

# Application du calcul opérationnel ou symbolique à la Théorie des nombres premiers

BALTH. VAN DER POL, D. SC.

Laboratoire de physique des usines  
de lampes à incandescence de N.V. Philips.  
Eindhoven, Pays-Bas

§1. Dans une série d'articles [1] remontant à 1929, le calcul opérationnel, tel qu'il a été initialement développé par O. Heaviside, a été étendu dans différentes directions. Alors que Heaviside appliquait ses méthodes principalement à des problèmes liés à des circuits électriques à paramètres constants (indépendants du temps) qui étaient initialement au repos, la méthode a pu être étendue à des conditions initiales arbitraires. Mais des équations différentielles avec coefficients variables ont également pu être attaquées avec cette méthode et les propriétés des solutions ont pu être étudiées. De nombreuses nouvelles relations entre les différentes fonctions comme les fonctions de Bessel, les harmoniques sphériques, les polynômes de Laguerre et de Hermite, et d'autres, ont pu être obtenues d'une façon extrêmement simple. La méthode a également pu être étendue à un "calcul opérationnel simultané" où deux variables ou davantage sont traitées de façon opérationnelle. À nouveau, en suivant Heaviside, la méthode s'avéra une arme puissante pour évaluer des intégrales.

Il est bien connu que dans son essence, le calcul opérationnel de Heaviside et les extensions obtenues plus tard sont basés sur la transformation de Laplace. Ce point a été souligné par J. R. Carson [2] et à plusieurs occasions par nous-mêmes [1]. Mais il est peut-être moins connu que O. Heaviside lui-même a pleinement et clairement souligné cela dans son livre *Théorie électromagnétique*, iii. p. 236 (Londres, édition des Frères Benn, 1922).

La grande valeur heuristique, pourtant, du calcul symbolique ne semble pas avoir encore été totalement réalisée, bien qu'un ensemble de règles simples ait été développé qui en rend l'usage relativement simple.

C'est le but du présent article que d'appliquer le calcul symbolique cette fois à quelques problèmes liés à la théorie des nombres premiers; la facilité et la simplicité avec lesquelles les résultats sont obtenus peut, nous l'espérons, à nouveau montrer la grande puissance heuristique du calcul symbolique. Mais son usage dans ce domaine présente un autre grand avantage sur les méthodes usuelles en ce sens que les développements peuvent plus facilement être présentés *graphiquement*, amenant une série de graphiques qui, pensons-nous, peuvent considérablement clarifier les propriétés de nombreuses fonctions discontinues appartenant à la théorie des nombres. Cette possibilité est offerte par le fait que l'"image" opérationnelle d'une fonction "originale" discontinue est une fonction continue. Comme, de plus, l'"originale" détermine complètement l'"image" et vice versa [3], nous pouvons déduire les propriétés des fonctions "originales" discontinues à partir de leurs "images" continues. Le grand gain ainsi obtenu sera évident (une extension plus générale du calcul symbolique est en cours de publication).

---

Communiqué par l'auteur.

Reçu le 21 Septembre 1938.

Référence de l'article : *Application of the Operational or Symbolic Calculus to the Theory of Prime Numbers*, *Phil. Mag.*, S 7, vol. 26, n° 179, Déc. 1938, p. 921.

Traduction en français : Denise Vella-Chemla, septembre 2021.

§2. Si est donnée une fonction  $h(x)$  que nous appellerons la fonction “originale”, on obtient son “image”  $f(p)$  à l’aide de l’intégrale

$$(1) \quad f(p) = p \int_0^{\infty} e^{-px} h(x) dx,$$

relation (1) que nous dénoterons par

$$(2) \quad f(p) \doteq h(x),$$

en supposant en même temps, comme cela a été habituel jusqu’ici dans le calcul symbolique, toutes nos fonctions originales comme étant nulles pour  $x < 0$ . Ainsi, en citant quelques résultats antérieurs à [1], on montre facilement à l’aide de (1) que

$$(3a) \quad \frac{p}{p - \alpha} \doteq e^{\alpha x}$$

$$(3b) \quad \frac{1}{p} \doteq x,$$

$$(3c) \quad \frac{1}{p - 1} \doteq e^x - 1,$$

$$(3d) \quad A \doteq A, \quad (A = \text{une constante arbitraire}),$$

$$(3e) \quad \log \frac{1}{p} \doteq \log x + C \quad (C = \text{constante d'Euler}),$$

$$(3f) \quad -\log(p - 1) \doteq \text{Ei}x = \int_{\infty}^{-x} \frac{e^{-s}}{s} ds,$$

résultats auxquels nous ajoutons

$$(4) \quad \log(\alpha p + \beta) \doteq \log \beta + \int_{\frac{\beta}{\alpha} x}^{\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds = \log \beta - \text{Ei} \left( -\frac{\beta}{\alpha} x \right),$$

cette dernière relation découlant également directement de (1).

Une fonction très importante, dont nous ferons un usage considérable ultérieurement, est la *fonction unité*, que nous dénotons par  $U(-a)$  et qui vaut zéro pour  $x < a$ , où  $a$  est une constante positive, et qui est égale à 1 lorsque  $x > a$ .

Son image peut, pour  $\text{Re } p > 0$ , être directement obtenue à partir de (1) comme suit :

$$p \int_0^{\infty} e^{-px} U(x - a) dx = p \int_a^{\infty} e^{-px} \cdot 1 \cdot dx = e^{-ap},$$

ou, pour l’écrire plus rapidement :

$$(5) \quad e^{-ap} \doteq U(x - a).$$

Les données du calcul symbolique fournies ici suffisent à obtenir non seulement le “théorème des nombres premiers”, mais également quelques autres relations de la théorie des nombres.

§3. Considérons d’abord la fonction en escalier  $[x]$ , où, comme habituellement, les crochets signifient le plus grand entier inférieur à une variable réelle  $x$ . Cette fonction est présentée sur la fig. 1. Comme indiqué par la zone grisée, on peut la considérer comme la superposition de la fonction

unité  $U(x - 1)$ , sautant à  $x = 1$ , la fonction unité  $U(x - 2)$ , sautant à  $x = 2$ , etc.

