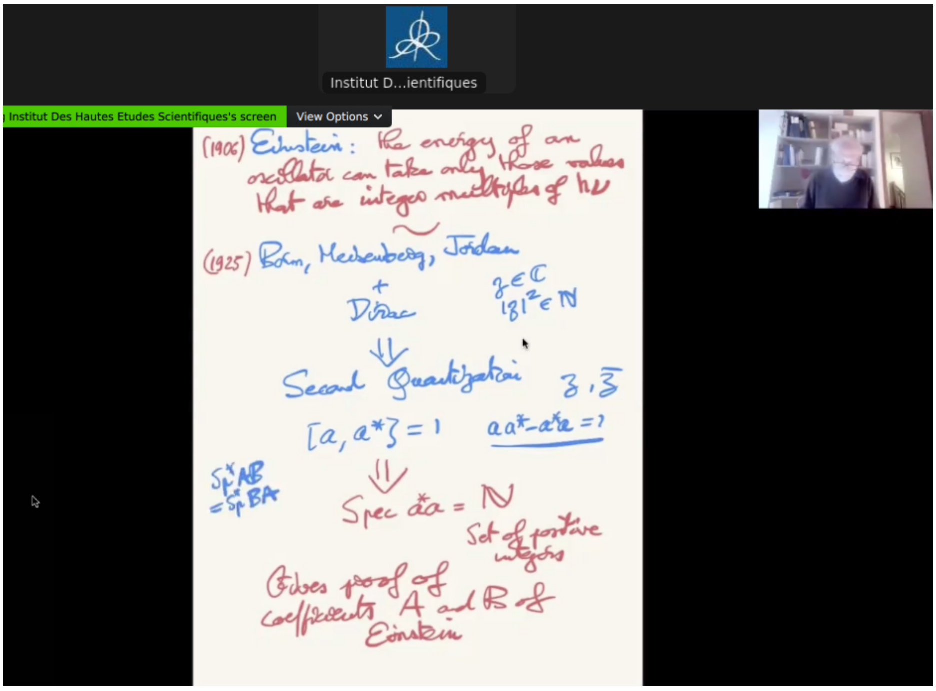
Renormalisation et théorie de Galois
Alain CONNES
18.11.2020
À l'occasion des 60 ans de Dirk Kreimer

Cher Dirk, Je souhaite bien sûr une joyeuse célébration de tes 60 ans, durant cette semaine, et je veux vraiment te féliciter pour tes grandes découvertes. Ainsi, cet exposé sera une grande occasion pour moi de témoigner ma gratitude à Dirk dont les découvertes ont occasionné un tournant dans ma propre compréhension à la fois dans ce que je souhaiterais dire de la physique, des mathématiques et de la relation entre ces deux domaines.

Je commencerai en disant que j'ai toujours été fasciné par le courage avec lequel les physiciens traitent des problèmes qui semblent mathématiquement insolubles. Je parlerai aujourd'hui du problème de la renormalisation et alors, ce sur quoi je souhaite mettre l'accent deviendra plus clair.



Je commencerai à la naissance de la théorie des champs quantiques qui après Planck, après la découverte de Planck en 1900, il y a cet énoncé clair dans l'article d'Einstein de 1906 que l'énergie d'un oscillateur ne peut prendre que des valeurs qui sont des multiples entiers de $h\nu$. Ceci est appelé la quantification, c'est une sorte de vœu pieux. Et elle a été posée sur des bases solides par deux articles : il y a un article de Born-Heisenberg et Jordan je pense en 1925, je ne suis pas complètement sûr, et alors bien sûr, l'article de Dirac en 1930. Alors ce qui est fait là, c'est quelque chose d'assez incroyable qui est que l'on souhaite, à cause de cette assertion d'Einstein, on souhaite qu'un nombre complexe vérifie une sorte de très étrange condition ; on veut des nombres complexes z, qui appartiennent aux nombres complexes, mais on veut les assujettir à la condition que leur valeur absolue au carré soit un entier. Mais dit comme ça, vous savez, c'est vraiment quelque chose qui semble totalement impossible, totalement non naturel mais pourquoi pas. Mais c'est ce que vous

Conférence donnée à distance lors du colloque "*Algebraic structures in perturbative quantum field theory*", organisé par l'IHÉS.
Vidéo visionnable ici https://www.youtube.com/watch?v=bshH2¡6*whc*.
Fichier associé au diaporama ici : https://indico.math.cnrs.fr/event/4834/attachments/2600/3291/AlainCONNES.pdf
Transcription Denise Vella-Chemla, décembre 2020.

voulez pour les coefficients qui apparaîtront vous savez dans l'expansion de Fourier d'une onde, okay.

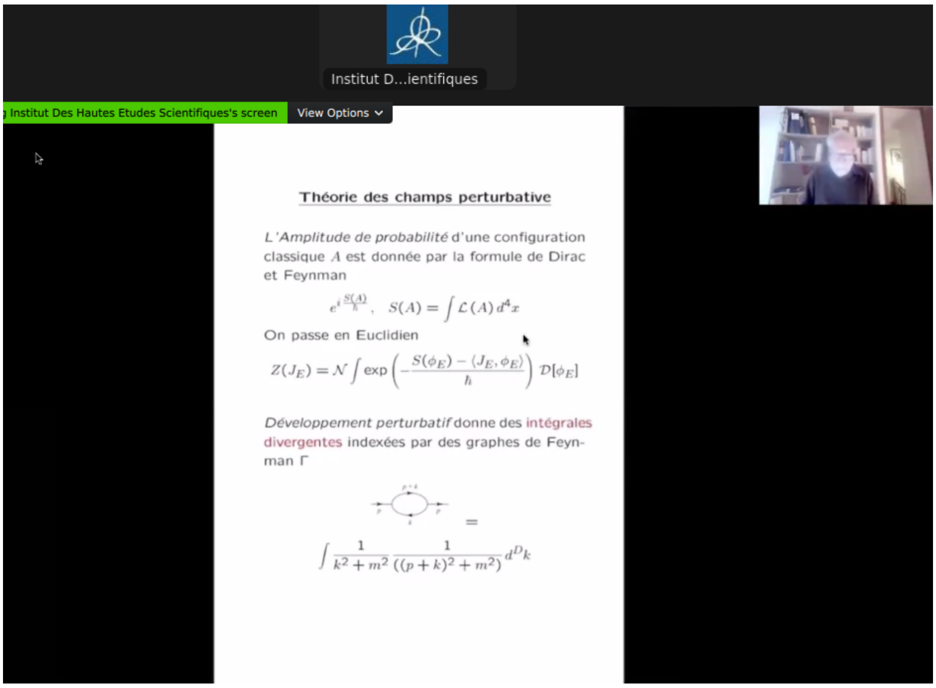
Ainsi les idées incroyables, la source incroyable, vient de l'article de Born-Heisenberg-Jordan : ils ont étudié l'oscillateur et ils ont trouvé l'opérateur correspondant et puis le Dirac et ils l'ont utilisé dans la seconde quantification, dans le premier exemple pour la seconde quantification. Et ce qui est miraculeux, c'est que si vous prenez, non pas un nombre complexe mais un opérateur, et si cet opérateur z est tel que c'est comme si z ne commutait pas avec $\bar{z}$, et par là, je veux dire que le remplacement de ce $\bar{z}$ est l'adjoint de l'opérateur, alors vous avez deux opérateurs A et A^*, adjoints l'un de l'autre, et ils remplissent la condition que leur commutateur, c'est-à-dire $AA^* - A^*A$, vous savez, est égal à 1.

Okay, ceci est extrêmement simple et juste par cette formule, cela implique immédiatement que quand vous prenez A^* le module de ça élevé au carré sera un entier : la raison est très simple, vous savez, la raison est qu'en général, vous avez que le spectre de AB est égal au spectre de BA, excepté potentiellement à cause de la présence de zéro, le point zéro dans le spectre. Et alors, je veux dire, si vous avez cette relation, cela signifie que vous pouvez descendre, vous pouvez descendre d'un élément... avant toute chose, que le spectre est positif, parce que l'opérateur est positif, et que si vous prenez un nombre qui est dans le spectre, vous savez que vous allez descendre de 1 et etc., à la condition que la seule manière de descendre dans les négatifs est absurde parce qu'à un moment vous atterrissez sur 0 et ainsi ce côté du spectre est formé de nombres positifs.

Maintenant avec ceci et cela, vous savez, Dirac a été capable de prouver du point de vue physique, en utilisant les mathématiques, les formules qu'Einstein avait devinées par des expériences de pensée à propos des constantes A et B, les coefficients d'absorption et d'émission d'une radiation par un atome ; et cela a été un fantastique succès en 1930 et cela a réellement été la naissance de la théorie quantique des champs.

Maintenant je veux montrer une affiche humoristique qui contient une plaisanterie[1], mais qui est très réconfortante en quelque sorte, vous savez, la voici. Je ne sais pas si elle est réelle, je veux dire que je ne sais pas si Einstein a vraiment dit ça mais ça n'a pas d'importance, okay, donc ce qu'il dit là c'est : "ne soyez pas inquiet de vos difficultés en mathématiques, je peux vous assurer que celles que j'éprouve quant à moi sont bien plus importantes." Bon, vous savez, c'est une phrase assez incroyable !

[1] photo d'Einstein avec sa soi-disant pensée écrite à côté.

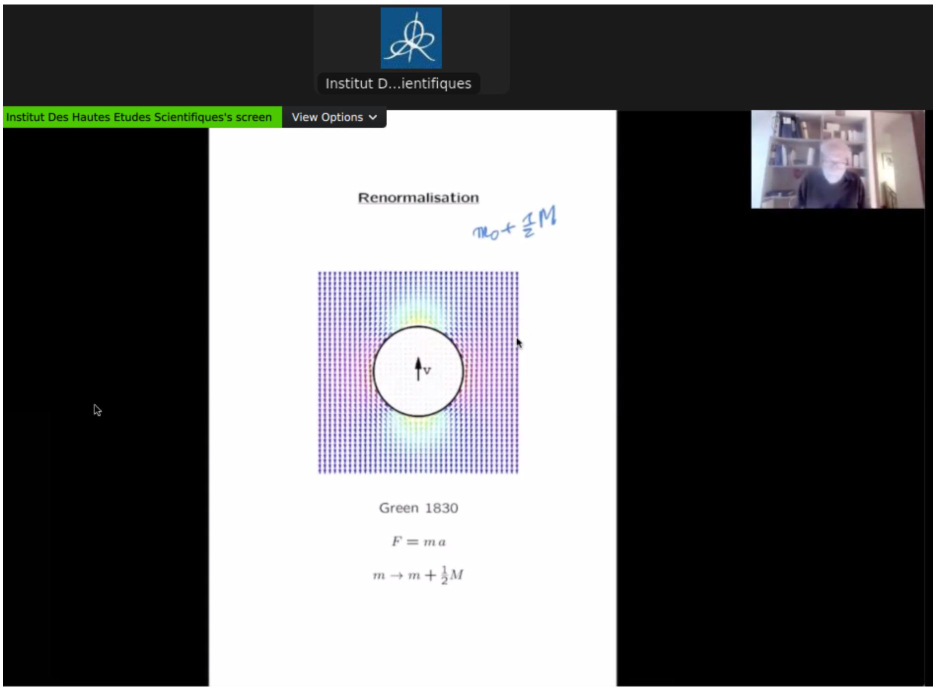


Maintenant, en effet, vous connaissez les difficultés mathématiques qui sont extrêmement rapidement atteintes, quand vous entrez dans la théorie quantique des champs, et qui sont résumées en une formule, qui est due à Feynman, vous savez qu'il y a une citation probablement d'un physicien du passé que vous devez connaître et qui dit "Schwinger a élevé la théorie quantique des champs aux nues et Feynman l'a ramenée aux masses". Bon, la raison pour laquelle il l'a amenée dans les masses est que, vous savez, vous avez un principe, qui est incroyablement simple à formuler, qui est que les amplitudes de probabilité sont comme des racines carrées de probabilités), l'amplitude de probabilité d'une configuration est donnée par cette formule[2], okay, qui est l'exponentielle imaginaire de l'action en unités de $\hbar$. Bon, bien sûr, l'action est définie ainsi, et donc, je veux dire, ceci est extrêmement délicat, parce que, vous écririez l'intégrale fonctionnelle, et si vous écriviez cette intégrale fonctionnelle dans l'espace de Minkowski et non pas dans l'espace euclidien, alors vous rencontreriez immédiatement des difficultés dues au fait que le propagateur a une singularité et que vous ne savez pas comment la gérer.

Maintenant, on la gère par ce qu'on appelle la prescription de l'$i\epsilon$ de Feynman mais cela signifie surtout que vous passez dans le domaine euclidien. Et ainsi, ce que vous faites, c'est que vous calculez, si vous voulez, la source, ainsi vous calculez l'intégrale fonctionnelle et ce qui en quelque sorte vient très rapidement, c'est que, avant tout, vous ne savez pas du tout ce qu'est la mesure d'intégration. Et la seule chose que vous pouvez faire est vraiment de prendre la théorie libre, ou le champ libre, et de perturber autour du champ libre. Quand vous faites cela, vous devez intégrer par parties sous la gaussienne, ce que, okay, tout le monde peut faire, et alors, vous obtenez des expressions qui vous donnent le développement perturbatif. Mais ce que vous trouvez, presque immédiatement, c'est que vous allez sous le niveau de l'arbre, et donc sous le niveau auquel Dirac travaillait, vous trouvez que les intégrales que vous obtenez sont en fait des intégrales divergentes. Donc, je veux dire, face à ça, vous savez que vous obtenez quelque chose qui n'a pas de sens.

