

Commentaire et comparaisons de quelques approches de GRH

Peter Sarnak

Bristol, juin 2018

1. Produits eulériens

Interdit : 99 % des “preuves” de RH soumises aux Annals (environ 3 par semaine) peuvent être rejetées sur la base qu’elles n’utilisent que l’équation fonctionnelle (F.E.)

$$\Lambda(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \Lambda(1-s)$$

de sorte que la preuve s’appliquerait également bien aux combinaisons linéaires

$$F(s) := \sum_{j=1}^n c_j \cdot L(s, \chi_j), \quad n \geq 2$$

où les $L(s, \chi_j)$ sont des fonctions L avec la même F.E.

- On sait (Davenport–Heilbronn) que des combinaisons linéaires non triviales ont des zéros avec $\Re(s) \neq \frac{1}{2}$.
- On s’attend à ce que de telles $F(s)$ aient encore 100 % de leurs zéros sur $\Re(s) = \frac{1}{2}$; Selberg, Bombieri / Hejhal, ...

2. Que sait-on vers GRH ?

Toutes les méthodes sont basées sur la **positivité**.

- Hadamard / de la Vallée Poussin : $\zeta(s) \neq 0$, $\Re(s) = 1$.

$$L(s, \pi \times \tilde{\pi}) = \zeta(s) L^2(s, \pi \times \tilde{\pi}) \cdots$$

(Le produit a des coefficients positifs) $\Rightarrow L(s, \pi) \neq 0$ pour $\Re(s) = 1$; régions sans zéro standard en termes de conducteur de T .

- Pour $\zeta(s)$ on peut faire de petites (mais chèrement acquises) améliorations donnant des bornes supérieures pour $\zeta(1+it)$ en utilisant les estimations de la valeur moyenne de Vinogradov; les progrès récents sur ces dernières ne donnent pas grand-chose ici.

Séries d’Eisenstein et positivité : C’est la méthode la plus puissante à ce jour sur GRH. La théorie spectrale des séries d’Eisenstein pour $G/\mathbb{Q}$ général (Selberg / Langlands) montre que le terme constant le long d’un sous-groupe parabolique (maximal) n’a pas de pôles sur l’axe unitaire; c’est une conséquence du produit scalaire de Maass–Selberg.

$$\Rightarrow L(s, \pi, \rho) \neq 0 \text{ pour } \Re(s) = 1$$

pour tous les cas connus (Jacquet–Shalika, Shahidi).

- Ce qui précède peut être rendu effectif (Gelbart–Lapid–Sarnak) et même atteindre des régions sans zéro standard (Sarnak, Goldfeld / Li, Humphries).

Pour illustrer pourquoi cette méthode est plus puissante, du moins actuellement, considérons

$$L(s, \pi, \text{sym}^9), \quad \pi \text{ sur } \text{GL}_2/\mathbb{Q}, \quad \rho = \text{sym}^9 \text{ de } \text{GL}_2(\mathbb{C}),$$

produit eulérien de degré 10.

On ne sait pas qu'elle converge dans $\Re(s) > 1$ (nous ne connaissons pas les conjectures de Ramanujan).

Pourtant, la positivité des séries d'Eisenstein appliquée sur $G = E_8$ montre que

$$L(s, \pi, \text{sym}^9) \neq 0 \quad \text{pour } \Re(s) = 1$$

avec une région sans zéro explicite !

3. Positivité au point central (séries d'Eisenstein)

π auto-dual, $\tilde{\pi} = \pi$, $L(1, \pi)$ est réel pour s réel. GRH implique $L(1, \pi) > 0$.

