms propres comme la série de Balmer, la série de Leeman, etc. Il y a donc une structure évidente dans l'ensemble des fréquences observées, mais pas dans l'ensemble des longueurs d'onde observées. L'ensemble des fréquences observées ou spectre est un ensemble de différences. Voilà la première observation expérimentale. Elle ne dépend pas du degré de précision avec lequel les expériences ont été faites : lorsqu'on a refait ces expériences de manière plus précise, ce même principe a continué d'être vérifié. La validité de ce principe ne dépend donc pas de la finesse de l'expérience.

Ce principe sous-jacent est beaucoup plus fructueux et plus important que les valeurs numériques observées.

Ce principe établit que l'alphabet qui permet d'indexer les fréquences du spectre S est formé de couples (α, β) d'éléments d'un même ensemble X. Cet ensemble X, on peut le paramétrer par des lettres grecques, par des nombres, par des couleurs, c'est simplement un ensemble et les fréquences qui apparaissent dans le spectre sont associées à des couples d'éléments de cet ensemble. Si l'on additionne la fréquence associée à un couple(α, β) et la fréquence associée à un couple (β, γ), on obtient une autre fréquence du spectre qui correspond au couple (α, γ) : c'est ce qu'on appelle la "loi de composition de Ritz-Rydberg".

C'est un fait expérimental qui a la merveilleuse propriété de rester vrai quelle que soit la finesse de l'expérimentation. À partir de ce fait, Heisenberg s'est mis à réfléchir en gros de la manière suivante. Prenons d'abord la mécanique classique pour modèle de la physique microscopique : le système que constitue l'atome lui-même est un système mécanique et, en tant que tel, il obéit aux lois ordinaires de la mécanique. On peut le modéliser par un espace de phase et un hamiltonien. L'espace de phase est un espace symplectique, et l'hamiltonien est une fonction sur cet espace qu'on appelle l'"énergie", qui va faire tourner les quantités observables par son crochet de Poisson.

Maintenant, lorsqu'on fait interagir ce système simple avec l'électromagnétisme, on doit utiliser la théorie de Maxwell qui permet de calculer la radiation émise par le système atomique lors de l'interaction avec le champ électromagnétique. Cette radiation est obtenue sous forme de superposition d'ondes planes qui correspondent à une certaine observable qu'on appelle le "moment dipolaire". Ce dernier a des composantes X, Y et Z et, lorsqu'on décompose leur évolution dans le temps en série de Fourier, on obtient les composantes des ondes planes émises par le système.

Si l'on fait ces calculs de mécanique classique, on s'aperçoit que les fréquences émises ont une propriété très importante : elles ne sont pas indexées par des couples (α, β) mais par un groupe commutatif qui est exactement le groupe dual du tore dans lequel les variables d'angles tournent en fonction du temps, l'existence de ce tore découlant de l'intégrabilité du système mécanique.

Quelles sont les prévisions de cette théorie classique ? La première, c'est que les fréquences visibles sont indexées par un groupe, et deuxièmement, que celui-ci apparaît comme un sous-groupe commutatif du groupe des nombres réels. Cela implique qu'étant donné deux fréquences quelconques observées, leur somme doit encore être une fréquence observée, qu'elle va être indexée par la composition des éléments du groupe, et qu'en fait on va retrouver le système dynamique en question en prenant le dual du groupe des fréquences observées.

Marcel Paul Schützenberger - Ce sont des caractères.

A.C. - Exactement, l'algèbre des quantités observables est l'algèbre de convolution du groupe des fréquences observées. Celui-ci nous permet de retrouver le système dynamique, nous en donne le spectre, mais aussi de retrouver l'évolution dans le temps, puisque la manière dont ce groupe s'inscrit dans la droite réelle nous dit comment le système tourne en fonction du temps. Mais ce résultat du formalisme de la mécanique classique est en contradiction flagrante avec les observations expérimentales ! Expérimentalement, ce que l'on constate, c'est le principe de composition de Ritz-Rydberg qui remplace la loi de composition du groupe prévu par la théorie classique.