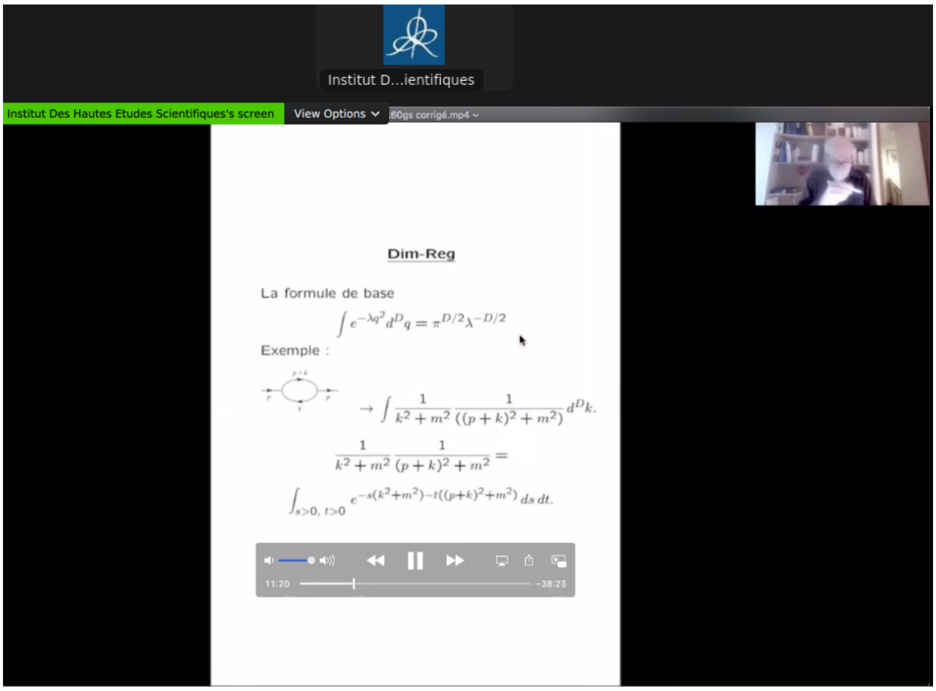
Maintenant, ce type de résultat privé de sens a vraiment un vieil ancêtre. Et ce vieil ancêtre, je me rappelle, vous savez, un exposé par Sidney Coleman en 1978 dans lequel il donnait un exemple qui est une légère variante de l'exemple suivant.

[2] entourant $e^{i\frac{S(A)}{\hbar}}$

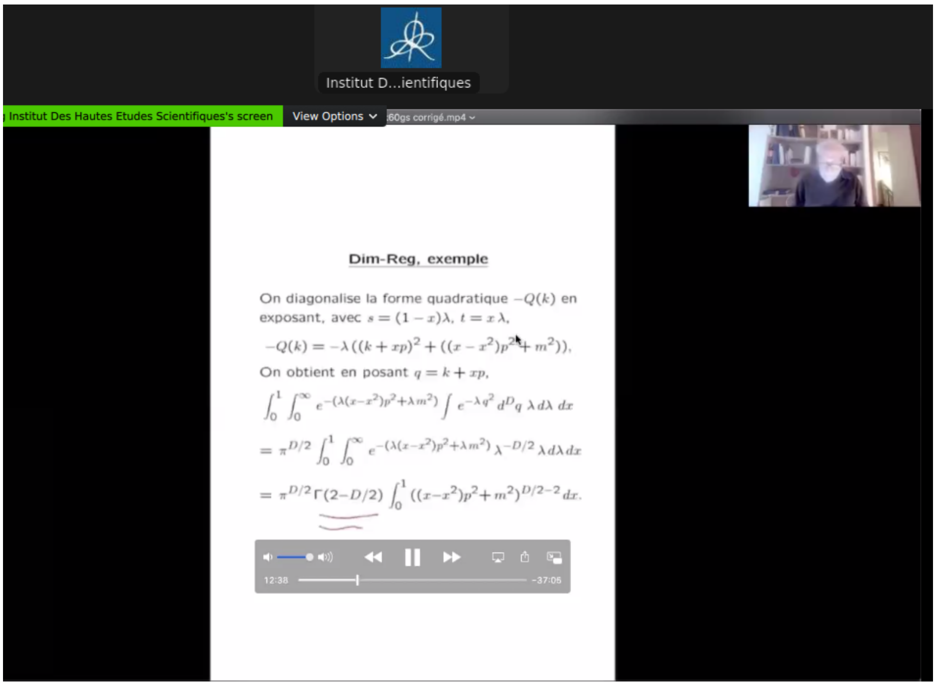


Je veux dire, vous savez, il donnait l'exemple d'un ballon rempli d'hélium et vous pouvez calculer l'accélération initiale du ballon quand il remonte. Mais vous trouvez quelque chose de ridiculement différent de ce qui est observé. Et je veux dire que vous pouvez aussi prendre l'exemple d'une balle de ping-pong dans de l'eau. Et ainsi, le principe d'Archimède si vous voulez, le fait que vous connaissiez que la force correspondra à la masse du volume d'eau qui remonte et tout ça, ça ne marche pas du tout : cela vous donne un résultat qui est en contradiction avec l'expérience. Et il a été observé par Green en 1830, vraiment, qu'il y a une belle explication à cela. Et l'explication est que quand vous calculez vraiment la masse qui devrait entrer dans la loi de Newton, vous trouvez que ce n'est pas la masse originale m_0 si vous voulez, que vous devriez avoir pour le ballon ou pour la balle de ping-pong, mais vous devez ajouter à cela un terme correctif qui est vraiment la moitié de la masse de l'eau contenue dans la balle de ping-pong, si elle était dans l'eau, ou une masse d'air et etc. Et ce que vous trouvez alors c'est que l'accélération initiale ne peut pas excéder 2 ($2g$). Et je veux dire que la raison derrière cela est que vous savez que la balle de ping-pong ou le ballon est immergé dans un fluide. Et lors du mouvement, vous savez, ce qui se produit, c'est qu'il y a création d'une perturbation dans le fluide et quand vous calculez l'énergie de cette perturbation, cela ajoute effectivement un terme additionnel à la masse effective que vous êtes en train de traiter. Donc en quelque sorte, dans le cas du ballon ou de la balle de ping-pong, vous pouvez vraiment calculer la valeur de m_0.

Ce que vous faites c'est que vous sortez la balle de ping-pong de l'eau, c'est ça, vous pouvez la peser. Mais ce que les physiciens ont compris très très vite c'est que ça n'est pas le cas de l'électron parce que vous ne pouvez pas le sortie du champ électromagnétique quoi que vous fassiez. Ainsi vous ne pourrez jamais être capable de trouver ce que vaut ce qu'on appelle la masse nue, par exemple, de l'électron. Et cela a résulté en de nombreuses batailles, de nombreuses réflexions, et de façon incroyable, comment dire, vous savez, cela a amené au développement de ce qu'on appelle la renormalisation, et cela a amené les physiciens à lentement comprendre ce qui se passe et comme je le disais, vous savez, bien sûr, entre les mains de Schwinger, Feynman, Dyson, et alors vous savez, Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann ont réussi un jour en fait à trouver une très bonne manière, je pense à ce dim-reg vraiment, qui est dû à 't Hooft et Veltman, de façon à comprendre et à avoir le contrôle sur ces divergences, à partir du principe physique que vous connaissez, par exemple et qui dit que la masse nue est différente de la masse réelle et similairement pour les charges, similairement pour la force du champ. Vous devez utiliser le processus de régularisation.

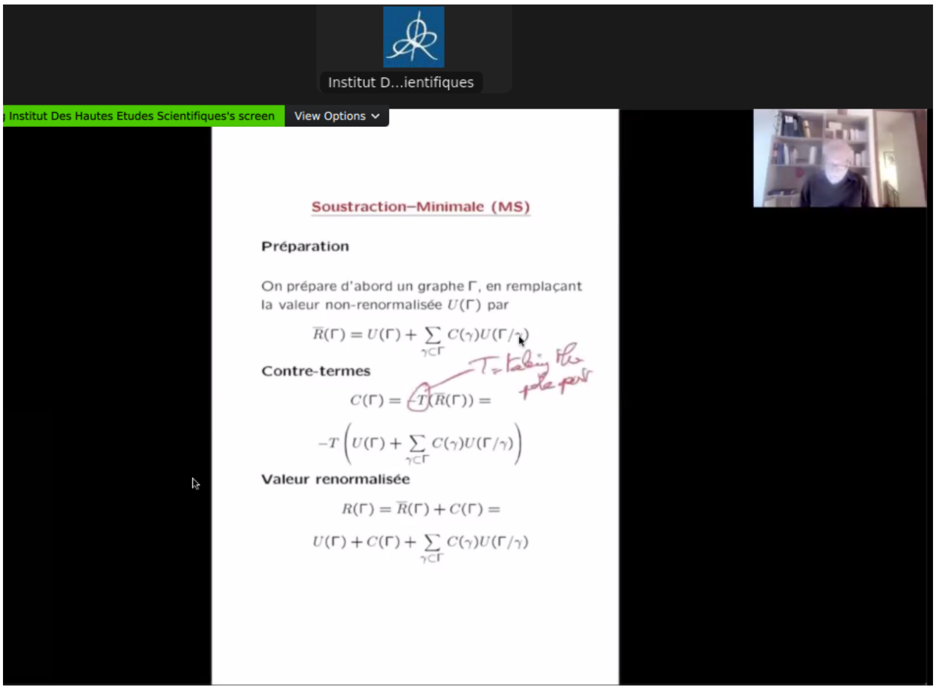


Donc le processus de régularisation actuellement le plus efficace est ce qu'on appelle dim-reg. Donc l'idée de dim-reg est simplement cette formule[3]. Ainsi cette formule dit que si vous devez intégrer une gaussienne en d dimensions, vous n'avez pas à vous soucier que d soit un entier : vous pouvez mettre une définition, et cette définition est que l'intégrale de cette gaussienne en dimension d est donnée par cette formule. Maintenant ce que vous faites, c'est que vous prenez l'une de ces intégrales divergentes que vous avez obtenue des graphes de Feynman, et vous la gérez en passant à ce qu'on appelle les paramètres de Schwinger. Notamment, vous la réécrivez, vous savez, vous réécrivez l'intégrande comme une somme de gaussiennes, je veux dire, d'expressions gaussiennes et alors vous calculez. Okay, vous calculez avec ça et je veux dire, quand vous calculez ça sur un exemple,



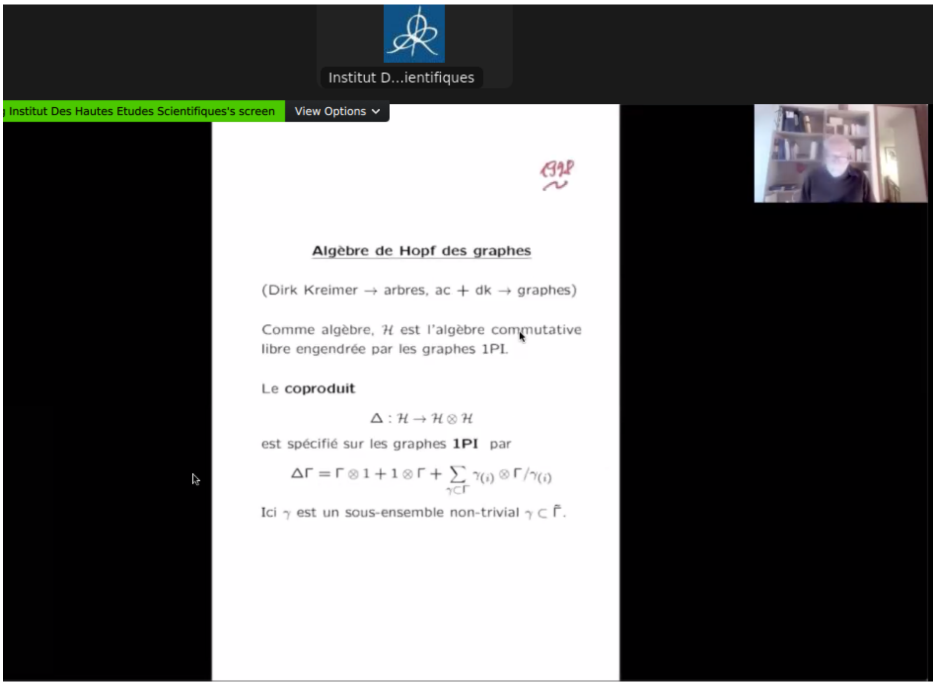
[3] entourant la première formule sur la page.

vous trouvez que ce que vous obtenez, typiquement, dans les exemples les plus simples, ce sera des fonctions gamma. Et ces fonctions gamma auront... à cause de la divergence de cette intégrale, auront le mauvais goût si vous voulez d'avoir un pôle à la dimension qui vous intéresse. Par exemple, vous savez que si vous êtes en dimension quatre alors cette expression quand d égale quatre, aura le pôle de gamma en $z = 0$, multiplié par quelque chose que vous pouvez calculer. Alors ce que les physiciens ont inventé, toutes ces années, de lutte et de compréhension et etc., c'est un processus qui est combinatoire, qui est appelé la soustraction minimale, et qui vous autorise à la fin de la journée, à obtenir un résultat fini.



