

Une recherche électro-mécanique des zéros de la fonction zeta de Riemann dans la bande critique

BALTH. VAN DER POL

La base théorique qui sous-tend les recherches électro-mécaniques suivantes est liée à la représentation simple par une intégrale de la fonction zeta de Riemann dans la bande critique. À droite de la bande critique ($\text{Re } s > 1$), on a l'expression habituelle :

$$(1) \quad \Gamma(s) \cdot \zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx, \quad \text{Re } s > 1.$$

Soustraire de (1)

$$(2) \quad \Gamma(s-1) \cdot \alpha^{1-s} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x^{s-2} dx, \quad \text{Re } s > 1, \text{Re } \alpha > 0,$$

amène

$$(3) \quad \Gamma(s) \cdot \left\{ \zeta(s) - \frac{\alpha^{1-s}}{1-s} \right\} = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{e^{-\alpha x}}{x} \right) x^{s-1} dx, \quad \text{Re } s > 0.$$

Dans l'intégrande de (3), le pôle simple en $x = 0$ de $(e^x - 1)^{-1}$ est compensé par le pôle simple avec même résidu de $x^{-1}e^{-\alpha x}$. De ce fait, (3) converge déjà dans la bande plus large $\text{Re } s > 0$. Si nous nous restreignons maintenant à la bande critique

$$0 < \text{Re } s < 1$$

nous pouvons faire tendre $\alpha \rightarrow 0$ dans (3), de telle façon que l'intégrale de base

$$(4) \quad \Gamma(s) \cdot \zeta(s) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) x^{s-1} dx, \quad 0 < \text{Re } s < 1,$$

soit le prolongement analytique de (1).

La représentation (4) de la fonction zeta dans la bande critique nous permet de dériver l'équation fonctionnelle de la fonction zeta d'une façon extrêmement simple. Dans ce but, nous utilisons la relation de Legendre¹

$$(5) \quad 2 \int_0^{\infty} \sin xt \frac{1}{e^{2\pi t} - 1} dt = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \coth \frac{x}{2} - \frac{1}{x},$$

qui est valide pour toutes les valeurs réelles de x ; de plus, les deux côtés de (5) représentent une fonction impaire de x . Nous restreignons maintenant x aux valeurs positives et soustrayons

$$2 \int_0^{\infty} \sin xt \cdot \frac{dt}{2\pi t} = \frac{1}{2}$$

de (5), de telle façon que (5) prenne la forme auto-réciproque

$$(6) \quad 2 \int_0^{\infty} \sin xt \left(\frac{1}{e^{2\pi t} - 1} - \frac{1}{2\pi t} \right) dt = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Reçu par les éditeurs le 18 mars 1947.

Référence de l'article : van der Pol B., *An electro-mechanical investigation of the Riemann zeta function in the critical strip*, Bull. Am. Math. Soc. 53, 976-981 (1947).

Traduction en français : Denise Vella-Chemla, septembre 2021

1. Voir, par exemple, Whittaker-Watson, *Modern analysis*, 4^{ème} éd., p. 122.

La substitution de (6) dans (4) amène

$$\Gamma(s).\zeta(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \left\{ 2 \int_0^\infty \sin xt \left(\frac{1}{e^{2\pi t} - 1} - \frac{1}{2\pi t} \right) dt \right\} dx$$

qui, avec les substitutions $2\pi t = \tau$ et $x = 2\pi\xi/\tau$, devient

$$(7) \quad \Gamma(s).\zeta(s) = \frac{(2\pi)^s}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi^{1-s}} d\xi. \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^\tau - 1} - \frac{1}{\tau} \right) \tau^{-s} d\tau.$$

La dernière intégrale a la forme de (4), s étant remplacé par $1 - s$, alors que la première intégrale est d'un type bien connu. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Gamma(s).\zeta(s) &= \frac{(2\pi)^s}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi^{1-s}} d\xi. \Gamma(1-s).\zeta(1-s) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(1-s) \cdot \cos(\pi s/2)} \cdot \Gamma(1-s)\zeta(1-s) \end{aligned}$$

ou

$$\cos \frac{\pi s}{2} \cdot \Gamma(s).\zeta(s) = \frac{1}{2} (2\pi)^s \zeta(1-s).$$

C'est l'équation fonctionnelle qui, par prolongement analytique, est valide dans l'intégralité du plan complexe (le s -plan).