Ce genre de contradiction entre une théorie (en l'occurrence la mécanique classique couplée à la théorie de Maxwell) et les résultats expérimentaux (en l'occurrence ceux de la spectroscopie) est ce que l'on peut rêver de mieux pour faire progresser la physique.

Qu'a fait Heisenberg ? Il est simplement parti de ce que donnait l'expérience.

Dans le cas classique, on peut reconstruire l'algèbre des quantités physiques observables (on dit plus brièvement des "observables") du système à partir du groupe des fréquences. Il suffit d'exprimer une observable comme la somme de ses composantes de Fourier. Elle apparaît alors simplement comme une fonction sur le groupe des fréquences et le produit de deux observables est le produit de convolution. Peu importe la formule exacte de ce produit, tout ce qui compte, c'est qu'elle n'utilise que la structure de groupe de l'ensemble des fréquences. De la même manière, l'évolution dans le temps de ces observables s'écrit simplement à partir de la valeur numérique des fréquences.

Dans le cas quantique, les fréquences observées sont indexées non par un groupe, mais par l'ensemble des couples (α, β). Heisenberg pose alors en principe qu'il faut remplacer, partout où il apparaît dans la théorie classique, le groupe des fréquences par son avatar quantique, c'est-à-dire l'ensemble des couples (α, β).

Il en résulte immédiatement que les quantités observables sont simplement des tableaux de nombres $x_{(\alpha,\beta)}$ indexés par les couples (α, β). De plus, le produit de deux observables est obtenu très simplement en remplaçant dans la règle de convolution pour un groupe, la loi de groupe par la loi de Ritz-Rydberg. Et l'on obtient une algèbre bien connue des mathématiciens : l'algèbre des matrices.

Heisenberg ne savait pas que cette algèbre était déjà connue des mathématiciens. Il s'est dit : "postulons que nous avons affaire à des quantités observables qui se composent de cette manière, qui s'additionnent en ajoutant les composantes du tableau qui ont les mêmes indices, et faisons évoluer en fonction du temps les observables en utilisant les valeurs numériques des fréquences".

Il a fait des calculs et s'est aperçu que ces objets ne commutent pas entre eux. C'est-à-dire que le produit de x par y ne donne pas la même chose que le produit de y par x, car la règle de composition des matrices n'est pas commutative.

Heisenberg ne savait pas que l'algèbre qu'il utilisait s'appelait l'"algèbre des matrices" et était déjà bien connue des mathématiciens.

Cet exemple m'inspire le commentaire suivant. Lorsque Born et Jordan lui ont dit que ces objets avaient un nom mathématique, qu'il s'agissait de matrices, il n'était alors question que de donner un nom aux objets que Heisenberg manipulait ; mais cette terminologie ouvrait une porte sur tout un domaine des mathématiques qui avait été développé antérieurement et qui recelait énormément d'outils qui, du jour au lendemain, devenaient utilisables. Après cette formulation par Heisenberg de la mécanique des matrices, le pas suivant, crucial et dû à Paul Dirac, consistait à reformuler les équations de Hamilton en remplaçant le crochet de Poisson par le commutateur, notion élémentaire et fondamentale en algèbre non commutative.

Ce qui remplace l'hamiltonien, c'est la matrice diagonale qui rend compte des valeurs numériques des fréquences du système : l'hamiltonien (c'est-à-dire l'énergie) est une des observables, c'est la matrice diagonale avec les valeurs des fréquences sur la diagonale. Une fois que l'on connaît cette énergie, qui est une observable particulière, la manière dont toutes les autres observables évoluent en fonction du temps n'est pas donnée par le crochet de Poisson, mais par un commutateur.

Il suffit d'ajouter que les observables de position et de moment vérifient une certaine règle de commutation, simple traduction de la formule qui donne classiquement leur crochet de Poisson, pour obtenir l'équation de Schrödinger.

Or on rencontre ici un grand danger, celui de retomber dans la formulation traditionnelle de la physique du XIXe siècle, c'est-à-dire en termes d'équations aux dérivées partielles. Et malheureusement, c'est exactement ce qui s'est produit. Ce raccourci a été pris, trop vite à mon gré, un an après, par Schrödinger, et l'on a oublié en grande partie la force et la beauté du message de Heisenberg. On est revenu, avec l'équation Schrödinger, à une équation aux dérivées partielles. On est retombé dans le paradigme de la physique du XIXe siècle.