- La valeur $L(1, \pi)$ (si le nombre de racine $\varepsilon(\pi)$ est 1) a une signification arithmétique pour certains π (conjectures de Birch–Swinnerton-Dyer et généralisations).
- Une autre caractéristique en $s = 1$ est que L peut s'annuler à un ordre supérieur à 1 (BSD). Pour $\tilde{\pi} = \pi$, π est symplectique si $L(1, \pi, \Lambda^2)$ a un pôle en $s = 1$.
- (Lapid–Rallis) π symplectique $\implies L(1, \pi) > 0$ (inclut tous les cas connus). Cela découle encore d'une positivité des séries d'Eisenstein (résidus) sur un groupe symplectique correspondant (produit scalaire de Maass–Selberg).
- L'utilisation potentielle des séries d'Eisenstein pour SL_2 et de leurs valeurs aux points CM a été examinée spectralement par Garrett / Bombieri et antérieurement par Deuring (nombres de classes), Hejhal, Colin de Verdière.

4. Théorie des fonctions (Pólya, ...)

Interdit (pour zêta elle-même, on pourrait arguer que le théorème de Hamburger rigidifie le problème).

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n^4 \pi^4 e^{-9n^2 \pi^2}) \exp(-\pi n^2 e^{4t}) \\ &= \Phi(-t) \geq 0 \quad (\text{F.E. de Riemann}) \end{aligned}$$

(Cette dernière positivité est très rare pour une fonction L automorphe ; en fait, il n'y en a peut-être qu'un nombre fini de telles fonctions, Sarnak / J. Jung.)

La fonction de Riemann est la transformée de Fourier :

$$\Xi(x/2) = 8 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) \cos(xt) dt$$

$$\Phi(t) \ll \exp\left(\frac{\pi|t|}{2} - \pi e^{2|t|}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Posons $z = -x^2$ et

$$\Xi_1(z) = \frac{1}{8}\Xi(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k z^k}{k!},$$

une fonction d'ordre $1/2$.

- Csordas–Varga montrent que

RH $\iff$ racines réelles des polynômes de Jensen décalés de degré n :

$$g_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \gamma_{k+j} x^j.$$

- Griffin–Ono–Rolen–Zager ont montré récemment que pour n fixé, $g_{n,k}$ est à racines réelles quand $k \rightarrow \infty$. Je n'ai pas vu les détails mais je m'attends à ce que ce grand k puisse être prouvé pour les combinaisons linéaires $F(s)$ également.

Dans une autre direction, on peut essayer de déformer $\zeta(s)$ en une famille de fonctions entières et suivre la localisation des zéros. Pour le terme constant des séries d'Eisenstein, cela a été fait par Phillips / Sarnak en déformant dans l'espace de Teichmüller. Dans ce cas, le théorème des nombres premiers est stable.

Déformation de de Bruijn–Newman

$$\mathfrak{F}_b(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp(izt - bt^2) \Phi(t) dt$$

converge pour $b > 0$. $b = 0$ est la fonction Ξ de Riemann. Des résultats de Pólya montrent que si $b < b'$ et que $\mathfrak{F}_{b'}$ est à racines réelles, alors $\mathfrak{F}_b$ l'est aussi. La question est donc de savoir quel est le seuil b^* . La non-annulation de $\zeta(s)$ dans $\Re(s) > 1$ implique $b^* > -1/8$. Rodgers et Tao montrent que $b^* \leq 0$ (RH $\iff b^* = 0$).

5. Analyse fonctionnelle

Les approches fonctionnelles-analytiques et spectrales sont toutes basées sur l'action des dilatations (multiplications) T_λ , $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (ou des groupes abéliens plus grands) agissant sur divers espaces de fonctions

$$T_\lambda f(x) = f(\lambda x).$$

- Beurling, Nyman, Baez-Duarte, Burnol :

$$P_\lambda(x) = \left\{ \frac{1}{x} \right\} \in L^2(0, \infty).$$

RH $\iff$ le sous-espace invariant fermé engendré par (le semi-groupe)

$$\{T_\lambda P_\lambda\}_{\lambda > 1}$$

contient $L^2(0, 1)$; en fait il suffit qu'il contienne $\mathbf{1}_{[0,1]}$.

$$\frac{\zeta(s)}{-s} = \int_0^\infty \left(\int_1^\infty \dots \right) x^s \frac{dx}{x}.$$

Vasyunin a examiné le problème d'approcher $\mathbf{1}_{[0,1]}$ par des combinaisons linéaires avec $\lambda = \mu_n$, $n \in \mathbb{Z}$, et prenant des valeurs binaires 0,1. Il a trouvé des familles infinies de solutions ainsi que des solutions sporadiques — pas assez pour obtenir $\mathbf{1}_{[0,1]}$.