Donc, en accord avec (5), on a

$$e^{-p} + e^{-2p} + e^{-3p} + \dots \doteq [x],$$

ou

$$(6) \quad \frac{1}{e^p - 1} \doteq [x], \quad \text{Re } p > 0.$$

FIGURE 1

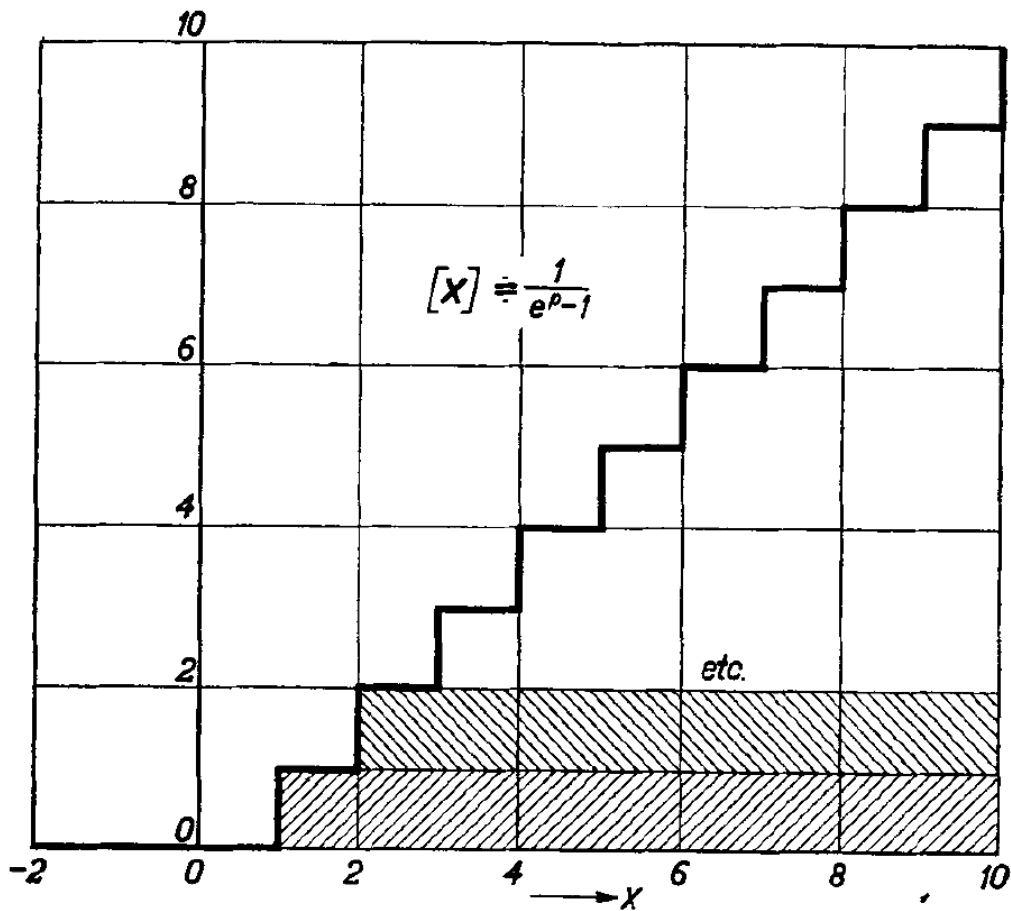
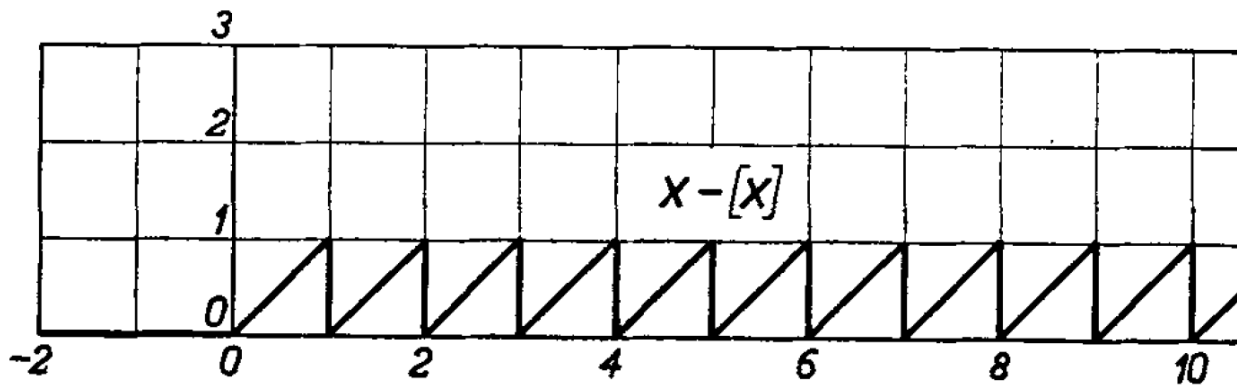


FIGURE 2



Il est, de plus, facile de trouver l'image de la fonction en dents de scie de la fig. 2 donnée par  $x - [x]$ , car, à l'aide de (3b), nous avons directement

$$(7) \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{e^p - 1} \doteq x - [x],$$

ou, si nous soustrayons  $\frac{1}{2}$  des deux côtés (en rendant la moyenne nulle),

$$(8) \quad x - [x] - \frac{1}{2} \doteq \frac{1}{p} - \frac{1}{e^p - 1} - \frac{1}{2} = \frac{d}{dp} \left\{ \log \left( \frac{\frac{1}{2}p}{\sinh \frac{1}{2}p} \right) \right\},$$

dont la fonction de  $p$  joue un rôle important dans la théorie avancée des fonctions  $\Gamma$ . Elle découle ici, pourtant, d'une manière extrêmement simple et naturelle comme image de la fonction en dents de scie de la fig. 2.

**§4.** Considérons maintenant *la fonction zeta de Riemann*,  $\zeta(p)$ , comme une fonction de  $p$ , et disons que c'est l'image d'une fonction originale  $h_1(x)$  à obtenir.

Maintenant  $\zeta(p)$  est définie pour  $\text{Re } p > 1$  par la série

$$(9) \quad \zeta(p) = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots,$$

que nous pouvons écrire comme

$$(9a) \quad \zeta(p) = e^{-p \log 1} + e^{-p \log 2} + e^{-p \log 3} + \dots$$

Mais selon (5)  $e^{-p \log n}$  est l'image de  $U(x - \log n)$ , i.e. la fonction qui saute de zéro à un lorsque  $x = \log n$ . Donc la fonction originale de  $\zeta(p)$ , voir fig. 3, est la fonction qui saute d'une unité lorsque  $x = \log 1, x = \log 2, x = \log 3$ , etc, et donc nous pouvons écrire directement la relation fondamentale

$$(10) \quad \boxed{\zeta(p) \doteq [e^x]} \quad \text{Re } p > 1.$$

Il est intéressant de comparer cette relation symbolique avec la relation obtenue ci-dessus :

$$(6) \quad \boxed{\frac{1}{e^p - 1} \doteq [x]}, \quad \text{Re } p > 0$$

montrant que  $\zeta(p)$  joue le même rôle par rapport à  $e^x$  que la fonction  $\frac{1}{e^p - 1}$  joue par rapport à  $x$ .

Le fait que l'assertion (10), qui est ici obtenue pour la première fois, pourrait être obtenue (comme (6)) à l'aide du calcul symbolique sans pratiquement aucun calcul supplémentaire montre à nouveau la grande simplicité des méthodes employées. De (10) à l'aide de (1), nous pouvons maintenant écrire directement l'intégrale