Un des traits importants de cette découverte de Heisenberg, c'est qu'il s'est laissé guider de manière pragmatique par la réalité expérimentale, en faisant entièrement confiance au principe trouvé expérimentalement, et non pas en essayant de pousser jusqu'au bout le modèle de la mécanique classique. On peut voir en action, dans cet exemple, ce qu'il y a de meilleur dans la physique. À travers une nuée de données expérimentales qui correspondent aux raies spectrales, on arrive à extraire, par l'intuition de l'expérimentateur, un principe dont la validité est indépendante de la précision des expériences. Ce principe, lorsqu'il est pris suffisamment sérieusement, a une portée immense ; il met en cause toute la mécanique classique, par un changement conceptuel majeur, à savoir l'abandon de la commutativité de l'algèbre des quantités physiques observables. Autrement dit, un principe expérimental a eu une implication conceptuelle phénoménale. On voit ainsi à quel point un essai prématuré de formalisation mathématique, celui de Schrödinger, peut être dangereux. Il y avait dans ce point de contact entre physique et mathématiques un enseignement beaucoup plus profond, plus intéressant que les formalisations qui en ont été immédiatement données.

M.P.S. - La renormalisation ?

A.C. - La renormalisation est une théorie merveilleuse mais nous en sommes encore très loin, je n'en suis qu'au début de la mécanique quantique. Je prenais cet exemple de la mécanique des matrices de Heisenberg pour voir où le contact se produit entre mathématiques et physique et essayer de le cerner sous différents points de vue.

M.P.S. - Je voudrais ajouter un fait qui a joué un rôle important. Il me semble que les matrices n'étaient pas très populaires...

A.C. - Les matrices étaient quand même connues et utilisées depuis longtemps par les mathématiciens. Il y avait même déjà l'espace de Hilbert, et son traité fondamental qui l'utilisait dans la théorie des équations intégrales.

Cela me rappelle une anecdote à propos de Schrödinger : un an après la découverte de Heisenberg, lorsque Schrödinger a eu l'idée de son équation, il s'est posé le problème de calculer le spectre de son opérateur. La notion de spectre existait déjà pour les opérateurs. Quand il s'est renseigné auprès des mathématiciens qu'il connaissait, ceux-ci l'ont adressé à Hermann Weyl. Il a répondu : "Surtout pas ! Il ferait le calcul avant moi."

M.P.S. - Mais n'y a-t-il pas quand même quelque chose de plus général, à savoir que les mathématiciens détestent ce qui n'est pas commutatif et que tout prétexte pour éviter le non commutatif est bon pour eux. Tu es d'accord ?

A.C. - Il est clair que ça complique singulièrement les choses. Mais des groupes de Galois à ceux de Lie en passant par les quaternions de Hamilton, le non-commutatif est déjà très présent tout au long du XIXe siècle.

À ce propos, je me souviens d'avoir visité à Dublin un petit musée qui possède un jeu appelé

"Icosian game" inventé par Hamilton et qui exploite ce qu'il appelait "les racines non commutatives de l'unité". Longtemps après avoir découvert les quaternions, il avait trouvé une présentation du groupe fini des symétries de l'icosaèdre régulier, et il en avait conçu un jeu avec 20 cases, autant que de faces de l'icosaèdre, en prolongeant au non-commutatif l'intuition acquise pour un groupe fini de racines de l'unité dans le corps des nombres complexes. Par dualité (figure 2) on peut aussi représenter ce groupe comme le groupe des symétries du dodécaèdre régulier qui a vingt sommets. Hamilton donnait deux générateurs du groupe qu'il notait t et K respectivement de carré et de cube égaux à 1, et la seule relation était que le produit tK est racine cinquième de 1. Bien entendu le groupe obtenu est le groupe A5 des permutations paires d'un ensemble à 5 éléments.