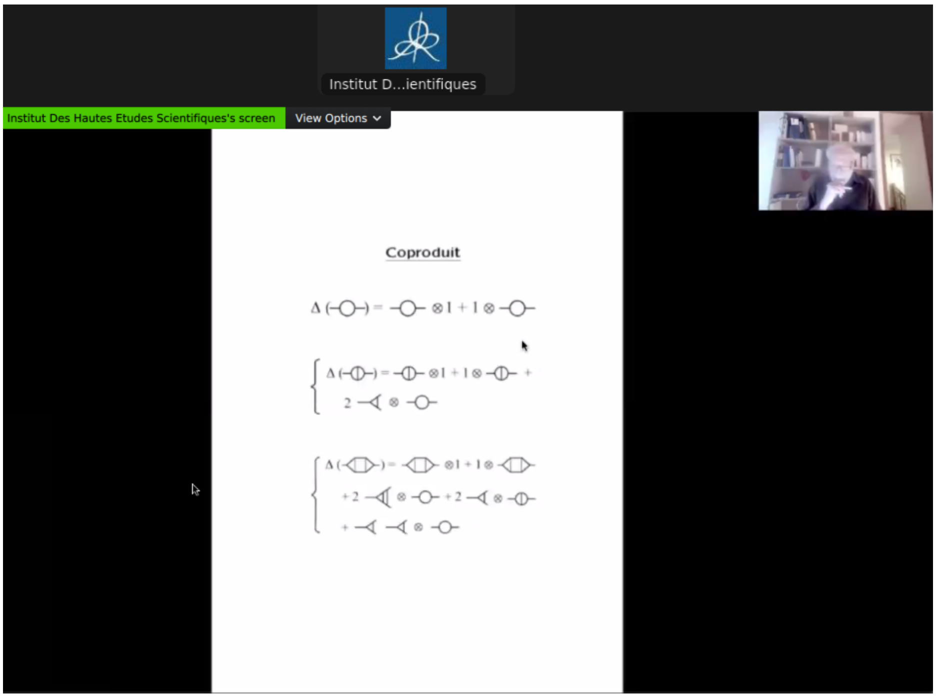
Donc avant tout, vous avez la préparation, et cette préparation vient du fait que vous savez, vous avez à prendre en compte, quand vous travaillez avec des boucles plus hautes, etc., de ce que vous avez fait avant. Donc ces choses-là sont appelées des sous-divergences et vous devez préparer un graphe pour prendre en compte les termes que vous aviez calculés avant dans une certaine formule. Et cela vous fournira ce qu'on appelle les termes compteurs. Et dans ces termes compteurs, ce qui est vraiment important, c'est que si vous devez prendre la partie pôle de telle façon que T prenne la partie pôle, donc la partie qui est la partie divergente. Ainsi je veux dire bien sûr non seulement un epsilon mais également un sur epsilon au carré, et etc., et etc.

Okay. Donc vous prenez ces termes compteurs et vous définissez la valeur renormalisée par soustraction minimale si vous voulez les termes divergents. Ainsi la valeur renormalisée est donnée par cette formule. Okay, donc ça c'est une recette combinatoire, c'est très compliqué et quand vous voyez ça, en tant que mathématicien, d'abord vous vous dites, "okay, bon, c'est sans espoir !", vous savez, parce que je veux dire, bon, on comprend pourquoi en physique on doit faire ça mais en parlant d'un point de vue mathématique, vous savez que c'est très difficile d'imaginer que cela pourrait avoir un sens mathématique, non pas que ça ne soit pas rigoureux, c'est parfaitement rigoureux, non ! Mais vous savez, je veux dire le sens conceptuel okay ? Et c'est ce que nous avons trouvé avec Dirk Kreimer dans notre collaboration.



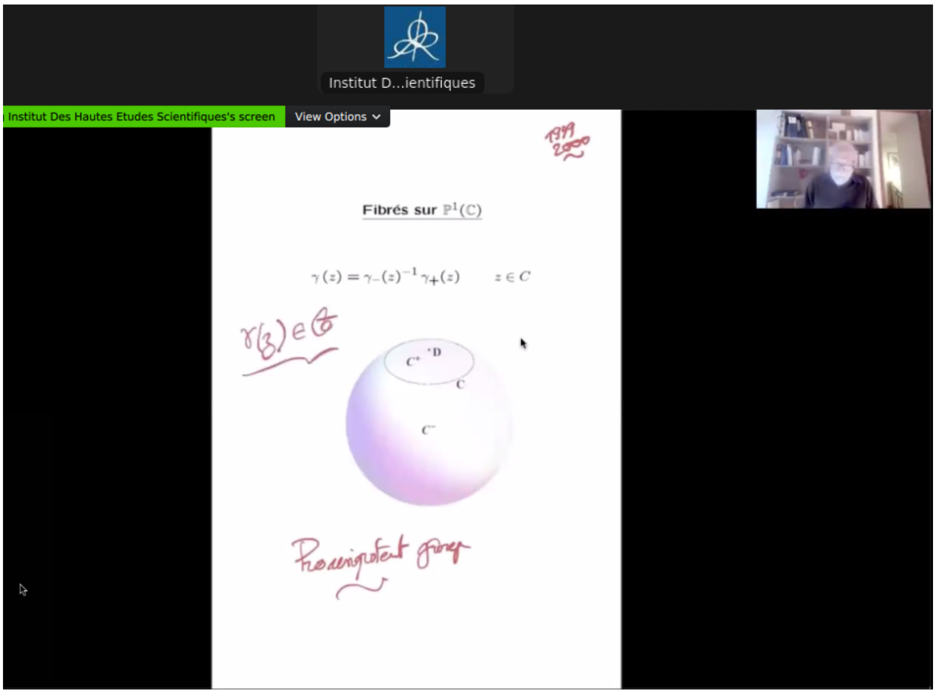
Et je veux dire, nous avons commencé, je pense que c'était en 1998. Oui, nous avons commencé à travailler ensemble en 1998 et l'idée clef est venue de Dirk. L'idée de Dirk était que, vous savez, quand vous regardez ce graphe en fait, au début, il travaillait avec des arbres enracinés, il y a une structure de Hopf derrière la scène. Maintenant, au moment où j'ai rencontré Dirk, je travaillais avec Henri Moscovici. Et nous travaillions aussi sur les algèbres de Hopf. Donc j'étais en quelque sorte parfaitement prêt pour absorber la découverte de Dirk.

Ainsi, il s'avère que quand vous formulez cette algèbre de Hopf en termes de graphes, c'est une belle chose, notamment, vous avez des graphes, vous prenez l'algèbre libre commutative engendrée par les graphes. Donc vous prenez des combinaisons linéaires de graphes, etc., et des produits, des produits formels. Et vous définissez un co-produit. Et ce co-produit est en quelque sorte spécifié sur les graphes qui sont irréductibles à une particule par cette formule. Bien, ce sont les sous-divergences, je veux dire, ce sont les sous-graphes si vous voulez qui correspondraient aux sous-divergences. Et ainsi vous définissez cette formule.

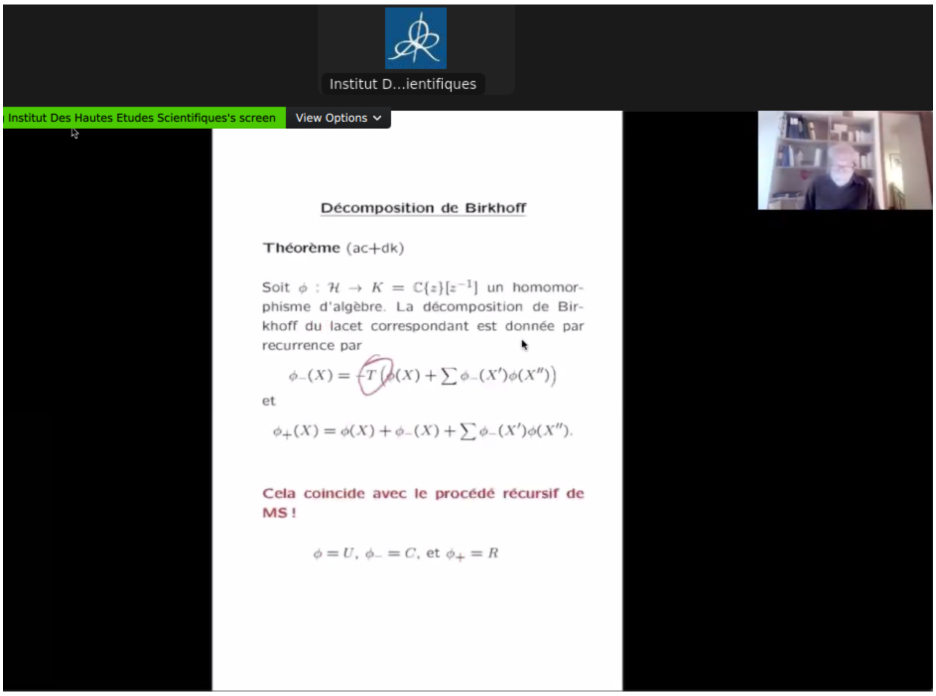


Vous jouez avec et c'est assez incroyable que vous sachiez que le co-produit que vous avez défini comme ça soit vraiment co-associatif, vous savez que c'est un morphisme d'algèbres, etc. Et ce co-produit va de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ pour h et après, quand vous y pensez, après un long processus, vous trouverez que la bonne analogie entre... Quel est le type des algèbres de Hopf ? Ce type d'algèbre de Hopf qui est commutative mais non co-commutative. Parce que le co-produit n'est pas co-commutatif en général, vous savez, parce que vous avez des termes comme ceux-ci.

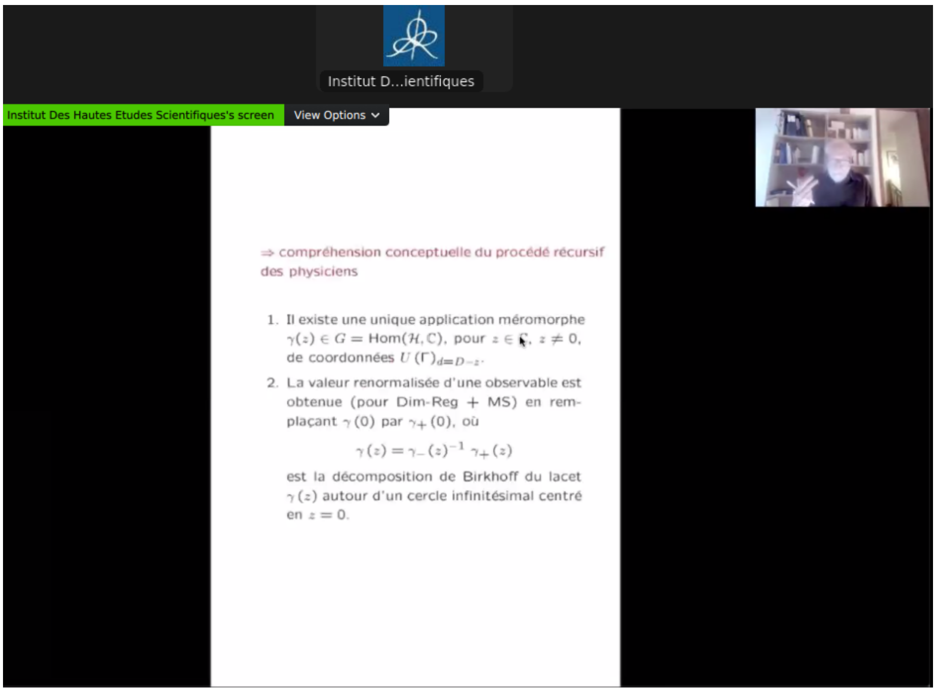
Je veux dire, c'est un groupe, un groupe formel. Maintenant les indices qui peuvent vous faire penser à cela sont en fait très très proches d'indices qui vous amèneraient à l'algèbre de Hopf que vous obtiendriez si vous regardiez les développements de Taylor des difféomorphismes ; donc en fait, vous savez, le nom correct que nous avons mijoté était celui de difféographismes à cause des graphes. C'est la manière dont vous devez penser à de tels objets ; vous devez penser qu'il y a un groupe sous-jacent : ce groupe est la composition de choses qui sont comme des difféomorphismes et qui sont donnés par leur développement de Taylor qui correspond à un développement perturbatif.



Donc nous avons ce co-produit et maintenant la grande découverte que nous avons faite, je pense soit en 1999 et ensuite en 2000, mais le moment absolument fantastique est qu'en fait cette procédure, cette procédure combinatoire des physiciens, n'est en fait rien d'autre que quelque chose qui est connu en mathématique et qui est relié à un problème géométrique. Et ce problème géométrique est le problème de comprendre les faisceaux de la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et dans le but de comprendre ces faisceaux, ce que vous faites, c'est qu'ils sont donnés par des données de "collage" (gluing) parce que si vous voulez, si vous regardez la partie qui a lieu dans l'hémisphère du haut ou dans l'hémisphère du bas, okay, ces parties sont aisément compréhensibles, mais la partie qui est non-triviale, c'est la manière dont vous les collez. Ainsi un grand travail a été fait en mathématiques là-dessus, Grothendieck, par exemple, a travaillé là-dessus, et il s'avère qu'en physique, à cause de la nature du problème qui est un problème perturbatif, plutôt que de considérer un faisceau qui prend ses valeurs dans un groupe comme $GL(n, C)$, c'est le groupe sur lequel Grothendieck travaillait, plutôt, nous travaillerons avec des faisceaux dont la structure de groupe est un groupe pro-unimpotent. Okay. Donc c'est un groupe pro-unimpotent et cela rend les choses plus simples au sens où vous n'avez pas, si vous voulez, d'obstructions globales, pour trivialiser le faisceau, mais, quand vous calculez, quand vous comprenez... ce que cela signifie, qu'en quelque sorte vous trivialisez le faisceau, alors vous l'appliquez à la boucle suivante, vous voyez, quand nous parlons d'algèbre de Hopf, il s'avère que quand vous regardez les valeurs des graphes quand la dimension n'est pas la dimension critique, vous savez, comme égale à 4, etc... Bon, alors vous pouvez donner un sens et ce sens, que vous dit-il ? Il vous dit que ce que vous avez, c'est la chose suivante : vous avez une boucle $\gamma(z)$ okay, dont les valeurs sont dans ce groupe, attaché à l'algèbre de Hopf, mais que ce $\gamma(z)$ est comme une donnée de collage. Et vous ne savez pas comment l'évaluer pour cette dimension d parce que là, vous savez, il est singulier. Donc ce que vous faites, c'est que vous appliquez la méthode qui vous permet de trivialiser le faisceau et cette méthode est appelé la décomposition de Birkhoff et qu'est-ce que ça fait ?