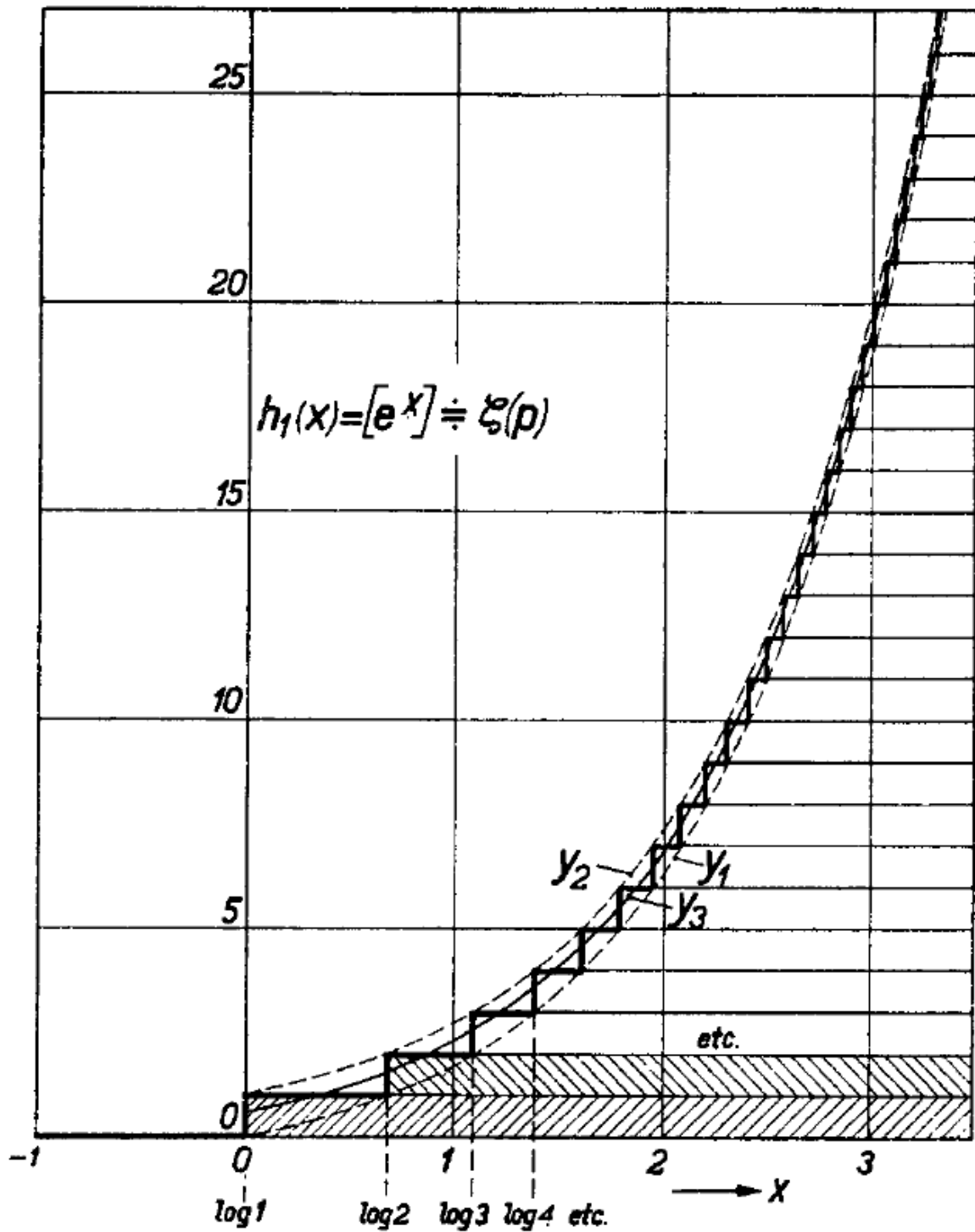
$$\zeta(p) = p \int_0^\infty e^{-px} [e^x] dx,$$

ou, en remplaçant  $e^x$  par  $s$ ,

$$(11) \quad \zeta(p) = p \int_1^\infty \frac{[s] ds}{s^{p+1}},$$

définissant, comme le prolongement en série de base (9),  $\zeta(p)$  pour  $\text{Re } p > 1$ .

FIGURE 3



Mais à nouveau, comme dans (7), nous pouvons de (10) dériver une fonction en dents de scie en soustrayant de (10) l'exponentielle (voir 3a)

$$\frac{p}{p-1} \doteq e^x,$$

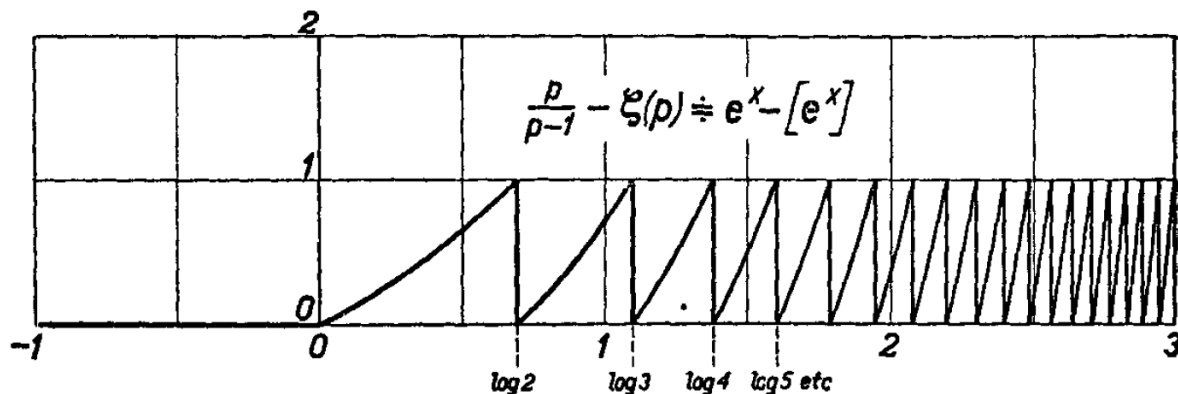
et ainsi obtenir, voir fig. 4 :

$$(12) \quad \frac{p}{p-1} - \zeta(p) \doteq e^x - [e^x], \quad \text{Re } p > 1,$$

qui est l'analogie de (7). Maintenant, il est intéressant de noter que la construction naturelle de la fonction en dents de scie  $e^x - [e^x]$  dans (12), qui oscille entre zéro et un, annule juste le seul et unique pôle de  $\zeta(p)$  lorsque  $p = 1$ , parce qu'il est connu que le membre gauche de (12) n'a pas de pôles [4]. À nouveau, de (12) à l'aide de (1), nous pouvons écrire directement l'intégrale

$$\frac{p}{p-1} - \zeta(p) = p \int_0^\infty e^{-px} \{e^x - [e^x]\} dx, \quad \text{Re } p > 1,$$

FIGURE 4



ou, en remplaçant  $e^x$  par  $s$ ,

$$(12a) \quad \frac{p}{p-1} - \zeta(p) = p \int_1^\infty \frac{s - [s]}{s^{p+1}} ds,$$

qui est déjà valide pour  $0 < \text{Re } p$ , parce que (12a) représente le prolongement analytique de la fonction gauche qui maintenant n'a pas de pôle.

Ainsi (12a) prolonge (11) de façon bienvenue dans la mesure où elle converge déjà pour  $\text{Re } p > 0$ . Par conséquent, (12a) nous fournit une intégrale le long de l'axe réel qui définit  $\zeta(p)$  également dans la bande critique  $0 < \text{Re } p < 1$ , dans laquelle tous les zéros très discutés sont situés.

Il est aussi facile de construire la fonction originale de

$$\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) \cdot \zeta(p),$$

parce qu'elle est égale à

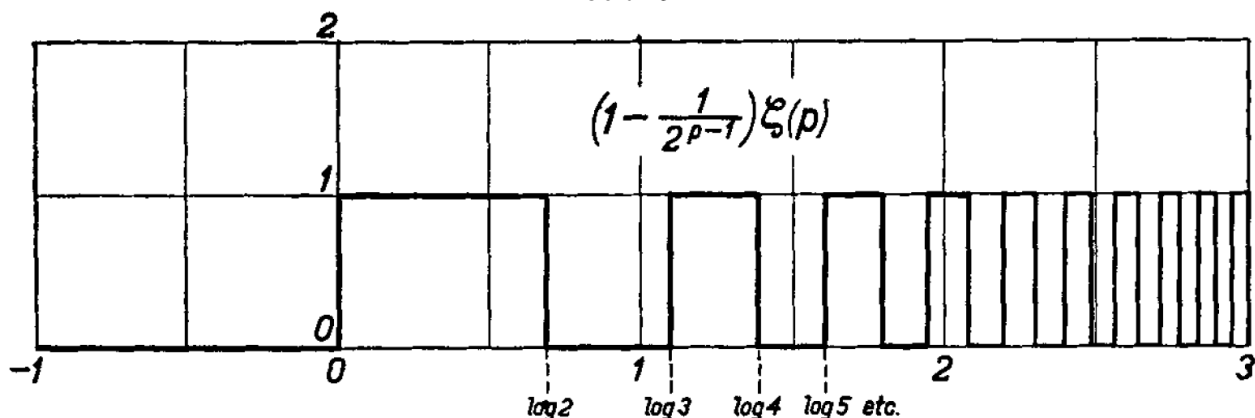
$$(13) \quad \sum_{n=1,2,3,\dots} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p} = \sum_n (-1)^{n+1} e^{-p \log n},$$

et que par conséquent elle représente la fonction discontinue bornée au-dessus par le carré de la fig. 5, qui saute d'une unité lorsque  $x = \log(2n - 1)$  et descend d'une unité lorsque  $x = \log(2n)$ , et ensuite oscille à nouveau entre 0 et +1. À nouveau, l'image dans (13), représentant une fonction originale qui reste ainsi finie partout, reste finie partout lorsque  $p = 1$ .