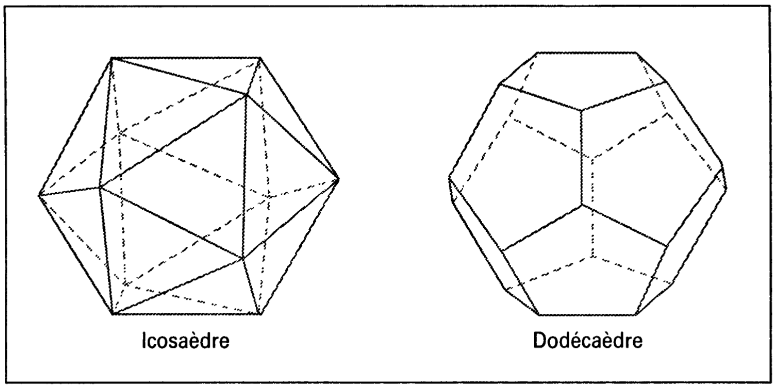

Figure 2

En fait, c'est à l'occasion de ce jeu que le problème des circuits hamiltoniens a été introduit en théorie des graphes, il s'agit de trouver un circuit qui passe par tous les sommets du graphe une fois et une seule (figure 3). Un circuit analogue pour les faces d'un graphe s'appelle un circuit eulérien à cause du fameux problème des sept ponts de Königsberg.

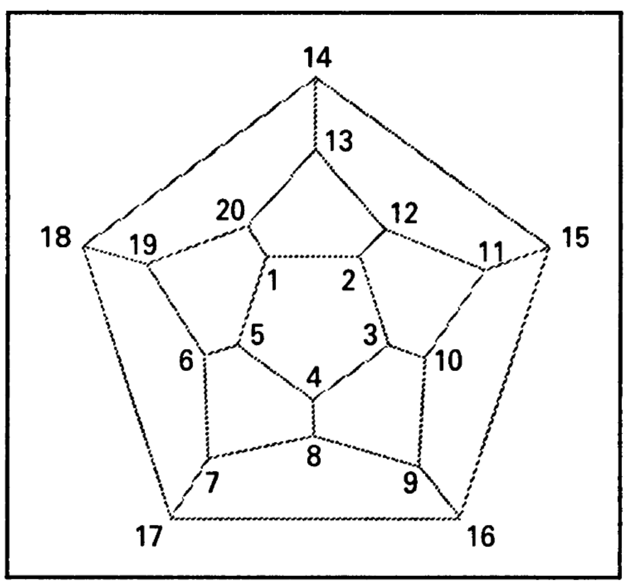

Figure 3

Cette défiance générale par rapport au non-commutatif dont tu parlais, Marco, a sans doute joué un rôle non négligeable dans ce que je considère être un retour en arrière après la découverte de

Heisenberg. Je pense que l'équation de Schrödinger est arrivée trop tôt. Elle est arrivée un an après la découverte de Heisenberg. Avec les équations aux dérivées partielles, on occulte le message de Heisenberg par une interprétation de la mécanique quantique dont s'accommoderait la physique du XIXe siècle. Du coup, il y a eu un retour en arrière.

André Lichnerowicz - Peut-être pas un retour en arrière, mais une mise entre parenthèses...

M.P.S. - J'ai été l'élève de Châtelet, après-guerre. Il faisait un cours libre à la Sorbonne, c'était le seul cours d'algèbre. Châtelet était probablement le seul à savoir manœuvrer des matrices (et je me recommande moi-même comme sachant multiplier les matrices). Sa thèse, qui date probablement des années 1920, portait sur l'utilisation des matrices pour classer les groupes abéliens finis. Des auteurs allemands avaient laissé cette classification plus ou moins inachevée. Comme ma culture autodidacte était plus anglaise que française, j'étais sidéré de lire ce que l'on racontait sur les matrices, malgré les travaux de Jordan.

A.L. - Tu parles de Camille Jordan, mathématicien français, né à Lyon en 1838, mort à Paris en 1922. Mais c'est Pascual Jordan, physicien allemand, né en 1902, qui a révélé à Heisenberg que les êtres qu'il manipulait étaient des matrices, et que les mathématiciens en connaissaient de nombreuses propriétés.