En revenant à (4), on note que cette égalité peut être écrite

$$(8) \quad \begin{aligned} \Gamma(s)\zeta(s) &= \int_0^\infty \left(\sum_1^\infty e^{-nx} - \int_0^\infty e^{-\nu x} d\nu \right) x^{s-1} dx \quad (0 < \text{Re } s < 1) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux} d([u] - u) \cdot x^{s-1} dx. \end{aligned}$$

Il est évident à partir de (8) que la fonction zeta dans la bande critique est engendrée par la différence entre une *somme* et une *intégrale*. Il ne semble par conséquent pas invraisemblable que les difficultés typiques associées à une étude de cette fonction dans la bande critique soient très liées à ce fait.

Intégrons maintenant par parties l'intégrale centrale de Stieltjes :

$$(8a) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ux} d([u] - u) &= e^{-ux} ([u] - u) \Big|_0^\infty + x \int_0^\infty ([u] - u) e^{-ux} du \\ &= x \int_0^\infty ([u] - u) e^{-ux} du. \end{aligned}$$

Substituer (8a) dans (8) et utiliser l'égalité $x = \xi/u$ amène

$$\Gamma(s).\zeta(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{[u] - u}{u^{s+1}} du \cdot e^{-\xi} \xi^s d\xi = \Gamma(s+1) \int_0^\infty \frac{[u] - u}{u^{s+1}} du,$$

ou bien

$$(9) \quad \frac{1}{s} \zeta(s) = \int_0^\infty \frac{[u] - u}{u^{s+1}} du, \quad 0 < \text{Re } s < 1.$$

Finalement, en utilisant $u = e^x$ et en prenant $s = 1/2 + it$, on obtient de (9) comme expression de $\zeta(s)$ sur la droite critique $\text{Re } s = 1/2$:

$$(10) \quad \frac{\zeta(1/2 + it)}{1/2 + it} = \int_{-\infty}^\infty \{e^{-x/2} [e^x] - e^{x/2}\} \cdot e^{-ixt} dx.$$

Avec (10), trouver les images par la fonction zeta qui sont sur la droite critique se réduit à un problème du domaine réel qui peut être attaqué par des méthodes physiques. C'est par conséquent sur (10), qui a la forme d'une transformée de Fourier, que nous avons basé nos expériences.

La fonction

$$(11) \quad y(x) = e^{x/2} - e^{-x/2}[e^x],$$

dont

$$\frac{\zeta(1/2 + it)}{1/2 + it}$$

est la transformée de Fourier est représentée sur la Figure 1 (voir l'encart page suivante). C'est une fonction en dents-de-scie, la hauteur des dents variant exponentiellement, la largeur de la $n^{\text{ième}}$ dent étant donné par $\log((n+1)/n)$. De plus, on a

$$0 \leq y(x) \leq e^{-|x|/2}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

qui assure la convergence de (10) pour toutes les valeurs réelles de t .

Ainsi, le problème expérimental consiste à construire une machine électro-mécanique fournissant l'intégrale de Fourier de la fonction $y(x)$. Cela s'est pourtant révélé **imfaisable** et de ce fait, nous avons plutôt cherché à obtenir le module de la série de Fourier pour $y(x)$ modifiée de telle façon que $y(x)$ n'allait prendre ses valeurs que de $x_1 = -9.00$ à $x_2 = +9.00$, et être nulle en dehors de ces bornes. La fonction résultante était ainsi répétée indéfiniment. On peut noter que l'amplitude de $y(x_1)$ et $y(x_2)$ pour ces limites vaut seulement $\exp(-9/2) = .011$, de telle façon que l'erreur impliquée est certainement petite. Le problème ayant alors été rendu périodique, il était facile d'introduire la machine rotative. Dans ce but, la fonction (cut off de cette façon) a été très soigneusement dessinée sur du papier. Cela a été fait radialement le long de la circonférence d'un cercle de rayon $a = 13$ cm (la transformation étant $r - a = y(\alpha\zeta)$). Alors on a coupé le papier aussi précisément que possible. Le disque de papier résultant est représenté sur la Figure 2. Ainsi la première dent avait une largeur $(\log 2 - \log 1)$ correspondant à environ $1/26$ de la circonférence du cercle. La dernière dent qui pouvait être pratiquement coupée était la $35^{\text{ième}}$ avec une largeur de $(\log 36 - \log 35)$, correspondant environ à une portion de $1/621$ de la circonférence. Ce disque de papier a été coincé de façon parfaitement plate entre deux disques d'aluminium, le papier sortant exactement comme il faut des disques de métal. Cet assemblage a été monté au centre de l'arbre d'un moteur synchrone. Le moteur était contrôlé pour tourner à une fréquence de 25.018 tours par seconde par un amplificateur situé derrière un diapason contrôlé électriquement à 1000,72 c/s, la fréquence du diapason étant démultipliée à l'aide d'oscillations de relaxation selon un ratio de 40 : 1. Ce contrôle par un diapason a assuré une précision bien plus grande dans la vitesse angulaire du moteur synchrone que ce qui aurait pu être obtenu en utilisant les principaux (*traduction ?*).