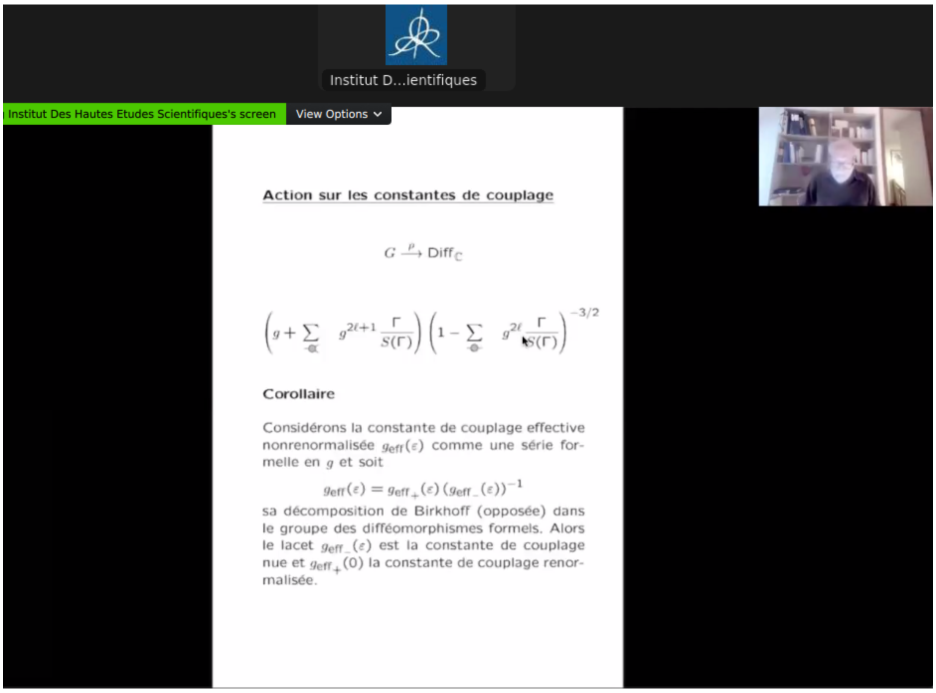


Ça écrit cette boucle avec des valeurs dans le groupe, le groupe est grandement non-commutatif, ce n'est pas un groupe commutatif du tout. Mais vous l'écrivez comme un rapport de deux boucles, une qui sera assez singulière mais une qui sera parfaitement régulière dans ce $(C, +)$ qui est ce $\gamma_+(z)$ et le résultat incroyable que nous avons prouvé avec Dirk, c'est que quand vous regardez uniquement d'un point de vue mathématique, si vous voulez, la décomposition de Birkhoff de la boucle correspondant aux données qui sont calculées par le procédé dim-reg, et etc., alors vous trouvez par induction que c'est donné par cette formule où T a la même signification que précédemment, c'est l'extraction de la partie pôle, okay et ainsi, ça a été un moment incroyable que ce processus coïncide exactement avec le processus récursif avec la recette combinatoire qui était donnée dans la soustraction minimale, okay. Et donc nous avons fait la traduction de l'un à l'autre. Et cela a été un moment absolument clef, et qu'est-ce que cela signifie ?

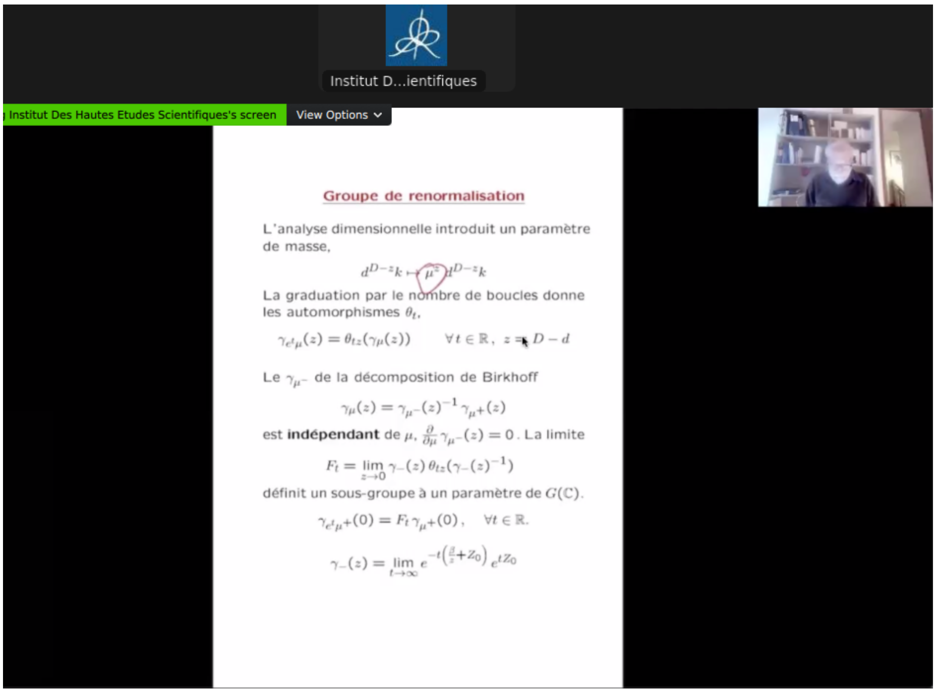


Cela signifie qu'on a, vous savez, une compréhension conceptuelle de ce processus récursif des physiciens. Ainsi, en d'autres termes, nous avons une application méromorphique unique qui va vers ce groupe associé à l'algèbre de Hopf, okay. Et quand vous prenez, maintenant, les valeurs renormalisées d'un observable, et etc. Que faites-vous ? Pour le paradigme dim-reg + MS ? Alors ce que vous faites c'est que vous ignorez la divergence en remplaçant $\gamma(0)$ par $\gamma_+(0)$ dans ce processus de décomposition non-commutative qui est la décomposition de Birkhoff. Donc qu'est-ce que cela signifie ? Cela signifie que si au milieu de la nuit, quelqu'un vient et vous pointe un pistolet sur la tempe et vous dit “c'est quoi la renormalisation ?”, voici ce que serait ma réponse. Ma réponse serait “okay, bon, regardez, vous savez, c'est une décomposition de Birkhoff de la boucle et vous prenez la partie de la boucle qui a du sens et vous ignorez l'autre”. Okay, maintenant il s'avère que, vous savez, il y a beaucoup plus que ça, il y a plein de trucs derrière la scène dans cette donnée, et ce qui est derrière la scène est lié à la théorie de Galois. Je reviendrai à la théorie de Galois plus tard.

Mais en quelque sorte, je décrirai maintenant les résultats qui ont été obtenus, vous savez, en collaboration avec Matilde Marcolli



et avant de faire cela, je voudrais dire que, vous savez, dans le travail que nous avons fait avec Dirk, nous avions comme corollaire de ce que nous obtenions, la manière dont le groupe agissait sur les constantes de couplage ; notamment, il y a un morphisme naturel du groupe associé aux graphes vers les difféomorphismes, comme je le disais, vous savez, ce groupe devrait être pensé comme un difféographisme. Ainsi, il est lié aux difféomorphismes, et la manière dont il leur est relié, c'est par la façon dont il agit sur les constantes de couplage. Ainsi, il agit sur les constantes de couplage par l'image de cette série. Mais parce que la décomposition de Birkhoff est une sorte de fonctorielle, ce qui se produit c'est que vous ne pouvez pas obtenir si vous voulez, ce qu'est la constante de couplage effective de la décomposition de Birkhoff. Vous pouvez obtenir la constante de couplage finie, renormalisée à partir de la décomposition de Birkhoff. Et ainsi ceci était le corollaire de ce que nous avions trouvé précédemment.



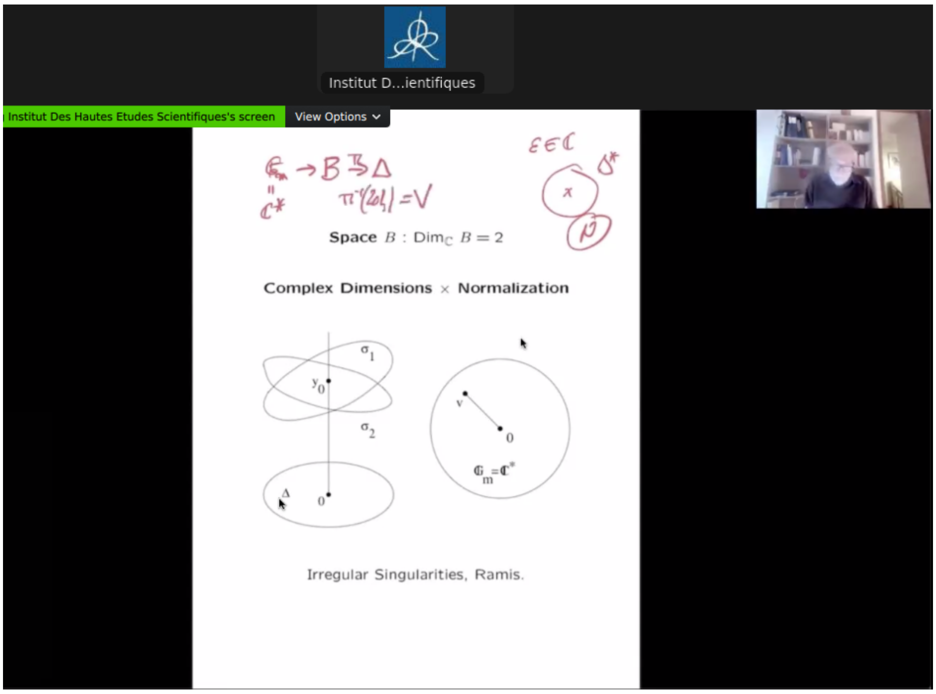
Comme je l'ai dit, j'ai continué à travailler là-dessus et dans ce que nous avions fait avec Dirk, nous avions compris le groupe de renormalisation, et cela venait essentiellement du fait que, quand vous regardez l'analyse dimensionnelle, quand vous intégrez en dimension $D - z$ vous devez introduire un paramètre de dimension pleine[4] qui a la dimension d'une masse que nous appelons μ et que nous mettons dans les formules.

Et le fait incroyable, qui est un fait de la vie, est que ce qui était connu avant, est que quand vous prenez un morceau négatif (maintenant nous disons dans la décomposition de Birkhoff mais okay, je veux dire en termes physiques, c'était dans la méthode DPH), ce morceau négatif dans la décomposition de Birkhoff est vraiment dépendant de μ et donc de ce fait, vous savez qu'il y a un groupe à un paramètre qui apparaît du sous-groupe du groupe associé à l'algèbre de Hopf, qui apparaît de façon complètement naturelle et alors, dans mon travail avec Matilde Marcolli, ce que nous avons fait a été, si vous voulez, de comprendre le lien entre tous ces faits que j'ai mentionnés précédemment et la théorie de Galois.

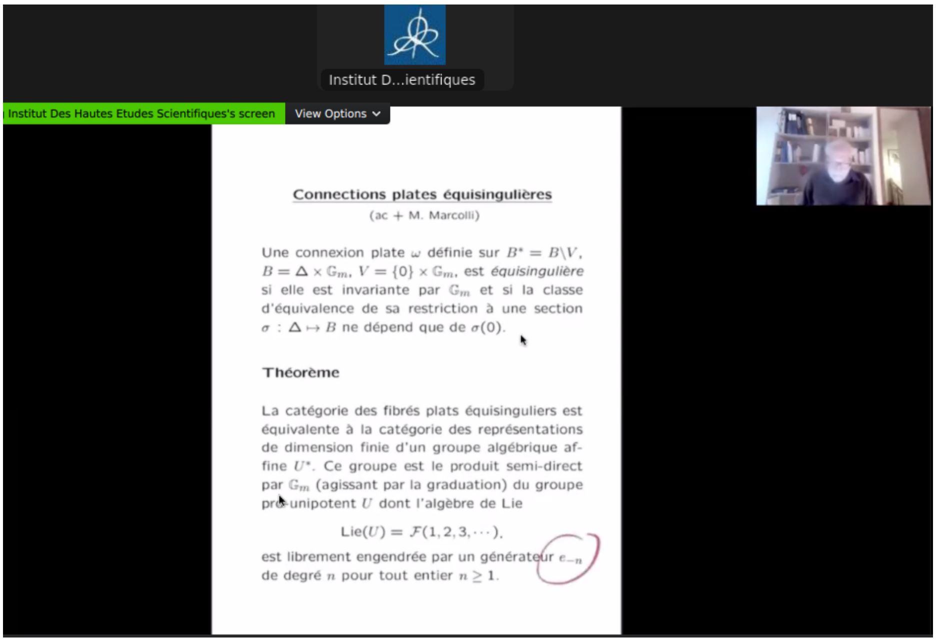
[4]a dimension full parameter ?

Je veux dire la théorie de Galois différentielle mais dans une situation qui est beaucoup plus étendue que quand vous regardez le rapport de Picard ou la théorie de Galois différentielle pour les équations différentielles régulières singulières. Et je veux dire, heureusement, vous connaissez la théorie du rapport de Picard, qui était très belle, et qui s'applique très bien pour les équations différentielles régulières singulières, pendant un long temps, elle est restée un peu silencieuse, parce que vous savez, il y avait un résultat essentiel qui était que le groupe de Galois était la fermeture de Zariski de la monodromie. Mais alors, dans les mains de Martinez-Ramis-Malgrange... Deligne, et aussi Ecalle, c'est devenue une théorie considérablement sophistiquée qui s'applique à des situations particulières.

Dans le travail avec Matilde, ce que nous avons trouvé c'est que nous avons appliqué le formalisme Tannakien qui avait été formulé, d'abord, par Grothendieck et avait ensuite été développé par de nombreuses autres personnes, en particulier par Deligne, et ainsi, ce que nous avons trouvé c'est comment... si vous voulez, il y a une catégorie Tannakienne naturelle de... comment dire... des systèmes différentiels ou si vous voulez de connexions et de modules et qui est associée au problème de la renormalisation et qui incarne toutes les propriétés précédentes dont j'ai parlé. Maintenant, l'idée principale est la notion de connexion plate équi-singulière.