Bober, suivant une intuition de Villegas qui relie ces constructions de Vasyunin aux hypergéométriques ${}_nF_{n-1}$ avec des coefficients entiers et une monodromie finie, montre que la liste de Vasyunin est complète.

Bien que cela montre que l'on ne peut pas atteindre cette approximation avec ces combinaisons linéaires restreintes de parties fractionnaires, c'est une belle connexion aux hypergéométriques et à leur monodromie, ainsi qu'à l'approche élémentaire de Tchebychev pour le PNT.

Variations sur le thème de T_λ

Elles conduisent à réaliser les zéros spectralement, du moins à un niveau formel. Si nous avons un espace de fonctions (ou distributions) invariant sous le groupe T_λ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$), alors les fonctions propres doivent être de la forme

$$f(x) = x^\rho, \quad \rho \in \mathbb{C}.$$

L'espace linéaire V sur $\mathbb{R}_{>0}$ des fonctions

$$h(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nx), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad f(0) = \hat{f}(0) = 0,$$

est invariant sous T_λ . Les distributions D qui annihilent V sont T_λ -invariantes et de

$$\int_0^\infty \left(\sum_n f(nx) \right) x^s dx = \zeta(s) \hat{f}(s)$$

on déduit que les fonctions propres D de T_λ correspondent à $\zeta(\rho) = 0$.

C'est la base de diverses interprétations spectrales des zéros (Connes, Berry–Keating, Bender–Brody–Mulcer, ...). Dans les deux dernières, il y a un opérateur différentiel du second ordre qui commute avec T_λ . Ces interprétations spectrales ont toujours le problème d'“interdit”. Dans le cas où $\zeta(s)$ ou $L(s, \chi)$ a un zéro multiple, ces opérateurs de dilatation ne peuvent pas être diagonalisés — cette caractéristique est philosophiquement importante.

Pourquoi voulons-nous une interprétation spectrale ? Elle linéarise notre problème et, tant que l'espace linéaire et l'opérateur ont des structures qui peuvent être étudiées, cela pourrait être utile. L'idée de Hilbert–Pólya selon laquelle cet espace linéaire est muni d'un produit scalaire rendant l'opérateur auto-adjoint est, je pense, naïve. Elle n'a pas fonctionné dans d'autres contextes et ne permet pas de traiter les zéros multiples.

6. Corps de fonctions (Artin, Weil, ...)

Courbes C sur des corps finis. Il y a deux étapes :

- (i) Interprétation spectrale des zéros par l'action de Frobenius sur la cohomologie.
- (ii) Preuve de RH par positivité.

Weil a donné deux preuves :

- (a) En généralisant le cas $g = 1$ de Hasse, en passant à la jacobienne $\text{Jac}(C)$ et en analysant le Frobenius Φ dans $\text{End}(\text{Jac})$, l'“involution de Rosati”, $\text{Tr}(\Phi'\Phi) > 0$.
- (b) Via des correspondances sur $C \times C$. La positivité provenant de l'inégalité de Castelnuovo sur les surfaces. Bombieri (1996) en rend compte avec des indications vers la formule explicite (ci-dessous). Une variante de cette preuve donne la positivité directement à partir de Riemann–Roch sur $C \times C$ (Mattuck–Tate).
- (c) La preuve élémentaire de Stepanov ; utilise ce que les combinatoires appellent aujourd'hui la “méthode polynomiale”. Une caractéristique de cette preuve est qu'elle va au-delà de RH — donnant des informations précieuses pour $g > \sqrt{p}$, $g = g(C)$.
- (d) La preuve de Deligne utilisant des familles, la monodromie des représentations de puissances tensorielles élevées, et la positivité qui en découle. C'est jusqu'à présent la seule méthode qui a réussi pour les variétés de dimension supérieure.