M.P.S. - La forme normale des matrices, due à Camille Jordan, figure dans son cours à l'École polytechnique vers 1905. C'est un résultat essentiel sur les matrices. Tu vois que ce n'est pas tellement ancien. Je me demande si Hermite aurait su calculer le produit de 2 matrices d'ordre 4.

A.L. - Sûrement, Hermite est l'initiateur de la théorie des matrices en France. Il est né en 1822 et mort à Paris en 1901.

M.P.S. - Quand on pense aux matrices, apparaissent des liens entre différents champs de mathématiques. Par exemple toute la théorie des chaînes de Markov finies devient totalement triviale une fois que l'on dit que ce sont des matrices de dimensions finies.

A.C. - Je suis bien d'accord avec toi.

M.P.S. - Il y a un phénomène de diffusion et de temps de latence. Il y a beaucoup de résultats sur les matrices, comme les identités de Bazin, qui sont restées complètement oubliées pendant cent ans, mais les matrices finies n'étaient pas un objet courant pour les mathématiciens.

A.L. - Au début, le produit des matrices s'appelait la “composition des tableaux”.

M.P.S. - Je dois dire que votre livre sur l'algèbre linéaire était un des rares exposés complets disponibles dans ma jeunesse.

A.L. - C'est pour cela que je l'ai fait, parce que la théorie des matrices ne s'enseignait qu'en troisième cycle, par Julia, et tout était fait pour qu'elle paraisse très difficile, alors que maintenant, ses principaux éléments s'enseignent au niveau du baccalauréat.

M.P.S. - Alain, quand tu parlais du principe de Ritz-Rydberg, tu as insisté sur le fait qu'il transcendait les approximations numériques. Ne pourrait-on pas dire que c'est un principe qualitatif ?

A.C. - Je dirais "combinatoire" plutôt que "qualitatif". Pour moi une règle qualitative est une règle qui peut être déformée alors qu'une règle combinatoire gouverne un calcul précis.

À propos des pavages de Penrose (p. 29 et suivantes)

A.C. - [...] En logique, lorsqu'on construit un modèle non standard, par exemple des entiers, ou de la droite réelle, on utilise sans le dire l'axiome du choix. Il est appliqué dans une situation non dénombrable. L'axiome du choix, pour autant qu'il paraisse évident lorsqu'on l'énonce puisqu'il s'agit de choisir un élément dans un ensemble non vide, n'est en fait pas du tout évident dans le domaine du non dénombrable. C'est un axiome qui suppose que, à chaque sous-ensemble non vide d'un ensemble, on peut associer un élément de ce sous-ensemble. Il est très facile de donner des exemples des difficultés que cela entraîne. Un exemple frappant est celui des pavages de Robinson-Penrose [1] (figure 1).