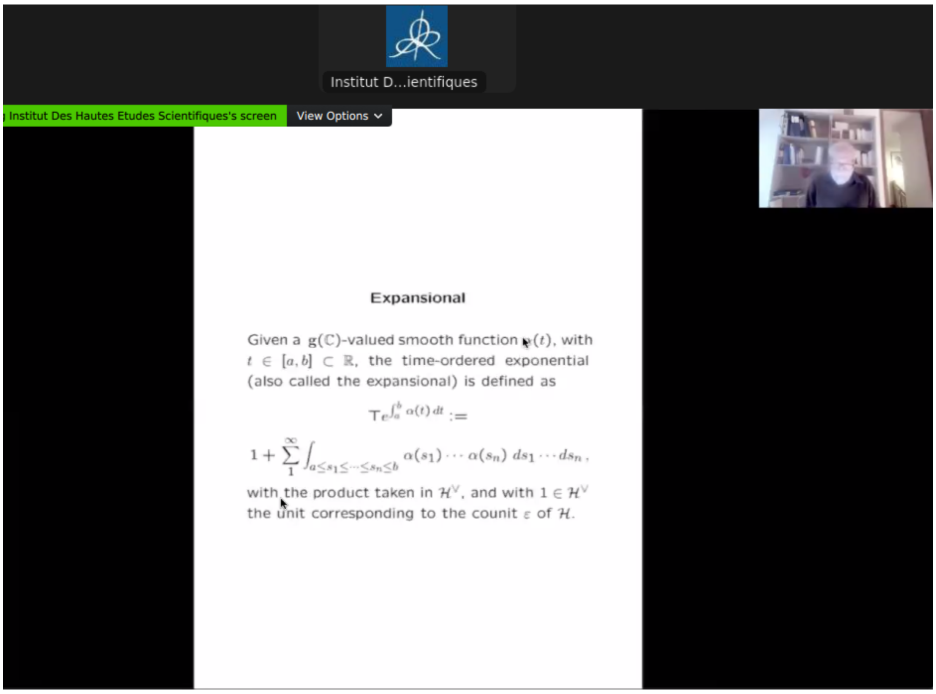


Alors pour cela, je dois penser géométriquement, et vous devez penser ainsi, quand je vous ai dit qu'il y avait epsilon qui était un nombre complexe, très proche de zéro, mais vous ne voulez pas qu'epsilon soit nul et donc ce que vous faites, c'est que vous prenez un disque pointé que vous appelez Δ^*. Mais il y a aussi ce μ, ce paramètre μ, quand vous le combinez avec le epsilon, ce que vous obtenez c'est un espace de dimension deux, de dimension deux complexe, et dans cet espace de dimension deux complexe, ce que vous savez principalement c'est qu'il est fibré par le groupe multiplicatif G_m qui est $\mathbb{C}^*$, si vous voulez, il est fibré sur le disque Δ mais vous voulez enlever la partie qui est au-dessus de zéro.

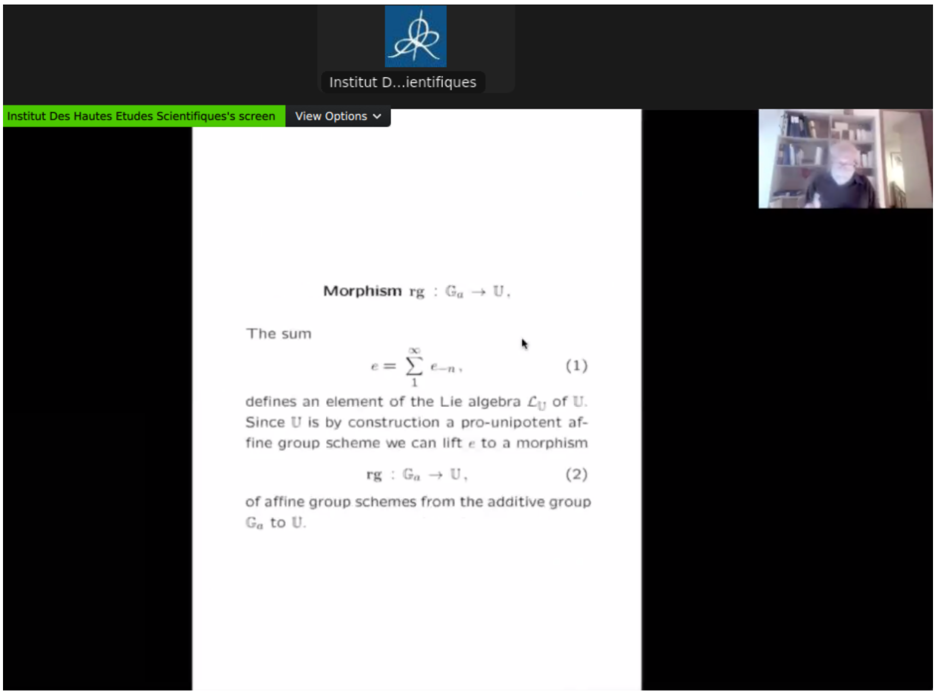


Et la partie qui est au-dessus de zéro, je l'appelle $\pi^{-1}(0)$. Je l'appelle ainsi et je parlerai ultérieurement du sens de $\pi^{-1}(Z)$, vous savez, en fonction de la constante, de la constante de Planck $\hbar$, mais ce qui arrive c'est qu'à cause de cette indépendance de la partie négative de la décomposition de Birkhoff pour de telles boucles, ce que vous avez c'est qu'elles sont associées, en fait, à ce qu'on appelle des connexions équi-singulières. Donc les connections équi-singulières sont des connexions plates, qui sont invariantes sous le groupe multiplicatif, mais qui sont telles que, lorsque vous les restreignez à une section, de Δ à B, de telle façon que ceci soit une section, une autre section, alors vous connaissez la singularité quand vous arrivez sur le point zéro, ce sont les mêmes. Je garantis cela. Donc alors, ce que nous avons trouvé est qu'en appliquant le formalisme Tannakien qui est une belle chose, vous savez, ce qu'il vous dit est que si vous avez ce qu'on appelle une catégorie Tannakienne, c'est une catégorie abélienne, mais ça a aussi une sorte de produit tensoriel, et ce que vous supposez maintenant c'est que cette catégorie a ce qu'on appelle un foncteur fibré. Donc elle a un foncteur qui va vers les espaces vectoriels ordinaires par exemple, quand vous recouvrez un corps, et alors vous regardez... on peut prouver abstraitement sous certaines conditions que cela définit un groupe affine algébrique qui est donné si vous voulez comme un foncteur d'un anneau arbitraire commutatif vers les groupes. Et le groupe correspondant est comme les automorphismes du foncteur fibre, quand vous le prenez sur l'anneau. Et alors ce que nous avons prouvé là, c'est que si vous prenez la catégorie des faisceaux plats équi-singuliers, alors elle s'avère être équivalente à la catégorie des représentations des dimensions finies d'un certain groupe affine algébrique qui est déterminé de manière unique. Et il s'avère que ce groupe est un produit semi-direct par le groupe multiplicatif qui agit au moyen de la graduation de la boucle, par la variation du nombre de boucles d'un certain groupe unipotent. Et ce groupe unipotent est déterminé de manière unique et c'est le groupe unipotent dont l'algèbre de Lie est engendrée librement par un générateur, ε_{-n} dans chaque degré n pour tout entier n.

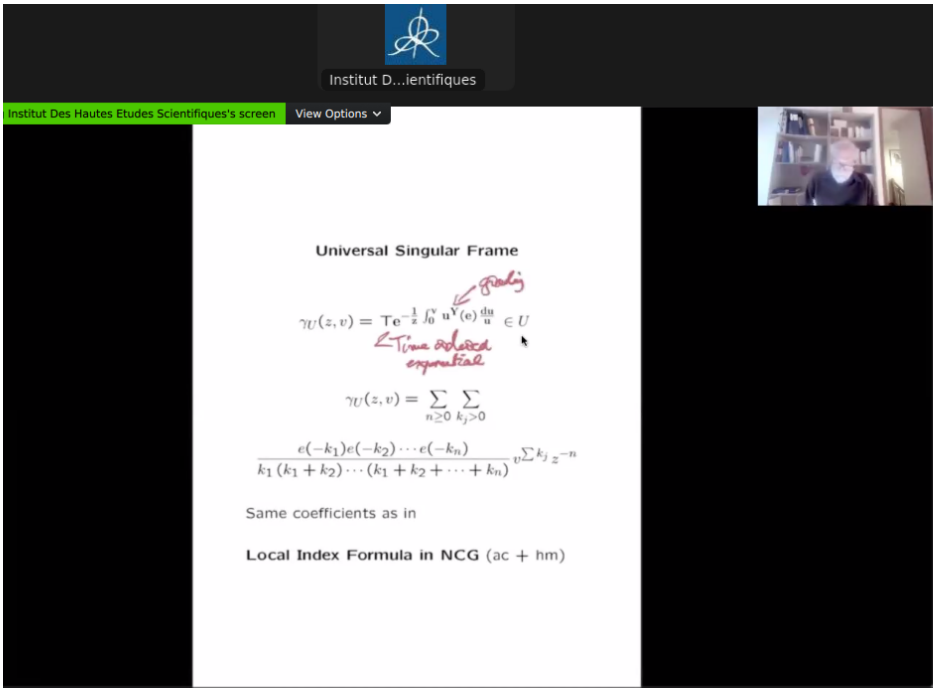
Maintenant je devrais juste mentionner en passant qu'un groupe similaire *apparaît effectivement* dans la théorie de Galois motivique mais non de manière canonique. C'est donc très illusoire de comprendre la relation. Maintenant pour aller un peu plus profondément dans ce qui se produit, comme je l'ai dit, vous savez que nous traitons des singularités irrégulières. Donc je veux dire, c'est très lié à la théorie de Ramis, je veux dire au tore exponentiel de Ramis...



et ce qui se passe c'est qu'on a besoin, pour écrire des formules, d'utiliser un outil qui est appelé l'exponentielle expansionnelle ou ordonnée en temps, et il y a à ce propos un beau papier d'Araki, remontant aux années 70, dans lequel vous savez je pense, il est dans les Annales de l'École Normale Supérieure, dans lequel il donne une belle théorie générale pour cette expansionnelle. C'est donc quelque chose qui est bien compris et c'est une exponentielle en temps ordonné et elle est très utile pour écrire les solutions des équations différentielles. Donc elle a du sens dans les algèbres de Hopf



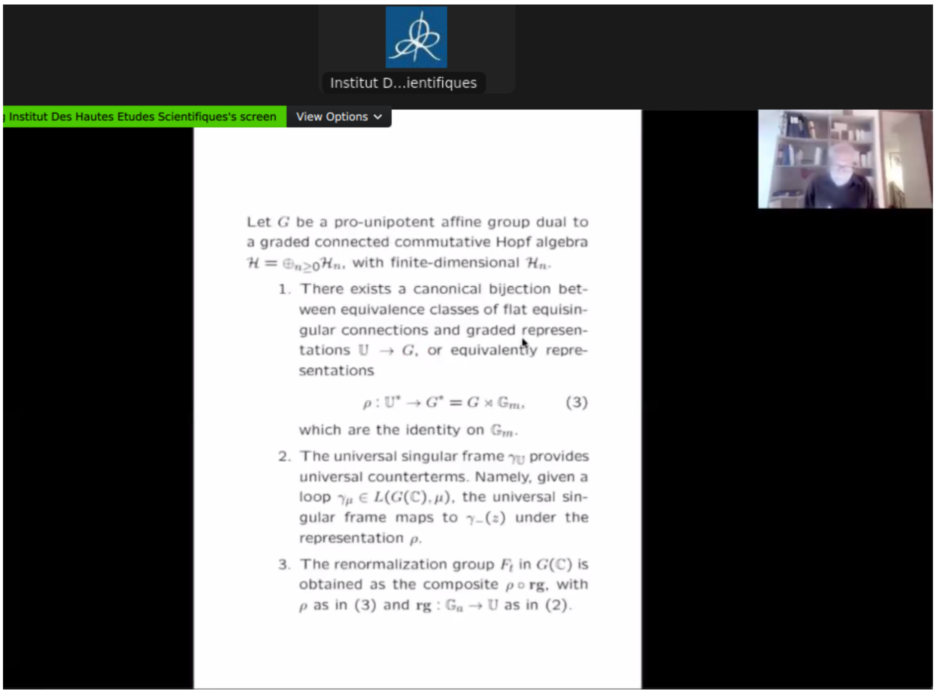
et il s'avère que derrière la scène, comme je vous l'ai dit tout à l'heure, il y a un certain morphisme canonique du groupe additif au groupe pro-unimpotent $\mathbb{U}$ que j'ai défini et qui, vous savez, sous-tend le résultat précédent, le théorème ici[5]. Donc ceci est le groupe sous-jacent $\mathbb{U}$ et je veux dire ce groupe, il est défini par cette formule, et comme nous le verrons un peu plus tard, il incarne exactement ce qu'on appelle le groupe de rénovation, qui est juste un sous-groupe du groupe que nous traitons, qui est plus riche parce que c'est un groupe hautement non-abélien.