imfaisable

À l'aide de lentilles cylindriques, un faisceau de lumière a été projeté sur les dents du papier dans une direction parallèle à l'axe du moteur. La section de croisement du faisceau était un rectangle long et très étroit, avec le côté le plus long orienté radialement. La lumière qui passait ainsi à travers les dents du disque tombait sur une cellule photo-électrique, en engendrant un courant électrique qui était la réplique exacte de la forme des dents du disque et par conséquent de la fonction modifiée. Ce courant était amplifié et un courant fort sinusoïdal était superposé là-dessus, que l'on faisait varier très lentement de manière approximativement linéaire de 0 c/s à 15000 c/s sur une durée d'environ 12 heures, la loi de cette variation ayant été précédemment déterminée. De plus, un détecteur push-pull effectivement quadratique (à base de cellules de selenium) a été introduit

dans le circuit, produisant des différences de tons entre (a) toutes les harmoniques produites par le disque tournant et (b) le courant sinusoïdal appliqué. Ces tons de différence ont été fournis en entrée d'un vibreur électro-mécanique très étroitement échantillonné avec une période naturelle de 7.00 c/s et une décroissance logarithmique de .0143. La variation de la fréquence du courant sinusoïdal appliqué était nécessairement lente, de façon à assurer que le courant à travers le vibreur mécanique passe par des états "quasi-stationnaires"². Ainsi, quand le courant sinusoïdal avait une fréquence exactement égale à 7.00 c/s plus grande ou plus petite que l'une des harmoniques engendrées par les dents du disque, un ton de différence était produit qui excitait le vibreur mécanique. Les oscillations de ce dernier étaient traduites, dans un circuit séparé, comme un courant électrique qui était rectifié (donnant le module de la fonction) et qui était enregistré par un enregistreur de milli-ampèremètres. Le papier d'enregistrement de ce dernier bougeait à une vitesse qui était elle aussi contrôlée par le même diapason. Ainsi l'appareil de mesure enregistrait une série de raies spectrales localisées par paires, chacune des paires étant située l'une 7 c/s sur la gauche, et l'autre 7 c/s sur la droite de chaque harmonique présente dans la fonction produite par le disque tournant (fig. 2), qui, lui-même, représente la fonction $y(x)$ de (11) (rendue périodique), et dont le module de la transformée de Fourier est

$$(12) \quad \left| \frac{\zeta(1/2 + it)}{1/2 + it} \right|.$$

La Figure 3 est une reproduction directe non retouchée de l'enregistrement obtenu ainsi à partir de (12). À partir des constantes connues de la précision de l'appareil, il a été possible de marquer les valeurs de t que l'on voit en haut de l'enregistrement. Les abscisses marquées en bas de l'enregistrement par un | représentent les 29 zéros connus précisément de $(1/2 + it)$, dont on a trouvé les valeurs dans Jahnke Emde, *Funktionen tafeln* (zweite, neubearbeitete Auflage) p. 324³. On voit que tous ces 29 zéros apparaissent dans cet enregistrement soit comme de très profonds minima (notamment, les zéros no. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 16, 18, 20, 21, 23, 27, 29), soit dans les autres cas, ce sont des minima moins marqués, mais ils sont néanmoins bien identifiables (notamment, les zéros no. 9, 14, 15). On voit de plus que les valeurs des zéros enregistrées coïncident avec celles calculées avec une précision supérieure à 1%.