**§5.** Dans le but maintenant de dériver d'une manière plus simple la "théorie des nombres premiers" et quelques autres relations de la théorie des nombres, notons, voir la fig. 3, que

$$h_1(x) = [e^x],$$

FIGURE 5



la fonction originale de  $\zeta(p)$ , est partout contenue entre deux limites  $y_1$  et  $y_2$ , où

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^x - 1, \\ y_2(x) &= e^x, \end{aligned}$$

ou opérationnellement

$$(14) \quad \begin{cases} y_1(x) \doteq \frac{p}{p-1} - 1 = \frac{1}{p-1}, \\ y_2(x) \doteq \frac{p}{p-1}, \end{cases}$$

dont nous pouvons considérer les deux fonctions de  $p$  comme une première approximation grossière de  $\zeta(p)$ , mais où il est complètement tenu compte de son unique pôle lorsque  $p = 1$ . La première expression,  $\frac{1}{p-1}$  est également obtenue quand dans (9), on remplace la somme par une intégrale comme

$$\int_1^\infty \frac{dn}{n^p} = \frac{1}{p-1}.$$

Une approximation encore meilleure,  $y_3(x)$ , comprise entre  $y_1(x)$  et  $y_2(x)$ , est directement évidente en considérant la fonction originale  $h_2(x)$  de  $\zeta(p+1)$ . Car, voir la fig. 6,  $\zeta(p+1)$  selon (9), est donnée par

$$(15) \quad \zeta(p+1) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^{p+1}} = 1 e^{-p \log 1} + \frac{1}{2} e^{-p \log 2} + \frac{1}{3} e^{-p \log 3} + \dots$$

la fonction originale  $h_2(x)$  qui est représentée par la ligne coupée de cette figure, parce que, selon les règles du calcul symbolique exposées plus haut, la fonction originale de (15) est la fonction qui saute d'une unité lorsque  $x = \log 1$ , saute d'un demi lorsque  $x = \log 2$ , d'un tiers lorsque  $x = \log 3$ , etc. L'ordonnée de cette fonction au saut lorsque  $x = \log n$  est donc  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ . Elle tend ensuite vers une ligne droite. Maintenant, la définition de la constante d'Euler  $C = 0.5772$  est

$$\text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right\} = C,$$

et par conséquent la fonction  $h_2(x)$  de la fig. 6 tend vers  $x + C$ . Les deux fonctions correspondantes  $y_1$  et  $y_2$  de la fig. 6 dérivées de (14) sont opérationnellement

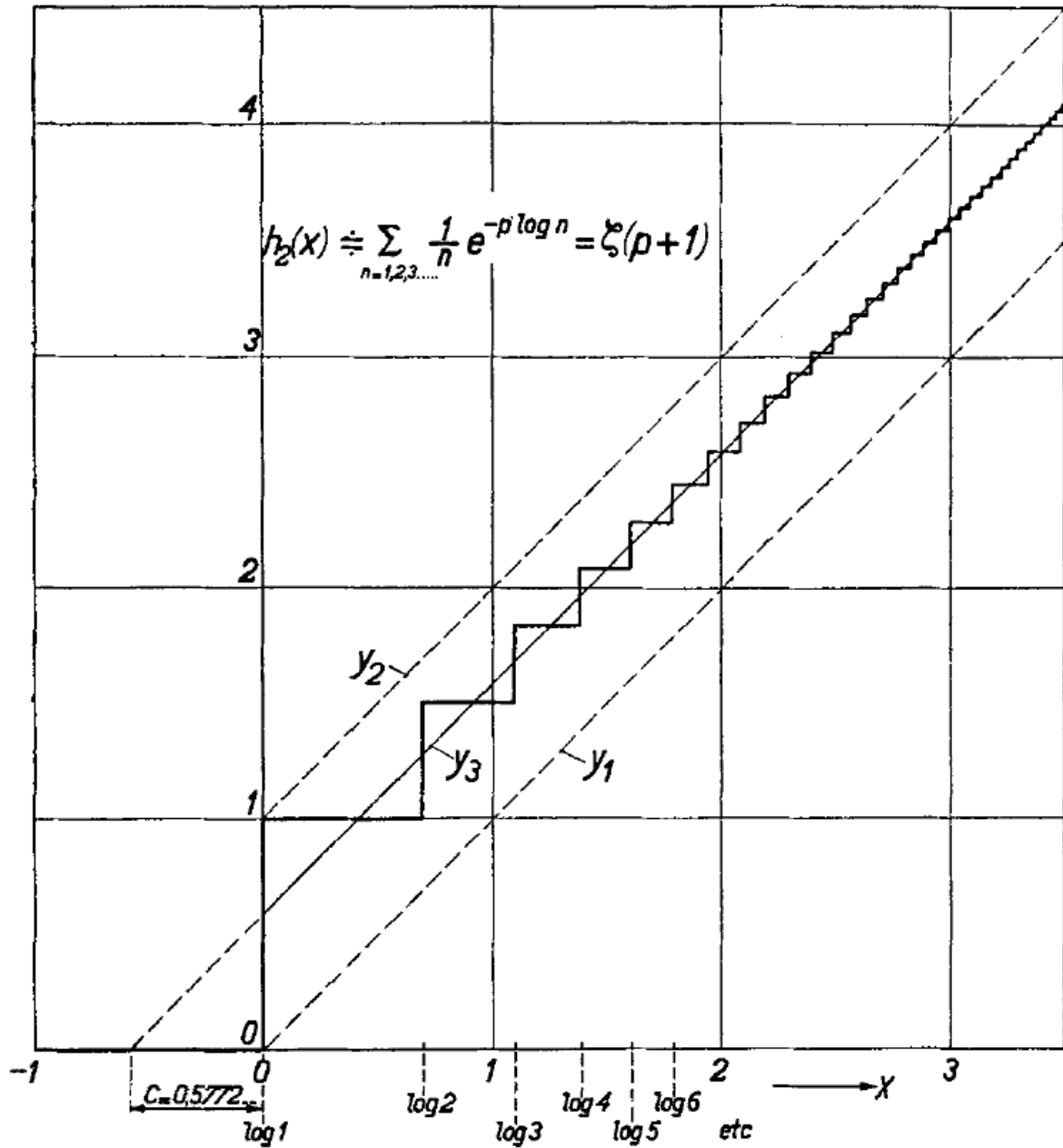
$$\frac{1}{(p+1) - 1} = \frac{1}{p} \quad \text{and} \quad \frac{p+1}{(p+1) - 1} = \frac{1}{p} + 1,$$

dont les fonctions originales sont, comme montré sur la fig. 6,

$$y_1 = x \doteq \frac{1}{p},$$

$$y_2 = x + 1 \doteq \frac{1}{p} + 1.$$

FIGURE 6



La meilleure approximation est donc  $y_3 = x + C$ , ou, dans le  $p$ -corps,

$$y_3 = x + C \doteq \frac{1}{p} + C.$$

Ainsi, la meilleure approximation dans la fig. 3 devient

$$y_3 \doteq \frac{1}{p-1} + C,$$



ou

$$y_3 = e^x - 1 + C,$$

étant bornée, comme on le voit sur la fig. 3, entre  $y_1$  et  $y_2$ .