Interprétation spectrale via $\mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$ (Cohen, Connes)

(pas clairement un “interdit”)

Anneau des Adèles de $\mathbb{Q}$ (additif) :

$$\mathbb{A} = \{(a_\infty, a_2, a_3, \dots) \mid a_p \in \mathbb{Z}_p \text{ pour } p \neq 0\}.$$

Anneau des Idèles :

$$\mathbb{A}^* = \{(a_\infty^*, a_2^*, a_3^*, \dots) \mid a_p^* \in \mathbb{Q}_p^* \text{ pour } p \neq 0\}.$$

Espaces usuels (Tate, “vecteurs de valuation”) : $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ (action additive), $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ (action multiplicative).

$\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ est très singulier.

Lors de mes premières rencontres avec Paul (Cohen) en tant qu'étudiant diplômé (1977), il a souligné $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ et l'action

$$T : x \mapsto xy, \quad y \in \mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*, \quad x \in \mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$$

(multiplication sur l'addition) et que la trace de cette action conduit formellement au membre de droite de la formule explicite de Riemann–Guinand–Weil.

Membre de gauche = somme sur les zéros et pôles de toutes les fonctions L de Hecke de K (un corps de nombres) de la transformée de Fourier. Membre de droite =

$$\sum_v \int_{K_v^*} h(u^{-1}) \frac{du}{u}.$$

Les difficultés techniques autour de l'espace très singulier $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ ont conduit Paul à étudier les travaux de Selberg sur la formule des traces (c'est devenu le sujet de ma thèse). Cohen a réalisé très tôt que pour faire un usage quelconque de cela, il faut aller au-delà des formalités à la recherche de la

source de la positivité. Sa réflexion a certainement été influencée par la preuve par correspondance de Weil sur $C \times C$ et par l'équivalence de positivité fonctionnelle quadratique de Weil dans sa formule explicite (Bombieri a fait une étude approfondie de cette dernière).

Au fil des années, Paul a essayé de nombreuses variantes pour l'espace $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$, principalement combinatoires, dont certaines ont fait contact avec la théorie du crible. Connes (1999) a proposé une interprétation précise en termes de cette action $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ et de sa trace. Les espaces de Sobolev qu'il a utilisés ne permettent pas de zéros hors de la droite, ni de zéros de multiplicité élevée. Cela a été corrigé par Meyer (2005) qui autorise des espaces vectoriels topologiques plus généraux. Il réalise la formule explicite comme la trace de l'action de $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ sur un espace convenable de fonctions sur $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$. Les zéros (plus le pôle) sont les valeurs propres de cette action.

Vers l'avenir : méthode des familles

Ma conviction est que la méthode des familles de fonctions L est la voie à suivre (comme pour Deligne dans les conjectures de Weil générales). C'est un principe général qu'il est difficile d'étudier un objet isolé et que l'on aimerait le déformer en objets d'un genre similaire.

Dans le cas des fonctions L automorphes, Templier / Shin / Sarnak ont proposé une définition d'une famille générale. Celles-ci servent à formuler des concepts de base associés à la symétrie d'une famille et à poser et répondre à diverses questions pour les familles de fonctions L .

Bien qu'aucune de ces approches ne puisse être considérée comme un outil pour prouver GRH, les résultats qui peuvent être prouvés sont souvent suffisamment bons pour être des substituts complets de GRH dans certaines applications (le théorème de Bombieri–Vinogradov est un exemple prototypique). Ce qui manque, c'est un véritable mariage ou une colle pour les fonctions L dans une famille, comme il y en a via la théorie de Grothendieck et la monodromie dans le corps de fonctions. Pour pointer le premier obstacle : quel est l'analogue des fonctions L de puissance symétrique de Sato et plus tard de Langlands, pour les familles de fonctions L automorphes ?