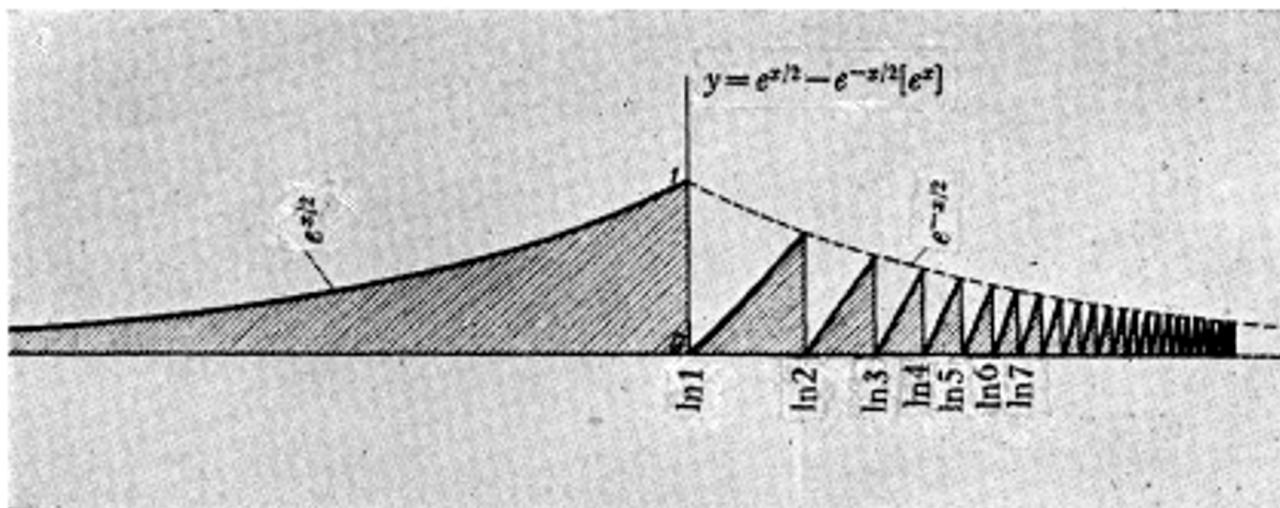


FIGURE 1 : Graphique de la fonction en dents de scie $y(x) = e^{x/2} - e^{-x/2}[e^x]$.

2. Balth. van der Pol, Journal of the Institution of Electrical Engineering (London), vol. 93 (1946) p. 153.

3. Pour le nombre de zéros sur $\text{Re } s = 1/2$ jusqu'à $t = 1468$, voir E. C. Titchmarsh, Proc. Roy. Soc. London Ser. A vol. 151 (1935) p. 234 et vol. 157 (1936) p. 261.