§6. Nous avons donc trouvé deux approximations grossières de  $\zeta(p)$ , viz.,

$$(14) \quad y_1 \doteq \frac{1}{p-1} \quad \text{et} \quad y_2 \doteq \frac{p}{p-1}$$

et une meilleure,

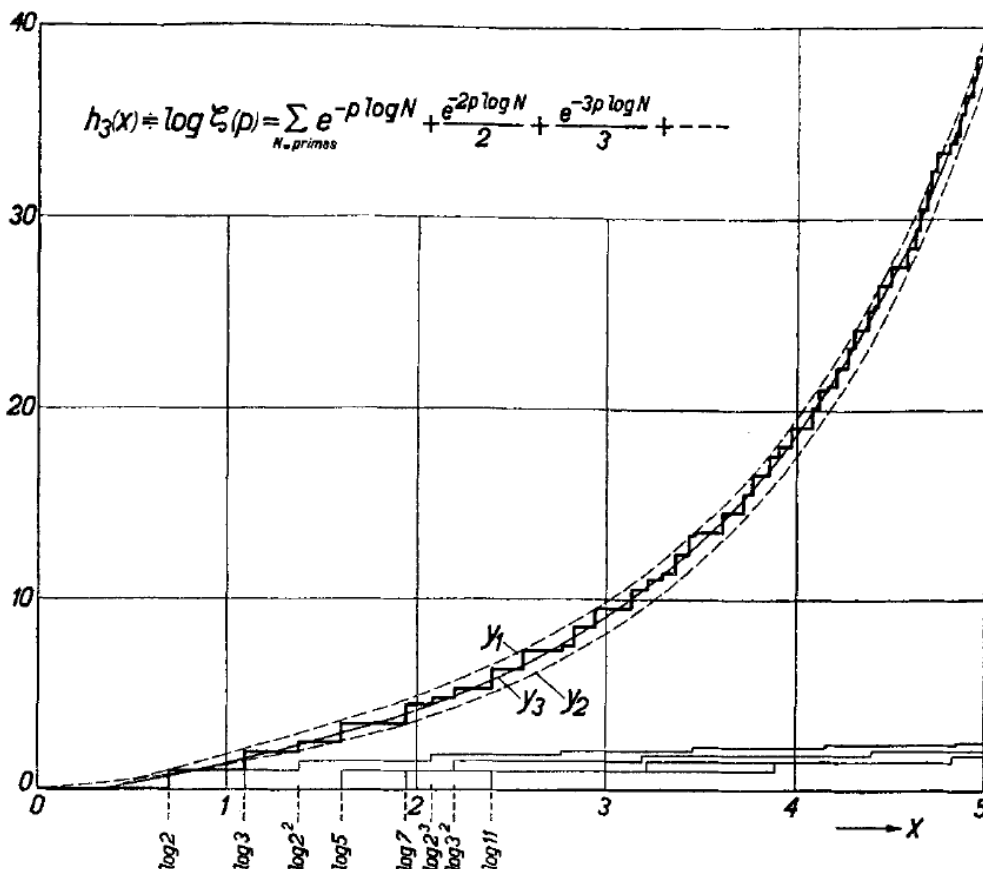
$$(16) \quad y_3 \doteq \frac{1}{p-1} + C,$$

La dernière expression, de plus, confirme le résultat connu [5] :

$$\lim_{p \rightarrow 1} \left( \zeta(p) - \frac{1}{p-1} \right) = C,$$

de telle façon que les approximations utilisées ici prennent pleinement en compte le seul pôle de  $\zeta(p)$ . Il est très intéressant, comme nous le verrons ultérieurement, que ces approximations grossières suffisent déjà à dériver quelques théorèmes asymptotiques des nombres premiers, alors que les irrégularités dans les fonctions  $h_1(x)$  et  $h_2(x)$  des fig. 3 et fig. 4 et des figures suivantes doivent être produites par les propriétés les plus détaillées, comme doivent l'être les zéros, de  $\zeta(p)$ .

FIGURE 7



§7. Nous sommes maintenant prêts à dériver la théorie des nombres premiers. Considérons donc  $h_3(x)$ , la fonction originale de  $\log \zeta(p)$ , pour laquelle, selon (14), on a les approximations grossières

$$(17) \quad y_1 \doteq \log \left( \frac{1}{p-1} \right) \quad \text{et} \quad y_2 \doteq \log \left( \frac{p}{p-1} \right)$$

et l'approximation meilleure

$$(18) \quad y_3 \doteq \log \left( \frac{1}{p-1} + C \right)$$

Maintenant la célèbre expression d'Euler reliant  $\zeta(p)$  pour les *nombre ordinaires*  $n$  et les *nombre premiers*  $N$  est

$$(19) \quad \zeta(p) = \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n^p} = \prod_{N=2,3,5,\dots} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{N^p}} \right),$$

ou, en prenant les logarithmes,

$$(20) \quad \log \zeta(p) = \sum_{N=\text{premier}} e^{-p \log N} + \frac{1}{2} e^{-2p \log N} + \frac{1}{3} e^{-3p \log N} + \dots$$

La fonction originale  $h_3(x)$  du second membre de (20) est à nouveau facilement construite (voir fig. 7); car, en prenant le premier nombre premier, viz. 2, d'abord, cela signifie, comme décrit en bas de la figure, que la fonction sautera d'une unité lorsque  $x = \log 2$ , d'un demi lorsque  $x = \log 2^2$ , d'un tiers lorsque  $x = \log 3^3$ , etc. Cette contribution due au premier nombre premier 2 est représentée par la courbe fine au bas de la fig. 7. Cela prend en compte le premier nombre premier, viz. 2. On peut à nouveau construire une fonction similaire pour le second nombre premier, viz. 3, pour le troisième, viz. 5, etc., et ajouter tous les résultats. Ainsi, la courbe épaisse de la fig. 7 est obtenue. Maintenant, selon (17) et (18), nous avons pour  $\log \zeta(p)$  les approximations

$$(21) \quad \begin{cases} y_1(x) \doteq \log \left( \frac{1}{p-1} \right), \\ y_2(x) \doteq \log \left( \frac{p}{p-1} \right), \\ y_3(x) \doteq \log \left( \frac{1}{p-1} + C \right), \end{cases}$$

qui, avec l'aide de (3), sont vues comme équivalentes à

$$(22) \quad \begin{cases} y_1(x) = \text{Ei}(x), \\ y_2(x) = \text{Ei}(x) - \log x - C, \\ y_3(x) = \log(1 - C) - \text{Ei} \left\{ -x \left( \frac{1}{C} - 1 \right) \right\} + \text{Ei}(x). \end{cases}$$

Ces fonctions sont également décrites dans la fig. 7, qui montre l'approximation très proche de la fonction discontinue effective, même pour de petites valeurs de  $x$ . De plus, pour  $x \gg 1$ , les trois fonctions de (22) tendent vers  $\text{Ei}(x)$ . Mais selon la construction de la courbe discontinue de la fig. 7, l'ordonnée lorsque  $x_0 = \log N_0$  (si nous négligeons pour chaque nombre premier tous les sauts suivant le premier, que nous appellerons les sauts subsidiaires) est égal à  $\pi(N_0)$ , le nombre de nombre premiers inférieurs à  $N_0$ , parce que pour chaque nombre premier, la fonction fait un saut d'une unité. Par conséquent pour de grandes valeurs de  $x_0$ , on a

$$\pi(N_0) \approx \text{Ei}(x_0) = \text{Ei}(\log N_0),$$

et, comme

$$\text{Ei}(x) = \int_{\infty}^{-x} \frac{e^{-s}}{s} ds = \text{li}(e^x),$$

où

$$\text{li}(x) = \int_0^x \frac{ds}{\log s},$$

on obtient le *théorème des nombres premiers* asymptotique :

$$(23) \quad \pi(N) \approx li(N),$$

ou, exprimé en mots :

*le nombre de nombres premiers inférieurs à N est asymptotiquement donné par le logarithme intégral de N.*

On peut noter que ce résultat asymptotique est obtenu à partir des trois approximations (21). Leur différence devient importante seulement à l'extrémité basse de la courbe de la fig. 7, où, comme on pouvait s'y attendre,  $y_3$  montre l'approximation optimale.