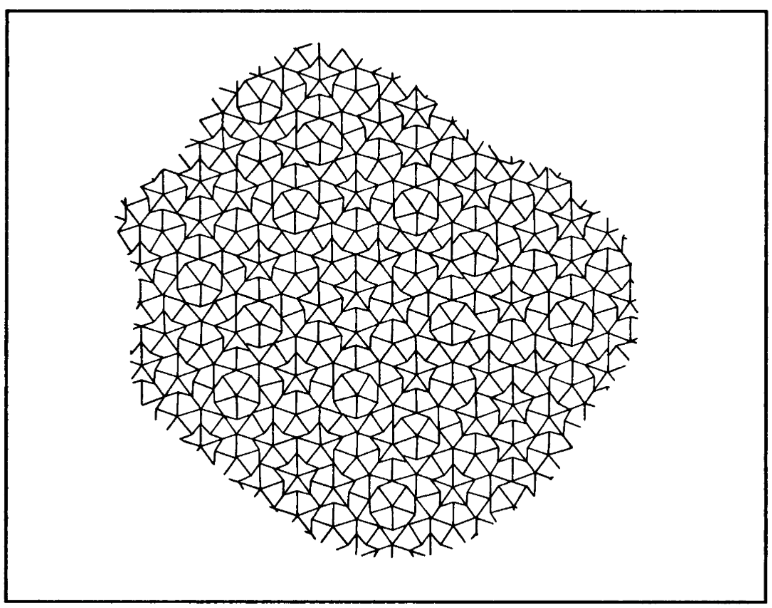

FIGURE 1

Il s'agit de tous les puzzles que l'on obtient dans le plan à l'aide de deux petits motifs qui sont des triangles de formes différentes liées au nombre d'or. On peut paver le plan d'une infinité de manières par ces motifs, d'une infinité de manières qui sont non congruentes, c'est-à-dire non isométriques les unes avec les autres. Or, précisément, il n'est pas possible de nommer dans chaque classe de pavages, à équivalence isométrique près, un pavage et un seul. Le fait est qu'il est impossible de

[1] B. Grünbaum et G.C. Shepard, *Tilings and Patterns*, New York, Freeman, 1989.

choisir dans chaque classe de pavages un représentant et un seul. Cela n'est pas possible, sans précisément utiliser l'axiome du choix non dénombrable, donc ce n'est jamais possible de manière effective.

M.P.S. - C'est superbe, ce que tu dis là. Je n'avais jamais prêté attention au fait que l'axiome du choix dénombrable était différent de l'axiome non dénombrable. Je dois dire que je n'ai rien à faire de l'axiome du choix dans ma vie quotidienne.

A.L. - Bien sûr !

A.C. - L'exemple des pavages de Penrose est typique de la théorie ergodique. Ce qui se produit, en fait, c'est que les isométries sont ergodiques sur l'ensemble des pavages.

A.L. - Sois un peu plus explicite !

A.C. - Une des propriétés surprenantes des pavages de Penrose est la suivante. Pensons à un univers de Penrose, c'est-à-dire à un pavage infini avec ces deux petits motifs, ces deux petits triangles. Deux univers sont différents si on ne peut pas les appliquer l'un sur l'autre par une isométrie. Il y a néanmoins un fait incroyable : quelle que soit la configuration finie dans un univers donné, on va pouvoir la retrouver exactement identique dans tout autre univers. Cela veut dire qu'il est impossible de distinguer un univers de Penrose d'un autre par une portion finie.

M.P.S. - Oui, mais je n'ai pas besoin d'aller si loin.

A.C. - C'est quand même quelque chose d'étonnant car on peut distinguer entre deux nombres réels en allant suffisamment loin dans leur développement décimal. On ne peut pas distinguer deux univers de Penrose à une distance finie. C'est-à-dire que, si l'on dit "je vis près d'un triangle du premier type, ce triangle est entouré de tel ou tel type de triangle", etc., on peut aller aussi loin que l'on veut. On n'arrivera pas à distinguer l'univers de Penrose dans lequel on est d'un autre, parce que dans tout autre il y aura la même configuration quelque part. Et néanmoins, il y a une infinité de tels univers. Eh bien, c'est ce paradoxe-là qui est relié intimement à l'axiome du choix non dénombrable, le fait que l'on ne puisse pas les distinguer par une propriété finie et que néanmoins ils soient distincts.

M.P.S. - Je peux faire ça pour moins cher en formant des mots infinis avec deux lettres.

A.C. - C'est moins cher, certes, mais c'est aussi moins naturel. On peut en discuter. Pour un mathématicien, cela peut paraître plus simple de parler de mots infinis formés de deux lettres ; mais j'avoue que je préfère l'aspect géométrique des pavages car il rend particulièrement naturelle la relation d'équivalence entre les pavages : à savoir l'existence d'une isométrie qui transforme le premier pavage en un autre.

M.P.S. - Dans le cas de mon approche, c'est l'isométrie qui manque.

A.C. - Oui ! sauf si tu remplaces les suites infinies par des pavages unidimensionnels. Ce que je voulais souligner en montrant qu'il est impossible de choisir un élément privilégié dans chaque classe, c'est la relation avec l'axiome du choix. On peut considérer l'ensemble de tous les pavages et les parties de cet ensemble que sont les pavages isométriques entre eux. Selon l'axiome du choix, on peut associer à chaque partie un élément de cette partie. Ici, c'est pratiquement impossible.