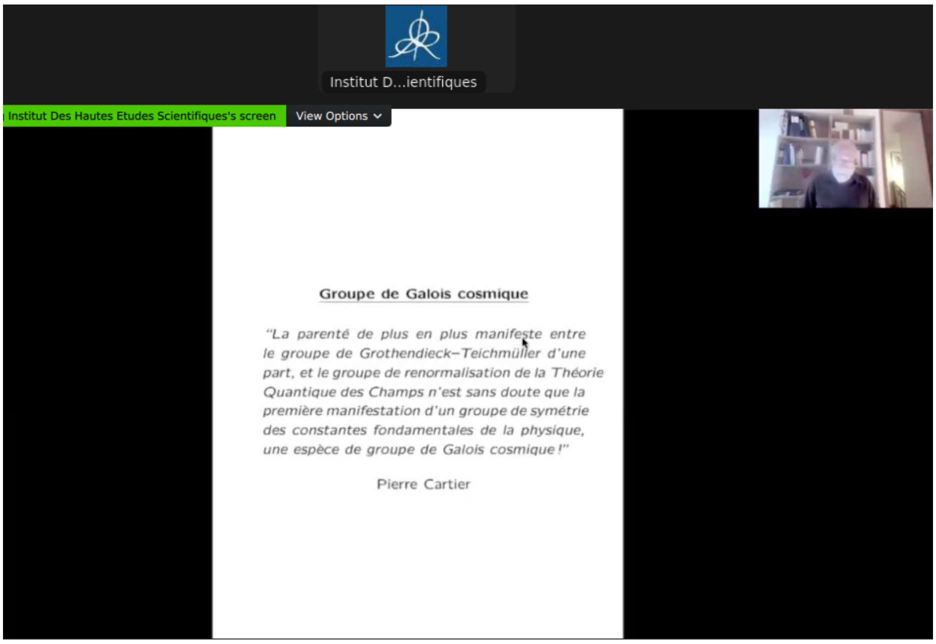
Donc il s'avère qu'il y a un objet qui est défini par un ordre temporel, c'est une exponentielle à ordre temporel, ce qui apparaît ici c'est la mise à l'échelle par le nombre de boucles, okay. Alors tout ce matériau fait sens et ce qui est marrant qui à ce moment-là n'a pas une vraie bonne explication, c'est

[5]Le théorème sur la page concernant les connexions plates équi-singulières.

que quand vous développez ce modèle singulier universel, j'expliquerai quel est son rôle, vous obtenez les mêmes coefficients que dans la formule de l'index locale que nous avions avec Henri Moscovici avec qui je travaillais quelques années avant. Mais cela n'a pas encore trouvé d'explication conceptuelle.



Maintenant le résultat principal est le suivant : il est que si vous prenez un groupe affine pro-unimpotent, dual d'une algèbre mise à l'échelle connectée commutative, exactement ce qui arrive en physique, grâce à l'algèbre de Hopf de Dirk, alors d'abord avant tout, il existe une bijection canonique entre les classes d'équivalence des connexions plates équi-singulières et les représentations mises à l'échelle de ce matériau universel que j'ai défini, okay, le groupe G (ou, de manière équivalente, bien sûr, vous pouvez faire un produit tensoriel par le groupe multiplicatif G_m correspondant à l'échelle). Maintenant le modèle universel singulier fournit des termes compteurs universels, c'est un fait fantastique. Et je veux dire, c'est relié, vous savez à ce qu'on appelle les relations de Gross-'t Hooft, notamment, étant donnée une boucle, le modèle universel singulier envoie automatiquement, à travers la représentation, ρ vers la partie négative de la décomposition de Birkhoff. Et finalement, le groupe de renormalisation, que les physiciens adorent, vous savez, qui est un sous-groupe à un paramètre du groupe assigné à l'algèbre de Hopf, il est obtenu comme la composition de la représentation avec le **rg** qui avait été défini précédemment comme un morphisme du groupe additif vers le $\mathbb{U}$.



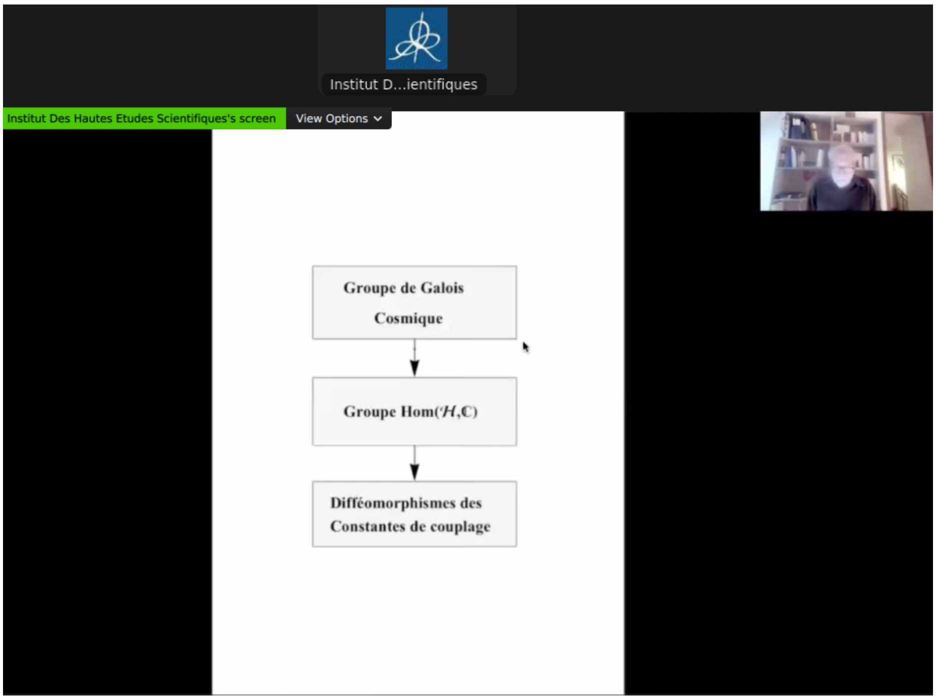
Maintenant, voyez-vous, on ne peut s'empêcher de citer Cartier parce que peut-être qu'il avait une motivation légèrement différente, mais malgré tout, il avait la vision juste, au sens où il a écrit ceci :

> *La parenté de plus en plus manifeste entre le groupe de Grothendieck-Teichmüller d'une part,...*

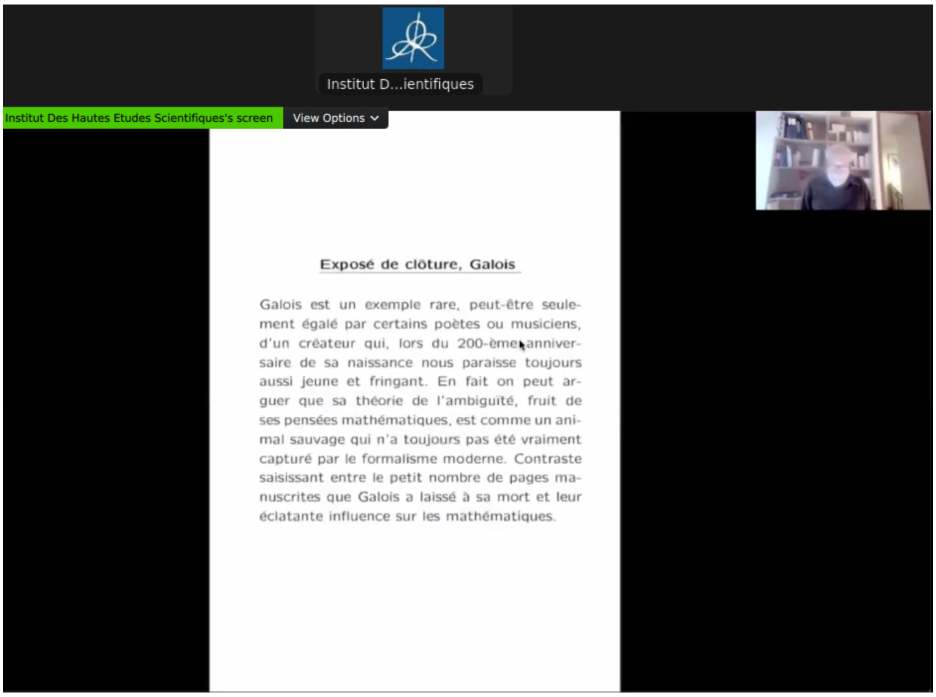
C'était une autre inspiration parce qu'elle provenait de problèmes de la Théorie des nombres,

> *et le groupe de renormalisation de la Théorie Quantique des Champs n'est sans doute que la première manifestation d'un groupe de symétrie des constantes fondamentales de la physique, une espèce de groupe de Galois cosmique !"*

Alors quand avec Matilde nous avons trouvé ce groupe, je veux dire ce groupe qui venait de la catégorie Tannakienne etc., nous ne pouvions nous empêcher de l'appeler le groupe cosmique de Galois, vous savez. C'est vraiment ce qu'il est, parce que comme je l'ai dit précédemment, à partir du travail avec Dirk, quand nous agissons sur les constantes de couplage, ce groupe est vraiment envoyé sur le groupe d'une théorie donnée. Et en retour, il s'envoie vers les différents morphismes des constantes de couplage. Donc en fait, ce groupe cosmique de Galois agit exactement comme Cartier l'envisageait à peu près, il agit effectivement sur les constantes fondamentales, bien sûr, comme vous le savez très bien, je veux dire les constantes fondamentales de la physique,



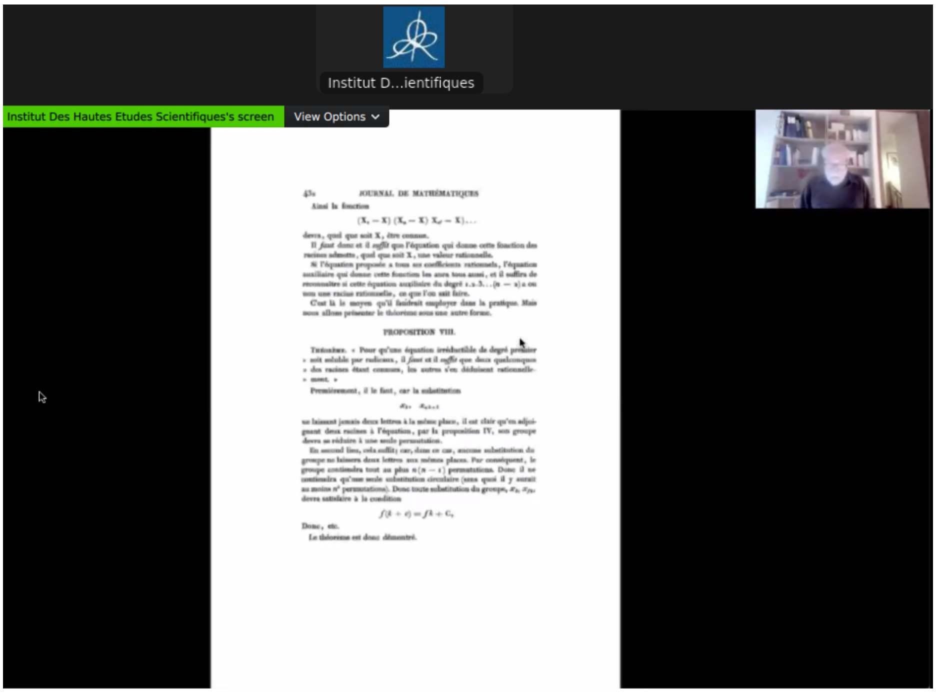
en fait les constantes fondamentales de la physique ne sont pas des constantes, ce sont des fonctions, elles dépendent de l'énergie d'échelle, donc c'est exactement ce qui a lieu ici. Maintenant, comment tout ceci me ramène-t-il à Galois ? Parce que l'idée derrière le groupe de renormalisation, l'idée derrière tout ceci, est que vous savez, quand vous faites de la physique, vous trouvez qu'il y a quelque chose de très insaisissable dans le processus de renormalisation qui est qu'il reste encore une ambiguïté, et cette ambiguïté est à lier aux idées fondamentales de l'ambiguïté telle que l'entend Galois. J'ai eu l'occasion de donner une conférence à propos de Galois, j'ai dit à cette occasion la chose suivante :



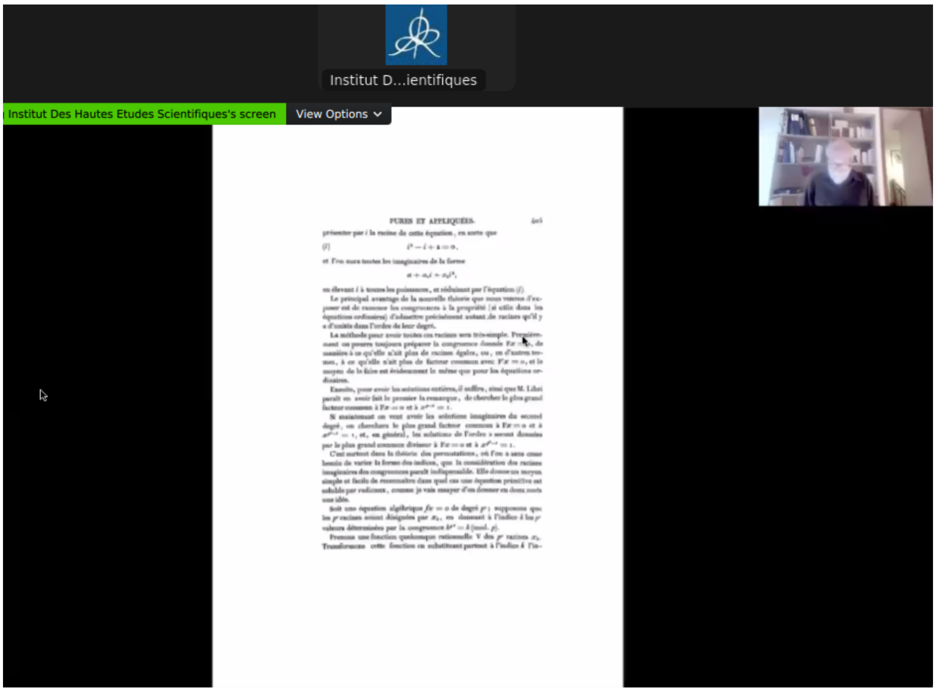
"Galois est un rare exemple, peut-être seulement égalé par quelques poètes ou musiciens, de créateur qui, lors du 200^{ième} anniversaire de sa naissance, apparaît toujours aussi jeune et fringant, je ne sais comment traduire cet adjectif en anglais. Et je continuerai

en disant que ce que l'on peut dire de sa théorie de l'ambiguïté, qui est le fruit de sa propre source mathématique, est comme un animal sauvage qui n'a jamais été capturé par le formalisme moderne."