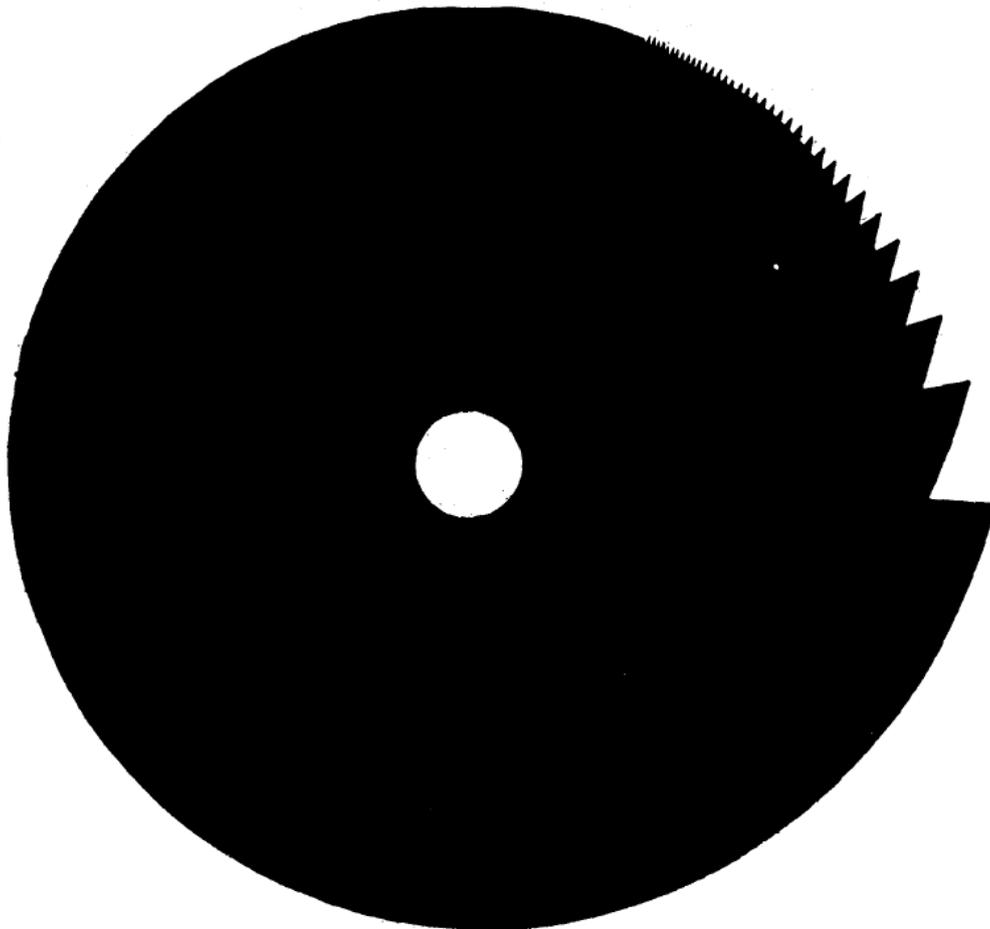


FIGURE 2 : Disque en papier, montrant la fonction en dents de scie $y(x)$ pour le domaine $-9 < x < +9$.