M.P.S. - Je comprends maintenant pourquoi tu parles des pavages de Penrose dans ton livre sur la géométrie non commutative. Il y a beaucoup d'isométries ?

A.C. - Oui, mais le point essentiel est de faire comprendre que l'axiome du choix non dénombrable n'est pas évident. Cela, Lebesgue l'avait parfaitement compris mais il s'est heurté à des mathématiciens qui poussaient à l'extrême le point de vue cantorien. Il a discuté avec Hadamard notamment de la possibilité de bien ordonner les nombres réels, ce qui conduit à la même impossibilité qu'avec les pavages de Penrose.

M.P.S. - Redéfinis un "bon ordre" !

A.C. - Un bon ordre ! Les entiers ont cette propriété d'être bien ordonnés : ils ont un ordre naturel qui possède la propriété forte suivante : "tout sous-ensemble non vide a un plus petit élément". Donc quel que soit l'ensemble (non vide) d'entiers que l'on se donne, il existe un élément unique de cet ensemble qui est plus petit que tous les autres. Une autre manière de formuler cette propriété consiste à dire qu'il n'existe aucune suite infinie strictement décroissante d'éléments d'un ensemble bien ordonné. Cette propriété est manifestement fausse pour l'ensemble des nombres réels. Un ensemble bien ordonné définit un nombre ordinal, on note ainsi ω l'ordinal associé à l'ensemble des entiers naturels. Bien que d'apparence innocente, l'arithmétique de ces nombres ordinaux, due à Cantor, est très utile en logique. Elle donne ainsi la clef de la démonstration de la fable du lièvre et de la tortue. On remplace simplement les nombres 2, 3, 4, ... qui servaient de base par l'ordinal ω. Ainsi dans l'exemple $n = 9$ que j'avais pris, on obtient la suite: $\omega^{\omega^{\omega+1}}+1, \omega^{\omega^{\omega+l}}, 3\omega^{\omega^{\omega}}+3\omega^3+3\omega+3, \ldots$. On se convaincra sans peine qu'il s'agit là d'une suite strictement décroissante d'ordinaux ; or par définition d'un bon ordre une telle suite est nécessairement finie, ce qui signifie que la tortue gagne !!!

En réfléchissant à cette démonstration on voit qu'elle implique un nombre ordinal qui est la borne supérieure des $\omega^{\omega^{\cdots}}$. Cet ordinal est noté epsilon ε_0 et il suffit pour démontrer la non-contradiction de l'arithmétique de Peano.

Un ensemble bien ordonné possède une fonction de choix naturelle : à tout sous-ensemble on associe son plus petit élément.

En fait, ce n'est pas très difficile de bien ordonner un ensemble si l'on accepte l'axiome du choix. S'il est dénombrable, il suffit d'épeler ses éléments un à un. S'il n'est pas dénombrable, il faudra aller au-delà du dénombrable, effectuer ce qu'on appelle une "récurrence transfinie" qui impose, précisément, un choix : après avoir épuisé un sous-ensemble dénombrable, il faut à nouveau choisir un élément dans son complémentaire. Ce choix paraît aller de soi puisque, s'il reste des éléments, il suffit d'en choisir un. Malheureusement, si l'on itère ce procédé au-delà du dénombrable, on se retrouve avec une chimère qu'on ne peut plus expliciter.

M.P.S. - C'est formidable !

A.L. - Les axiomes de choix dénombrable et non dénombrable ne sont pas les mêmes.

A.C. - Absolument pas. Il faut savoir que la plupart des théorèmes utilisés dans les mathématiques courantes se démontrent avec l'axiome du choix dénombrable. Solovay a construit une axiomatique où tous les ensembles sont mesurables [2]. Cette axiomatique est tout aussi non contradictoire que celle de la théorie des ensembles avec l'axiome du choix global. Elle dépend, en outre, d'une hypothèse sur les ordinaux inaccessibles, mais je n'entrerai pas dans ces détails.

M.P.S. - Cela nous entraîne dans une autre discussion qui concerne le rapport avec la réalité.

A.C. - Bien sûr.

M.P.S. - Qu'est-ce qui est réel dans ces axiomes ?