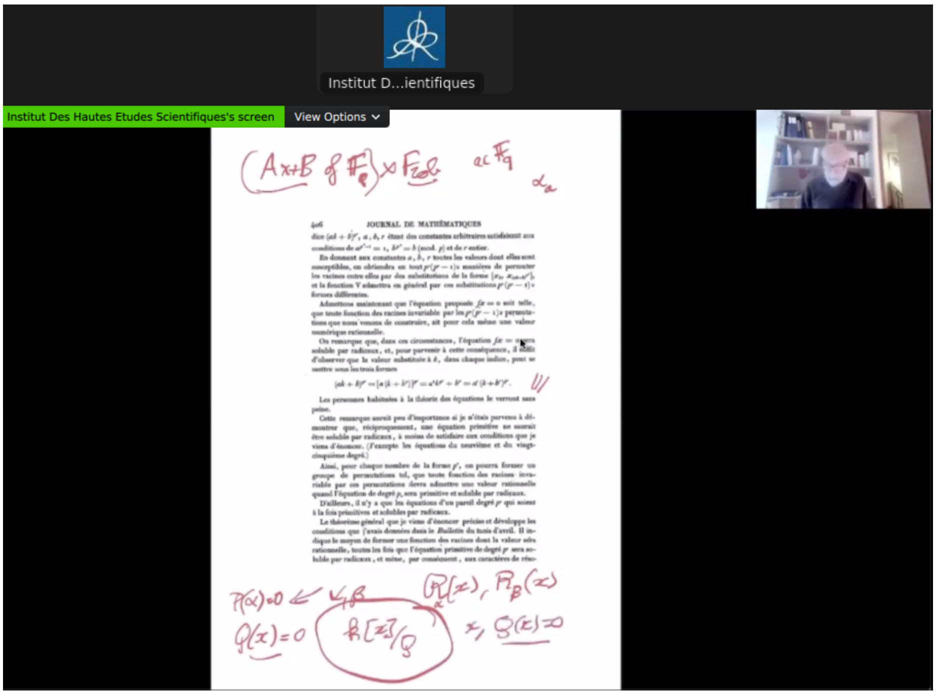
Grothendieck était très près de la capturer, vous savez, avec le formalisme Tannakien, et tout ça, mais je veux dire qu'il y a un contraste étonnant entre le petit nombre de pages que Galois a laissées à sa mort et son incroyable influence sur les mathématiques. Maintenant, vous savez, il y a des incompréhensions à propos de Galois parce que beaucoup de gens pensent que ce que Galois a fait a été d'inventer le groupe de Galois, et de comprendre les symétries et etc. Mais cela est très loin de la réalité de ce qu'il a fait. Ce qu'il a fait, si vous voulez, il y a toujours ce contraste entre la forme que prennent les choses et les choses qui sont très concrètes, qui sont derrière. Bien sûr, ce contraste est très présent dans la renormalisation. Mais il est également présent dans le travail de Galois.



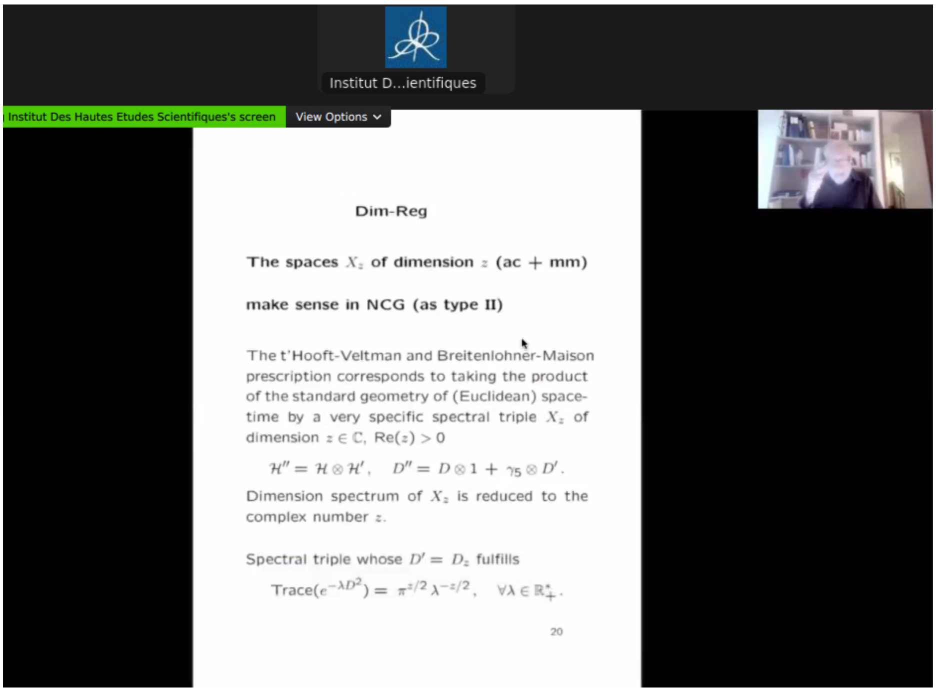
Et on doit savoir, pour apprécier le travail de Galois, que c'est à 17 ou 18 ans qu'il a écrit l'article dans lequel il définit un corps fini, que dans les pays anglo-saxons, on appelle des corps de Galois et qui en France s'appelle champs de Galois parce que le terme utilisé par les anglo-saxons ferait penser à son corps physique, et à sa mort, ce qui ne peut convenir. Mais ce qui est extraordinaire, c'est qu'il a énoncé son théorème incroyable à 17 ou 18 ans, et même aujourd'hui, si vous cherchez à le démontrer, vous aurez des problèmes à le faire même si vous pensez maîtriser la théorie de Galois.



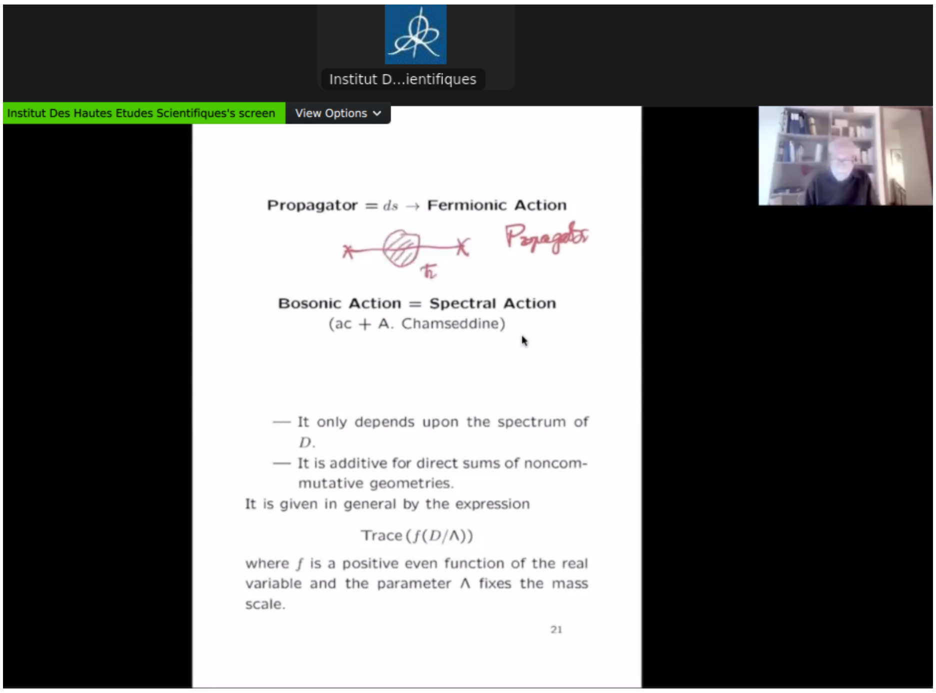
Quel est ce théorème que Galois a établi, le théorème est énoncé à peu près là, il dit en quelque sorte que si vous prenez ce qu'on appelle une équation primitive, alors pour que cette équation soit résoluble, il est nécessaire et suffisant que vous puissiez indexer ses racines par un corps fini F_q, okay, donc si vous voulez vous étiquetez les racines par des α_a où a appartient à F_q et le groupe de Galois doit être un sous-groupe de quoi ? du groupe affine, okay, le groupe $ax + b$ de F_q, okay, mais croisé par produit tensoriel avec les automorphismes de Frobenius, les puissances du Frobenius. Donc ceci est absolument époustouflant. Je veux dire, il est incroyable qu'il ait pu trouver ce résultat à cet âge, et de plus, vous savez, quand vous regardez attentivement l'article de Galois, vous trouvez ceci : quelle était sa motivation ? Sa motivation n'était pas celle de Lagrange de trouver des invariants, et etc., non, non, non, non, non : sa motivation était de trouver toutes les relations qui sont vérifiées qui lient les racines d'une équation donnée et je veux dire, ce que vous trouverez si vous allez plus profondément, vous trouverez que la manière dont il l'a fait a été de trouver une équation auxiliaire qui est d'un degré plus élevé telle que les racines de votre équation donnée, les racines comme α, β, etc., F_q le corps de Galois...



ainsi, par exemple, maintenant, alpha est un alpha de x, beta est un beta de x, et ce sont toutes des fonctions rationnelles, comme des polynômes, les équations doivent être des polynômes parce que x devrait être la solution d'une équation. Et maintenant vous savez, vous dites, "okay, c'est bien beau mais comment est-ce que je peux connaître x ?". Bon, comment connaissez-vous x ? Eh bien, x est la solution d'une autre équation, donc celles-ci étaient solution d'une équation $p(x) = 0$, désolé $p(\alpha) = 0$, okay. Et cet x est solution d'une équation de degré plus grand. Appelons cette équation par exemple $Q(x) = 0$. Donc vous demandez "okay, bon, vous avez remplacé celle-ci par celle-là ?! Mais qu'est-ce que vous y avez gagné ?". Eh bien, vous y avez gagné quelque chose d'énorme, parce que : comment résolvez-vous cette équation "Q(x)=0" ? Maintenant je le fais comme si j'étais Galois, l'élève de Picard-Vessiot : comment la résolvez-vous? Eh bien, vous prenez juste tous les polynômes sur le corps auquel vous vous intéressez, tous les polynômes $k[x]$ okay et vous divisez par q. Maintenant quand vous faites cela, bien sûr que x est une solution, et donc x satisfait $q(x) = 0$. Bon, c'est bien, oui, mais maintenant comment savez-vous que toutes les racines sont des fonctions rationnelles de ce x de telle façon que si vous voulez savoir s'il y a une relation que vous pouvez imaginer, une relation rationnelle entre les racines, vous le mettez dedans, et il la vérifiera (l'ordinateur pourra vous dire s'il la vérifie ou pas) non pas à epsilon près, non, je veux dire, qui vous le dise exactement, parce que ce que vous faites consiste à prendre cette fonction rationnelle de ces racines et vous le mettez dedans et vous vous demandez si oui ou non, le quotient est nul, peut-être si c'est un multiple de q. Maintenant cette manière formelle incroyablement puissante de résoudre une équation est au cœur d'un pouvoir qui est absolument incroyable entre les mains de Galois. Et en fait, ce que Galois a écrit, c'est que son problème était de trouver toutes les relations rationnelles existant entre les racines d'une équation, ce n'était pas de trouver des fonctions invariantes ou quoi que ce soit d'autre. Vous savez, vous avez, bien sûr, les relations triviales qui sont les fonctions symétriques mais ce que nous avons trouvé, c'est qu'en général, il y a d'autres relations et c'est cela qui a amené Galois au dit "groupe de Galois". Okay ? Okay !

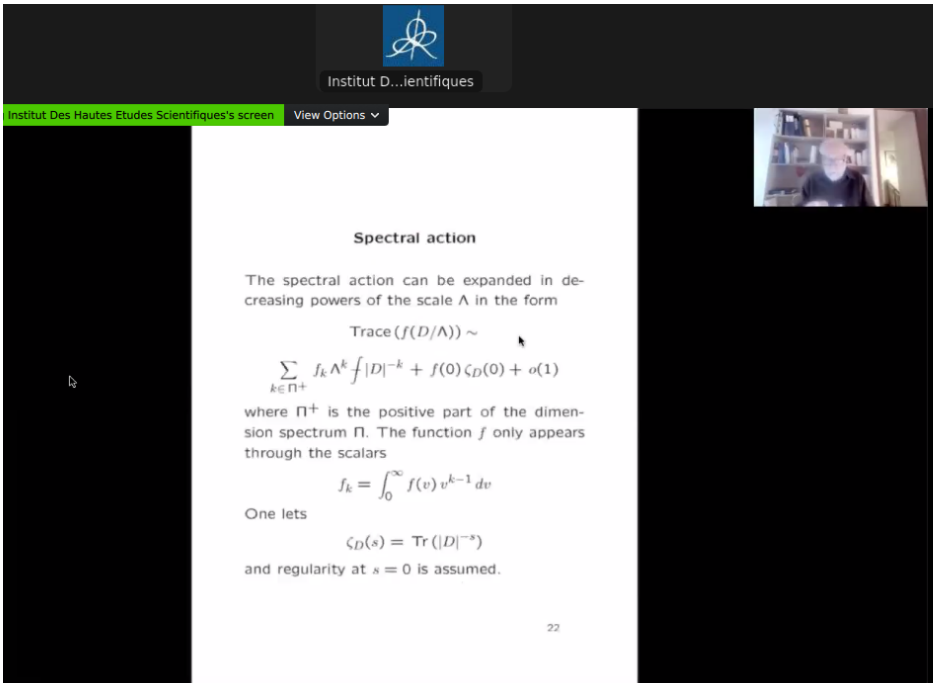


Donc maintenant, puisque il me reste très peu de temps, ce que je voudrais dire, vous savez, c'est vous raconter la fin de l'histoire en vous fournissant essentiellement quelques questions ouvertes. Donc il y a un fait que vous connaissez qui est, okay, que quand vous regardez ce modèle singulier universel, ce que ce modèle vous dit grossièrement, c'est que vous savez, quand vous écrivez que le epsilon tend vers zéro dans le bazar dim-reg, bon, nous ne devrions pas essayer d'atterrir dans le champ géométrique de manière utile. Je veux dire que le modèle universel singulier nous dit que nous devrions le suivre plutôt et en fait, nous devrions corriger la géométrie que nous avons, de telle façon voyez-vous que la renormalisation soit effectivement prise en compte par la géométrie. Maintenant, un petit pas en avant dans cette direction a été fait dans le livre avec Matilde, okay, bon, ce que nous avons fait c'est que nous avons donné une incarnation de l'espace de dimension z. C'est très rusé parce que c'est un truc de type 2 mais ce que nous avons trouvé, c'est qu'au niveau "une boucle", cela marche parfaitement bien. Notamment vous savez quand vous faites le truc t'Hooft-Veltman de la renormalisation et tout ça, vous devez gérer, à cause de la théorie de gauge et des propriétés chirales (l'anomalie chirale), vous devez gérer cette chiralité et il y a une recette qui est appelée la prescription de Breitenlohner-Maison. Et au niveau une boucle, cette prescription correspond au fait de prendre le produit de la géométrie standard par un triplet spectral très spécifique. Ici, je fais allusion à ce qu'est la géométrie non-commutative, je ne veux pas passer de temps à cela, je pense que vous le savez,