**§8.** Pour dériver un autre théorème de la théorie des nombres, considérons maintenant la fonction originale  $h_4(x)$  de  $\log \zeta(p+1)$ .

À partir de (20), nous obtenons d'abord

$$(24) \quad \log \zeta(p+1) = \sum_{N=\text{premier}} \log \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{N^{p+1}}} \right) \\ = \sum_N \left\{ \frac{1}{N} e^{-p \log N} + \frac{1}{2N^2} e^{-2p \log N} + \frac{1}{3N^3} e^{-3p \log N} + \dots \right\},$$

et la contribution de chaque nombre premier à la fonction originale peut, comme cela est montré sur la fig. 8, à nouveau être lue directement à partir de (24). Car, en prenant le nombre premier 2 d'abord, on obtient la courbe fine en haut du dessin du haut de la fig. 8. Elle saute d'une unité lorsque  $x = \log 2$ , d'un huitième lorsque  $\log 2^2$ , etc., et de façon similaire pour les autres nombres premiers. Nous obtenons ainsi la courbe épaisse de la fig. 8, où la partie haute de la courbe est reproduite à plus grande échelle dans l'encart.

Maintenant, à partir de nos approximations (17) et (18) de  $\zeta(p)$ , on a comme approximations pour  $\log \zeta(p+1)$  :

$$y_1(x) \doteq \log \frac{1}{p},$$

$$y_2(x) \doteq \log \left( \frac{1}{p} + 1 \right),$$

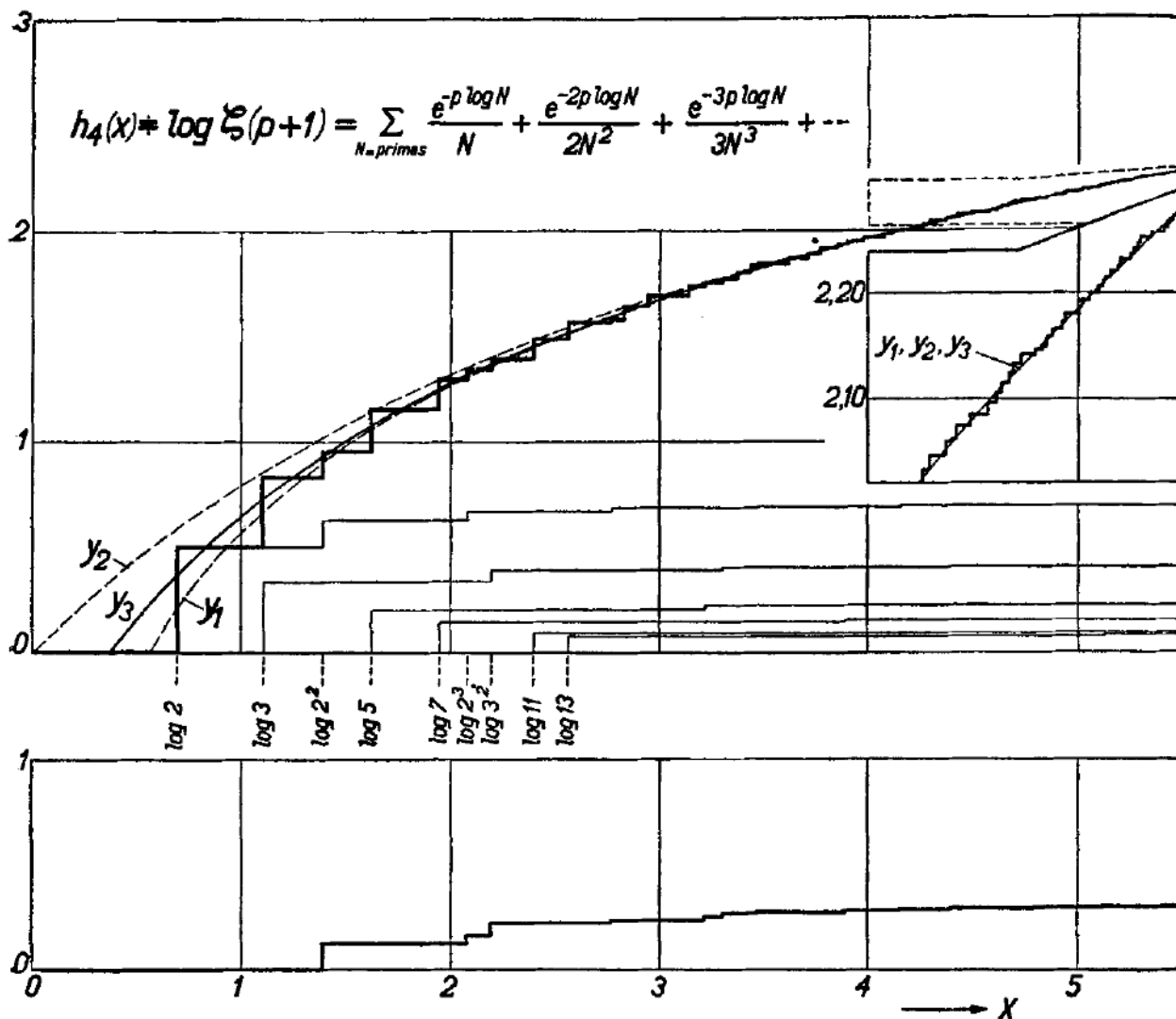
$$y_3(x) \doteq \log \left( \frac{1}{p} + C \right),$$

dont les fonctions originales peuvent facilement être obtenues ainsi :

$$(25) \quad \begin{cases} y_1(x) = \log x + C, \\ y_2(x) = \log x + C - Ei(-x), \\ y_3(x) = \log x + C - Ei\left(-\frac{x}{C}\right), \end{cases}$$

lesquelles trois fonctions sont dessinées dans la fig. 8, sur laquelle elles s'avèrent être de très bonnes approximations.

FIGURE 8



Si nous négligeons pour le moment les sauts subsidiaires, selon la construction de la fig. 8, la valeur de la fonction pour l'abscisse  $x_0 = \log N_0$  est  $\sum_2^{N_0} \frac{1}{N}$  i.e. la somme des inverses de tous les nombres premiers inférieurs à  $N_0$ . Mais il découle de (25) que cette valeur doit être approximativement égale à  $\log x_0 + C$  ou  $\log(\log N_0) + C$ . Nous avons de cette manière négligé la contribution due aux sauts subsidiaires. Cette contribution subsidiaire totale est séparément présentée en bas de la fig. 8, et elle tend vers 0.315... comme le montre la sommation numérique.