A.C. - C'est là que je retrouve mon opposition entre cette réalité mathématique archaïque dont je parlais et le système axiomatique qui nous permet de la percevoir. On voit très bien que selon le télescope que l'on prend, la perception de cette réalité va changer. Si l'on prend un système axiomatique avec l'axiome du choix non dénombrable, on aura une certaine vision, une certaine appréhension de cette réalité archaïque et si l'on prend par contre les axiomes de Solovay avec l'axiome du choix dénombrable et la mesurabilité, on en aura une autre. Mais ce n'est absolument pas contradictoire.

La réalité archaïque n'en est pas affectée, elle demeure immuable. Elle reste identique à elle-même.

M.P.S. - Cela me paraît très bien. Cette thèse me paraît très forte.

À propos de l'arithmétique de Peano et de la théorie des ordinaux (bas de la p. 25 et p. 26)

A.C. - [...] Ce qui est moins évident, ce qui est moins accepté, c'est justement qu'il y a des propositions qui sont vraies sans pour autant être déductibles du système d'axiomes, tels que ceux de Zermelo-Fraenkel, de sorte que l'idée même de démonstration perd de son évidence.

On dispose depuis la fin des années 1970, grâce aux résultats de Paris et Harrington [3], d'un certain nombre d'exemples d'énoncés formulés au sein de l'arithmétique de Peano, dont on sait qu'ils sont vrais grâce à la théorie des nombres ordinaux, dont nous parlerons plus tard, mais dont on sait aussi qu'ils sont non démontrables comme conséquences des axiomes de Peano. Ce que j'appelle ici arithmétique de Peano c'est l'arithmétique du premier ordre, de sorte que l'axiome de récurrence

[2] Voir J. Stern, "*Le problème de la mesure*", Séminaire Bourbaki 1983/1984, Exp. 632.

[3] J. Paris et L. Harrington, "A Mathematical incompleteness in Peano arithmetic", *Handbook of Mathematical Logic*, Amsterdam, New York, Oxford; North Holland, 1977, p. 1133-1142.

ne s'applique qu'aux formules du premier ordre (c'est-à-dire des formules où l'on n'utilise pas de quantificateurs qui impliquent les sous-ensembles de l'ensemble des entiers). L'exemple suivant [4] est une merveilleuse illustration mathématique de la fable du lièvre et de la tortue de La Fontaine.

On part d'un entier n, par exemple $n = 9$ et on l'écrit en base 2, $9 = 2^3 + 1$. On écrit aussi tous les exposants en base 2, et ainsi de suite s'il y a à nouveau des exposants, de sorte que dans notre exemple l'exposant s'écrit $3 = 2 + 1$ et $9 = 2^{2+1} + 1$. Le lièvre arrive, remplace tous les 2 par des 3 et substitue ainsi $3^{3+1} + 1$ à 9 ; la tortue soustrait 1. Le lièvre réécrit le résultat en base 3, puis remplace tous les 3 par des 4, ce qui dans notre exemple donne 4^{4+1} ; la tortue soustrait 1. Le lièvre réécrit le résultat en base 4 ce qui donne $3.4^4 + 3.4^3 + 3.4^2 + 3.4 + 3$, puis remplace tous les 4 par des 5 ; la tortue soustrait 1, et ainsi de suite.

Eh bien, l'on sait démontrer grâce à la théorie des nombres ordinaux que, comme dans la fable, c'est la tortue qui gagne, c'est-à-dire que quel que soit l'entier n dont on parte, on arrivera toujours à 0 au bout d'un nombre fini d'étapes, malgré les bonds prodigieux du lièvre ! L'on sait aussi que l'énoncé “pour tout n c'est la tortue qui gagne” n'est pas démontrable au sein de l'arithmétique de Peano, de même que la non-contradiction de cette arithmétique n'est pas démontrable en son sein ! Par contre si l'on utilise Zermelo-Fraenkel, et en particulier la théorie des ordinaux, on démontre que la tortue gagne.

Le lièvre et la tortue

[4] L. Kirby et J. Paris, “Accessible independence results for Peano Arithmetic”, *Bulletin London Mathematical Society*, 14,4 (1982), p. 285-293.