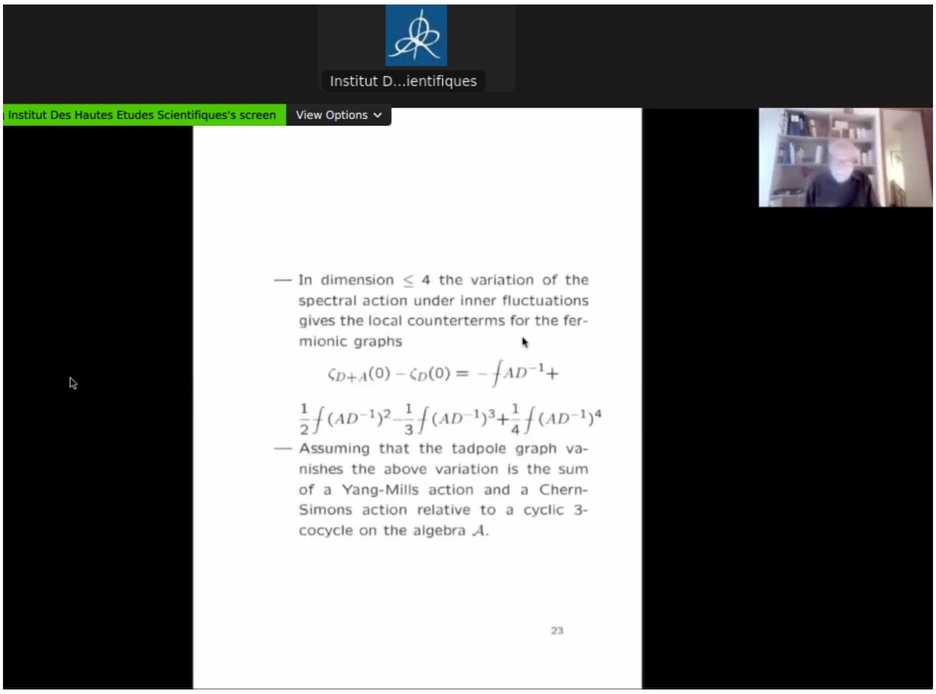


mais c'est ce sur quoi cette géométrie est basée... La géométrie elle-même est définie par le propagateur des fermions. Okay... les propriétés du propagateur, et c'est ceci qui est l'inverse du Dirac qui définit la géométrie. Et la beauté est que la théorie des champs quantiques peut déjà être prise en compte, au niveau une boucle, parce que ce propagateur est habillé par les champs usuels. Et donc, il y a des séries formelles dans $\hbar$. Maintenant, ce que nous avons fait, si vous voulez, en développant cette géométrie, avec Chamseddine et également avec Walter van Suijlekom, c'est que nous avons développé une action.

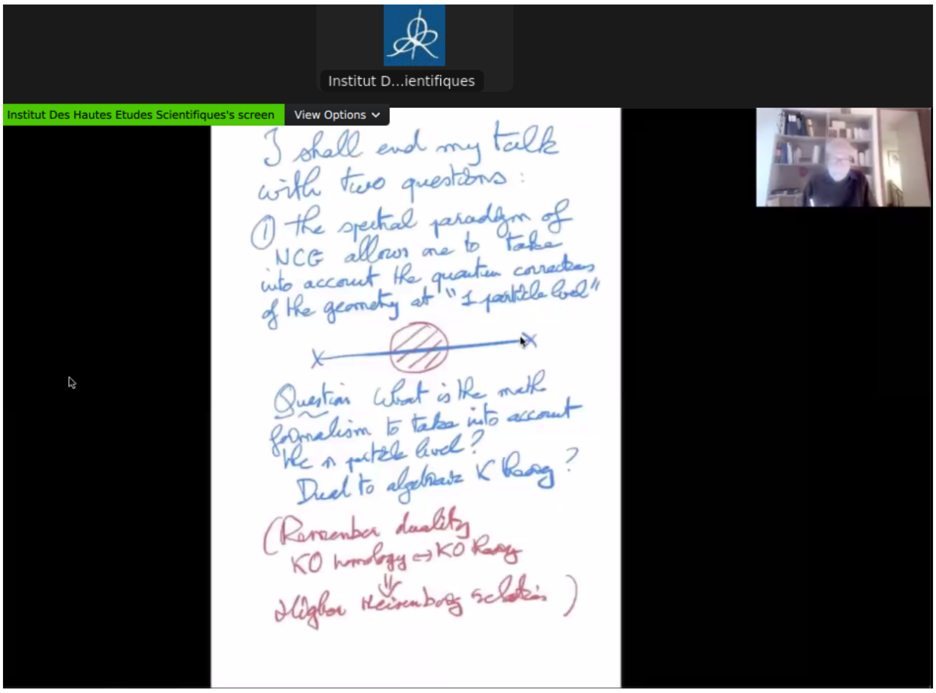
Donc maintenant, je ne vais plus traiter de quoi que ce soit de technique, je voudrais vous en donner une très spécifique, et cette action dépend vraiment de la géométrie seulement par le spectre de cet opérateur, je veux dire qui est l'inverse du propagateur. Donc elle est donnée par ce qu'on appelle l'action spectrale, etc.



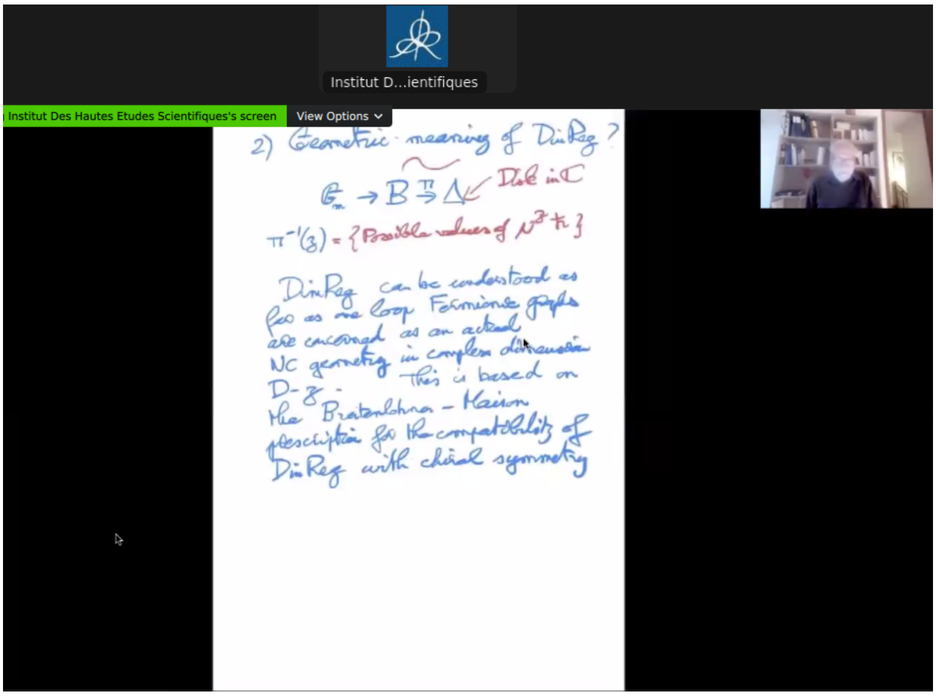
Cette action spectrale, je veux dire, vous donne dans son développement les termes importants qui interviennent dans l'action.



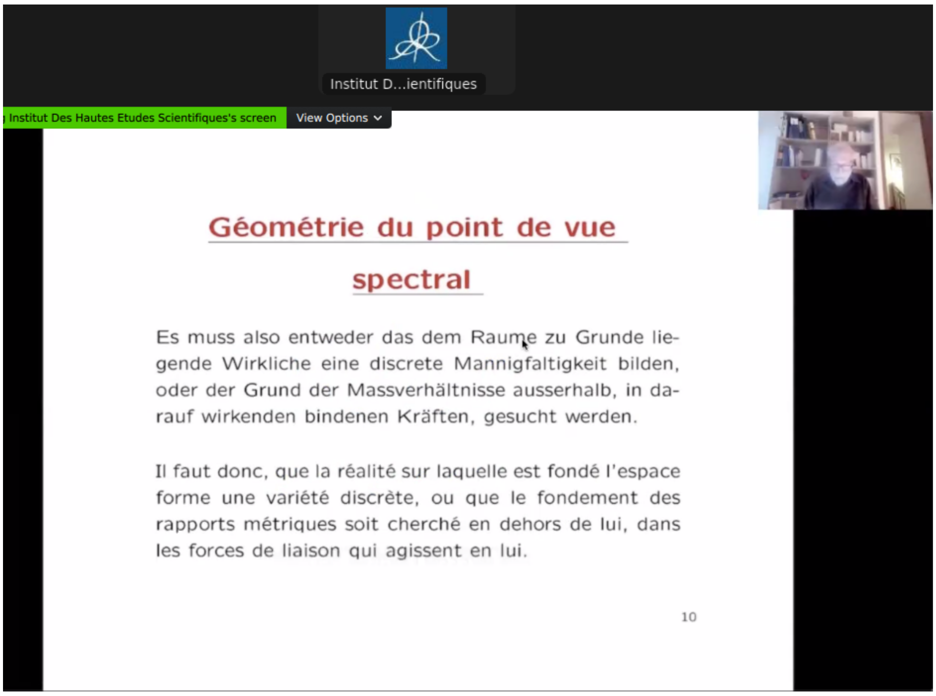
Et je veux dire de plus que cela vous autorise à commencer à calculer, quand vous regardez les fluctuations intérieures, et que vous commencez à calculer les différents termes que vous avez comme termes compteurs.



Maintenant je voudrais terminer cet exposé si vous voulez avec deux questions. Donc comme je l'ai dit, le paradigme spectral de la géométrie non-commutative permet de prendre en compte les corrections quantiques, comme je l'ai dit, vous savez, au niveau d'une seule particule. Maintenant il s'avère que la théorie quantique des champs nous apprend que, bien sûr, se restreindre au niveau d'une seule boucle ou au niveau d'une seule particule est un peu trop naïf. Et il y a une question fondamentale dont je ne connais pas la réponse, j'ai seulement quelques idées à son propos et qui est : "quel est le formalisme mathématique qui nous permettra de prendre en compte le niveau à n particules. Et alors *mon* idée est que c'est probablement le dual de la K-théorie algébrique de Quillen. Il y a donc cette théorie qui est très sophistiquée. La raison pour laquelle je dis cela est, vous savez, à cause des termes de Schwinger etc. De plus, dans ces dernières années, avec Chamseddine, Mukhanov et van Suijlekom, ce que nous avons fait, c'est que nous avons obtenu en analysant la K-homologie et la dualité entre la K-homologie et la KO-théorie, nous avons obtenu soit les relations de Heisenberg, ce qui vraiment, je veux dire, me rend très heureux parce que j'avais l'impression, qu'il n'y avait plus aucun problème avec la compréhension du groupe de gauge, et tout ça, qui apparaît dans le Modèle standard, ils sont forcés malgré vous par cette dualité. Et ce qui se passe c'est qu'au lieu de cela, au lieu d'être dans un truc très très arbitraire, nous sommes dans un truc qui à cause de cette dualité et tout ça, est celui qui peut être encapsulé par la recette non triviale la plus simple. Maintenant la seconde question est, comme je l'ai dit précédemment, quelle est la signification géométrique de dim-reg ?



Ici je mentionne, vous savez, que quand vous regardez cette fibration que j'ai mentionnée précédemment, vous savez que la fibre au-dessus de z qui est dans le disque ici, ce sont les valeurs possibles, c'est très étrange, ce ne sont pas celles de μ, ce sont les valeurs possibles de μ à la puissance z fois $\hbar$, où $\hbar$ est la constante de Planck. Maintenant, comme je le disais, vous savez, dim-reg a été compris jusqu'ici comme traitant de la famille des graphes à une boucle, et c'est basé sur le dim-reg etc., mais le rêve que j'ai est que quelqu'un soit capable de réconcilier notre compréhension du Modèle Standard couplé à la Gravité venant de la pure gravité sur une structure fine de l'espace-temps avec la renormalisation et que cette réconciliation, en quelque sorte, si vous voulez, correspondrait à une sorte de réalisation optimale de ce que Riemann avait dit dans sa leçon inaugurale,



notamment que la véritable géométrie devrait être entièrement basée sur les forces qui sont impliquées aux très petites échelles.

Okay donc je terminerai sur ce point et je vous remercie de votre patience.