Ainsi on obtient le *second théorème des nombres premiers* :

$$\sum_N^{N_0} \frac{1}{N} \approx \log(\log N_0) + C - 0.315 \dots$$

ou

$$(26) \quad \text{Lim} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{N_0} - \log(\log N_0) \right\} \approx C - 0.315 \dots,$$

dans laquelle le premier membre contient les inverses de tous les nombres premiers inférieurs à  $N_0$ .

Exprimé par des mots :

*La somme des inverses de tous les nombres premiers inférieurs à  $N_0$  moins le logarithme du logarithme de  $N_0$  est égale asymptotiquement à  $C - 0.315\dots$ , où  $C$  est la constante d'Euler.*

Il est intéressant de comparer (26) à

$$(27) \quad \text{Lim} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N_0} - \log N_0 \right\} \approx C$$

où les inverses de tous les nombres entiers apparaissent. À part la constante additionnelle  $-0.315\dots$ , la formule (26) est de la même forme que (27), mais  $\log N_0$  dans (27) est remplacé par  $\log(\log N_0)$  dans (26).

**§9.** Dans le but de dériver encore un autre théorème, nous considérerons la fonction originale de  $-\frac{\zeta'(p)}{\zeta(p)}$ . Comme approximations, on obtient directement de (21)

$$y_1(x) \doteq \frac{1}{p-1},$$

$$y_2(x) \doteq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p},$$

$$y_3(x) \doteq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p + \frac{1-C}{C}}$$

dont les fonctions originales sont

$$(28) \quad \begin{cases} y_1(x) = e^x - 1, \\ y_2(x) = e^x - 1 - x, \\ y_3(x) = e^x - \frac{1}{1-C} + \frac{C}{1-C} e^{-\frac{1-C}{C}x}. \end{cases}$$

À nouveau, de (19) on obtient

$$(29) \quad -\frac{\zeta'(p)}{\zeta(p)} = \sum_{N=\text{primes}} \log N \cdot \{e^{-p \log N} + e^{-2p \log N} + e^{-3p \log N} + \dots\}$$

La fonction originale  $h_5(x)$  de (29) peut à nouveau se lire directement à partir de la forme de (29), car la contribution à l'expression totale de chaque nombre premier est une fonction en escalier comme celle de la fig. 1, les marches de grandeur  $\log N$  étant rencontrées lorsque  $x = \log N, x = 2 \log N \dots$ , etc. Le résultat est décrit dans la fig. 9, où on montre également les approximations (28), et où à nouveau, un très bon accord est obtenu. Toutes ces trois approximations (28) tendent, pour  $x \gg 1$ , vers  $e^x$ . En négligeant à nouveau les étapes subsidiaires, ce qui pour  $x \gg 1$  est permis, nous obtenons ainsi le théorème asymptotique

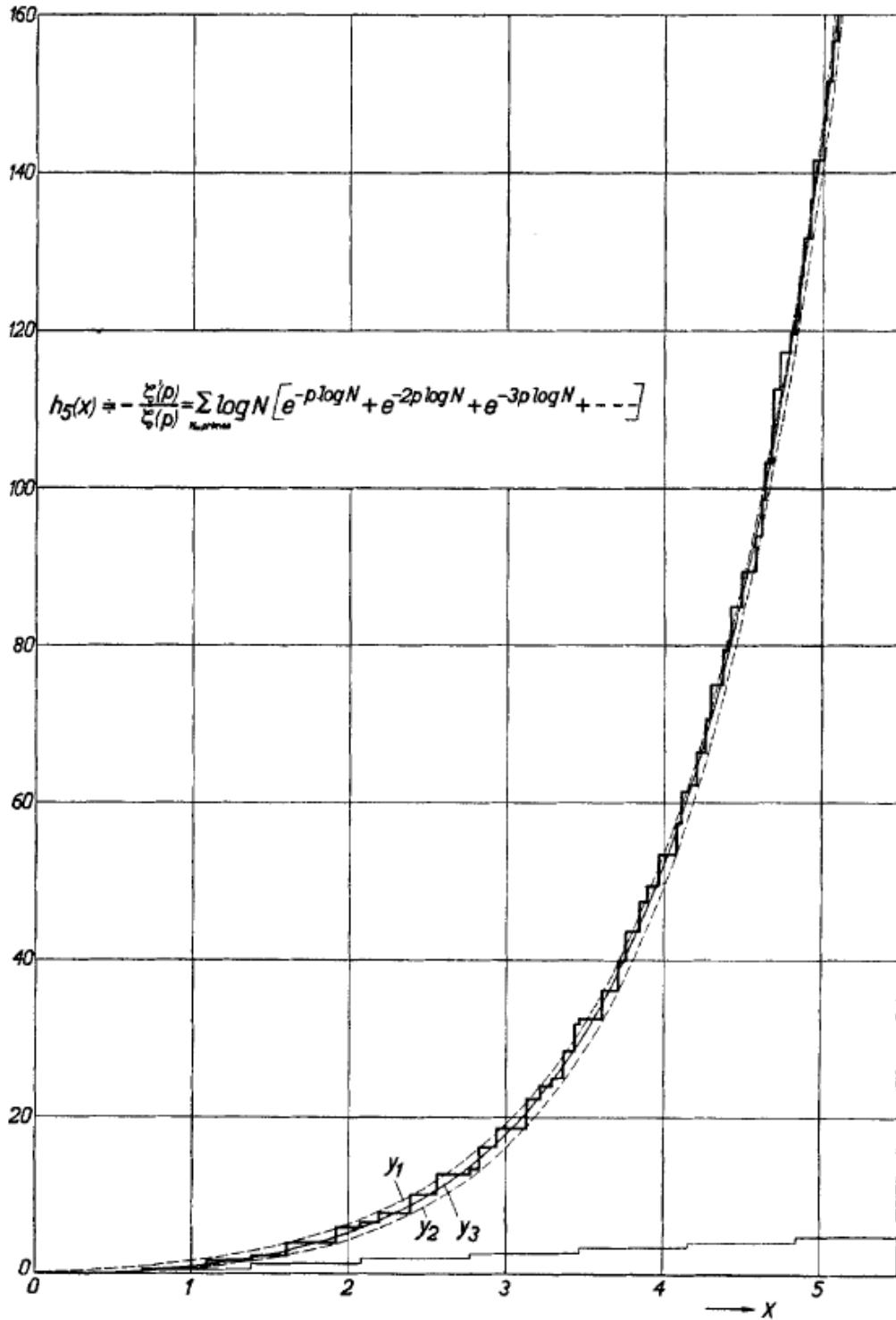
$$\sum_{N=2,3,5,\dots,N_0} \log N \approx e^{x_0} = e^{\log N_0} = N_0,$$

$$\text{ou (30)} \quad \log(2, 3, 5, 7, 11, \dots, N_0) = N_0,$$

ou exprimé par des mots ~~in words~~ :

*Asymptotiquement tout nombre premier est égal à la somme des logarithmes de tous les nombres premiers plus petits que lui.*

FIGURE 9



La construction simple (29), qui peut également être écrite comme

$$-\frac{\zeta'(p)}{\zeta(p)} = \sum_N \log N \cdot \frac{1}{e^{p \log N} - 1},$$

peut être raccourcie à l'aide de (6), produisant la relation opérationnelle

$$(31) \quad -\frac{\zeta'(p)}{\zeta(p)} = \sum_N \log N \cdot \left[ \frac{x}{\log N} \right]$$

§10. Finalement, considérons la fonction originale  $h_6(x)$  de  $-\frac{\zeta'(p+1)}{\zeta(p+1)}$ .