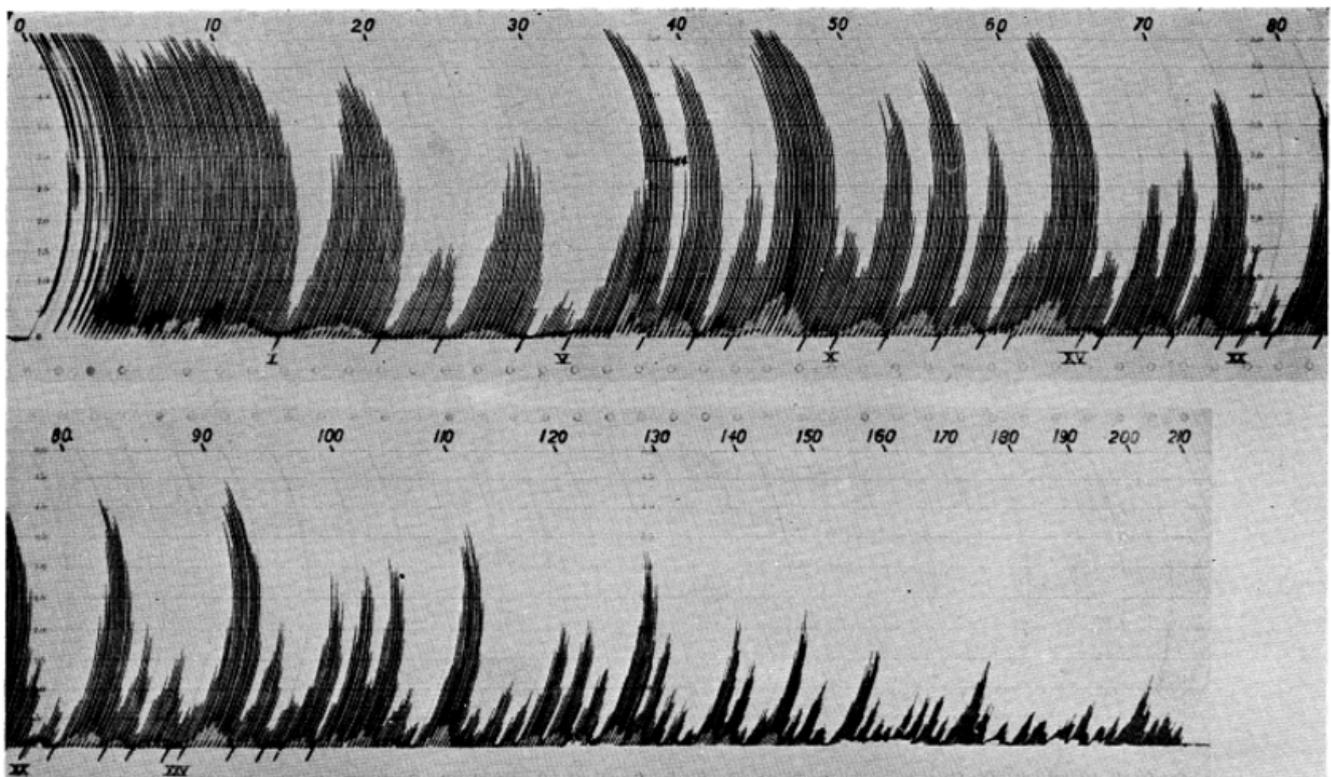


FIGURE 3 : Enregistrement de $|\zeta(1/2 + it)/(1/2 + it)|$ produit de façon électro-mécanique, montrant o.a. minima, dont les 29 premiers (marqués de |) correspondent aux 29 zéros connus de la fonction zeta sur la droite critique.

Pour que l'enregistrement de valeurs plus grandes ne soit pas trop faible, la sensibilité de l'appareillage a été augmentée 4 fois à partir de $t = 35$, comme indiqué dans l'enregistrement, de telle façon que pour $t > 35$, l'amplitude enregistrée soit 4 fois plus grande que pour le domaine $t < 35$.

Les 29 premiers zéros de $\zeta(1/2 + it)$ doivent être cherchés dans le domaine $0 < t < 100$. Pourtant, il a été pratiquement possible d'étendre l'enregistrement jusqu'à $t = 210$. Jusqu'à ce point, l'enregistrement montre un total de 73 minima qui peuvent le plus probablement être interprétés comme des zéros, d'autant plus que tous les minima visibles dans l'enveloppe de la courbe pour $t < 100$ correspondent à des zéros connus.

De même que l'attention doit être portée au module, elle doit aussi l'être au fait que l'enregistrement ne montre pas $|\zeta(1/2 + it)|$, mais montre cette fonction divisée par $|1/2 + it|$, voir (12).

Il est intéressant de remarquer que notre enregistrement montre qu'il semble ne pas y avoir de relation simple entre la différence entre des zéros successifs et la hauteur du maximum entre eux. Par exemple, la hauteur du maximum entre le 20^{ième} et le 21^{ième} zéro est considérablement plus petite qu'elle ne l'est entre le 17^{ième} et le 18^{ième}, bien que l'intervalle entre ces paires de zéros ne soit pas très différent. Les expérimentations menées jusque-là, et dans lesquelles les harmoniques autour du 600^{ième} ont été mesurées (la plus grande harmonique mesurée correspondait environ à la largeur de la dernière dent du gabarit de papier), ont été réalisées avec relativement peu de moyens, et on sent que de nombreuses améliorations pourraient encore être appliquées, telles que :

- (a) le fait d'assurer une vitesse de révolution du moteur synchrone toujours plus régulière ;
- (b) le fait de déterminer l'effet de l'enregistrement sur le nombre de coupures de dents sur le disque papier, et etc.

Par conséquent, avec les moyens techniques utilisables, la méthode présente d'exploration du comportement de la fonction zeta dans la bande critique (qui est intimement liée à l'hypothèse de Riemann), semble susceptible d'amélioration en termes de précision. De plus, une extension considérable du nombre de zéros enregistrés, incluant ceux, s'il y en avait, en dehors de la droite $\text{Re } s = 1/2$, semble possible en utilisant cette méthode.

Pour terminer, je voudrais remercier M. C.C.J. Addink pour le grand soin et le talent avec lesquels il a procédé aux expérimentations.

Note ajoutée à la preuve (6 Octobre 1947). Les minima moins profonds comme dans la Figure 3 se trouvèrent plus tard être plus profonds quand dans des expériences ultérieures, la fréquence angulaire fut conservée plus homogène.

LABORATOIRE PHILIPS, EINDHOVEN.