De la même manière que précédemment, nous obtenons comme approximations

$$\begin{aligned} y_1(x) &\doteq \frac{1}{p}, \\ y_2(x) &\doteq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}, \\ y_3(x) &\doteq \frac{1}{p} - \frac{C}{pC+1}, \end{aligned}$$

dont les fonctions originales sont

$$(32) \quad \begin{cases} y_1(x) = x, \\ y_2(x) = x + e^{-x} - 1, \\ y_3(x) = x + C(e^{-\frac{x}{C}} - 1). \end{cases}$$

Maintenant, on peut aisément obtenir

$$-\frac{\zeta'(p+1)}{\zeta(p+1)} = \sum_{N=\text{primes}} \log N \cdot \left\{ \frac{1}{N} e^{-p \log N} + \frac{1}{N^2} e^{-2p \log N} + \dots \right\},$$

dont la fonction originale  $h_6(x)$  est montrée sur la fig. 10, qui a été obtenue ainsi : la contribution du premier nombre premier, viz. 2, consiste comme décrit à nouveau en un saut au bas de la figure de grandeur  $\frac{1}{2} \log 2$  lorsque  $x = \log 2$ , et à nouveau en un saut de  $\frac{1}{2^2} \log 2$  lorsque  $x = 2 \log 2$ , etc., et de façon similaire pour les autres nombres premiers. Ainsi on obtient approximativement une ligne droite à partir des seuls nombres premiers, les approximations  $y_1$ ,  $y_2$  et  $y_3$  de (32) étant à nouveau montrées. Une encore meilleure approximation qu' $y_3$  est donnée par la relation linéaire  $y_4 = x - C$ , comme indiqué dans la figure. En omettant à nouveau les sauts subsidiaires, nous obtenons ainsi la relation asymptotique

$$\sum_N^{\text{N}_0} \frac{\log N}{N} \approx x_0 = \log \text{N}_0,$$

ou

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}} \cdot 7^{\frac{1}{7}} \dots \text{N}_0^{\frac{1}{\text{N}_0}} \approx \text{N}_0,$$

où, à nouveau, le produit contient tous les nombres premiers inférieurs à  $\text{N}_0$ .

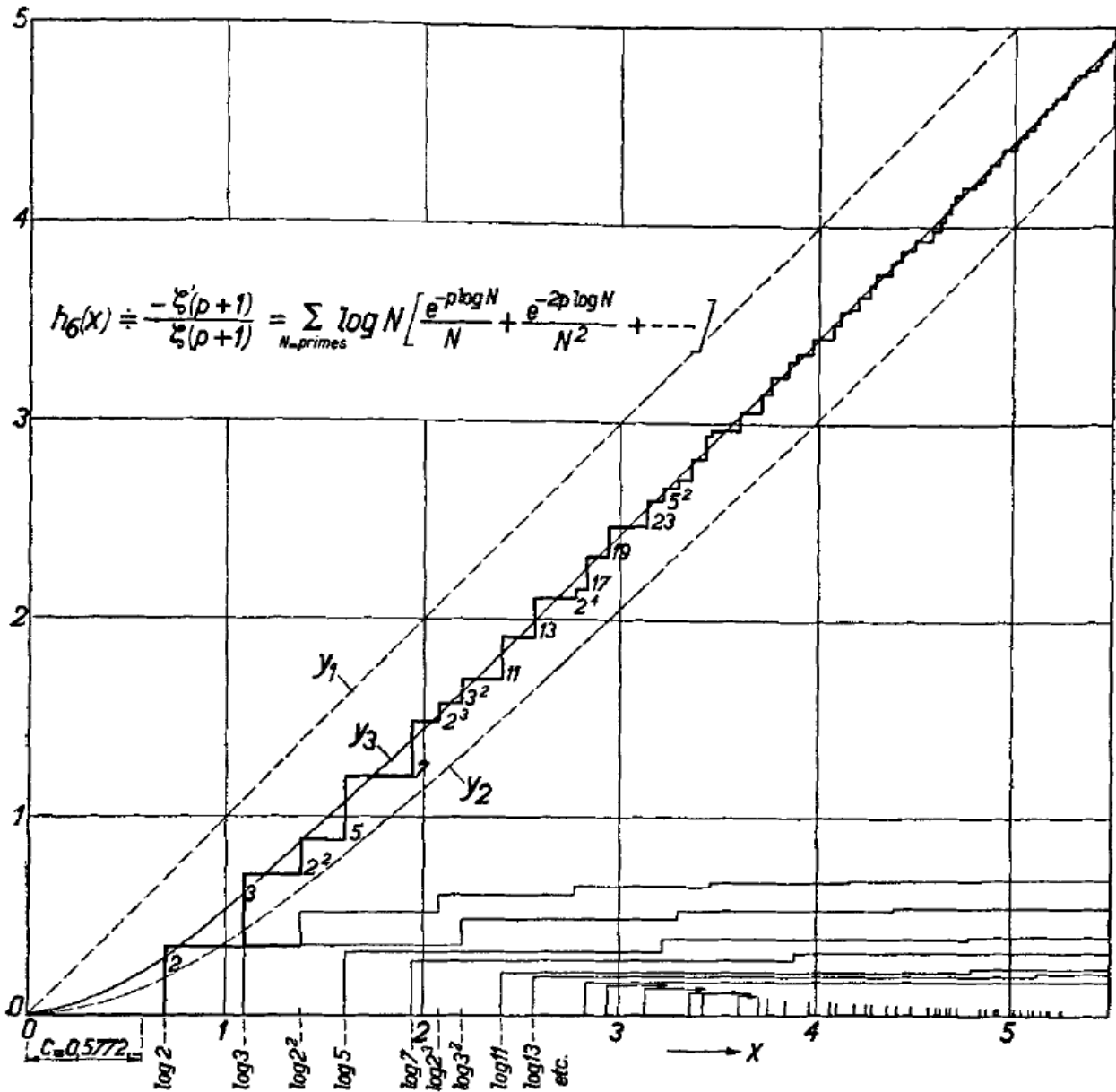
Exprimé par des mots :

*Asymptotiquement tout nombre premier est égal au produit des  $\text{N}^{\text{ièmes}}$  racines de tous les nombres premiers plus petits que  $\text{N}$ .*

En conclusion, la très bonne concordance de toutes les fonctions considérées obtenues à partir d'approximations assez grossières de la fonction  $\zeta(p)$  et de ses dérivées, où le pôle  $p = 1$  est considéré principalement, et dérivé à partir de  $\zeta(p) \doteq [e^x]$ , est remarquable. Le fait que les théorèmes asymptotiques aient pu aussi être dérivés d'une manière extrêmement simple à l'aide du calcul symbolique peut à nouveau être une preuve de la grande valeur heuristique de ce dernier.

Finalement, je voudrais remercier M. C.C.J. Addink pour avoir construit et dessiné les figures.

FIGURE 10



## Références

1. BALTH. VAN DER POL, *Phil. Mag.* vii. p. 1153 (1929) : viii. p. 861 (1929). Balth. van der Pol and K. F. Niessen, *Phil. Mag.* xi. p. 368 (1931); xiii. p. 537 (1932); *Physics*, i. p. 521 (1934); *7<sup>ds</sup>. Ned. Radio Genootsch.* vii. p. 18 (1935). K. F. Niessen, *Phil. Mag.* xx. p. 977 (1935). P. Humbert, *Le calcul symbolique*, Paris, 1934.
2. J. R. CARSON, *Electric Circuit Theory and the Operational Calculus*. McGraw-Hill, New York. 1926.
3. H. BREMEKAMP, *Proc. Acad. A'dam*, xl. p. 689 (1937). G. Doetch, *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation* (Berlin, 1937).
4. E. C. TITCHMARSH, *The zeta function of Riemann*. p. 3, (Cambridge University Press, London, 1930).
5. E. C. TITCHMARSH, *I. r.* p. 3.