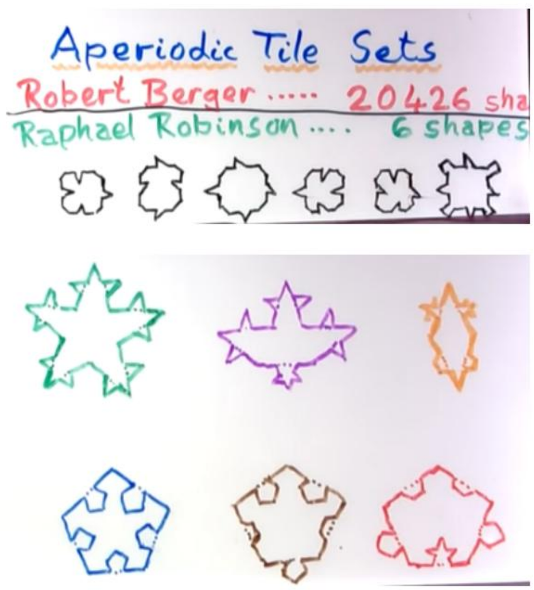
Symétries interdites

Monsieur Roger Penrose

(20 minutes au milieu de la conversation)

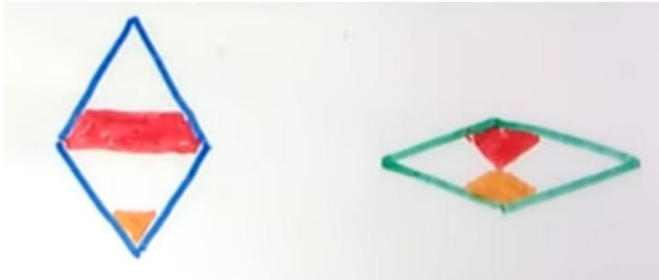
Maintenant, il y a une autre partie de l'histoire, qui est quelque peu différente. Il s'agissait d'un ensemble de formes de tuiles (je n'entrerai pas dans toute l'histoire, c'était une assez longue histoire intéressante à voir avec la logique mathématique) et au cours de cette histoire, un mathématicien américain appelé Robert Berger a découvert un ensemble de dents 20426 formes qui ne feraient que paver le plan, paver tout le plan, mais seulement d'une manière qui ne se répéterait jamais. Et il avait besoin, pour ce faire, de montrer que le problème de pavage n'est pas calculable, c'était en fait ce qu'il essayait de faire. Mais cela ne fait pas partie de mon discours ici. Mais Raphael Robinson, un autre mathématicien américain, a réussi à réduire ce nombre de 20426 à 6, et donc c'était assez impressionnant.
Il avait descendu ses pas d'autres personnes mais c'était son exploit de le faire avec 6.

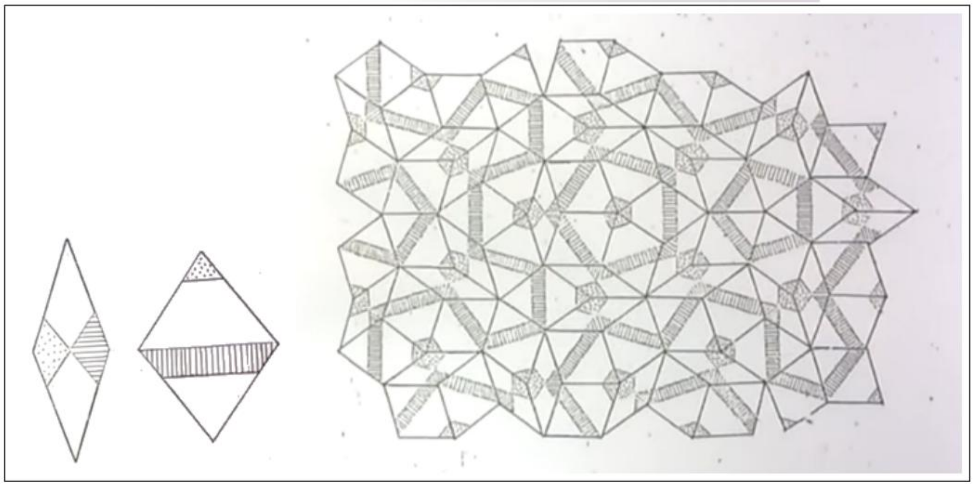


Et je parlais à un autre mathématicien américain Sammy Cochin et il m'a dit que Raphael Robertson était quelqu'un que vous aimez pour que les nombres soient aussi petits que possible. Et je pensais bien 6, je vois, je sais que je peux le faire avec 5. Eh bien, vous voyez, ce sont les formes que vous obtenez dans le motif de carrelage que je vous montrais ici (vous voyez, vous y arriverez les pentagones les losanges, les calottes de justice et les pentacores).
Mais si vous voulez faire un problème de carrelage qui force cet arrangement, vous pouvez le faire en mettant de petits boutons et des encoches sur les pièces, et cela les force à s'adapter à cet arrangement. C'est que je n'essaierai pas de prouver ici mais c'est vrai. Mais vous avez besoin de trois versions différentes des pentagones, selon qu'il y a cinq autres Pentagones à côté, seulement trois ou seulement deux et c'est la différence entre les trois types de pentagones. Mais le fait est que vous remarquerez que ce pentagone ici1 a cette petite chose amusante là-bas sur la note de bas de pageComme une petite étoile. et cette chose a cette petite chose amusante et c'est ici, dans deux d'entre eux, donc tout ce que vous avez à faire est de prendre celui-là, de le coller là-bas, et de le coller deux fois là-bas, et vous n'avez que cinq morceaux . Alors j'ai su que je pouvais le faire avec cinq, puis j'ai commencé à bidouiller, et j'ai réalisé qu'on pouvait le faire avec deux ! (Rires) Et donc c'est les deux et ça marche comme ça... Bon, j'avais d'abord une autre version, que je vais vous la donner : il faut faire correspondre les couleurs. Vous pouvez le faire avec de petits boutons et pas seulement comme ça aussi, mais si vous faites juste correspondre les couleurs et ici, nous avons une version qui verse le découvert, mais vous pouvez voir en dessous ce motif de carrelage.

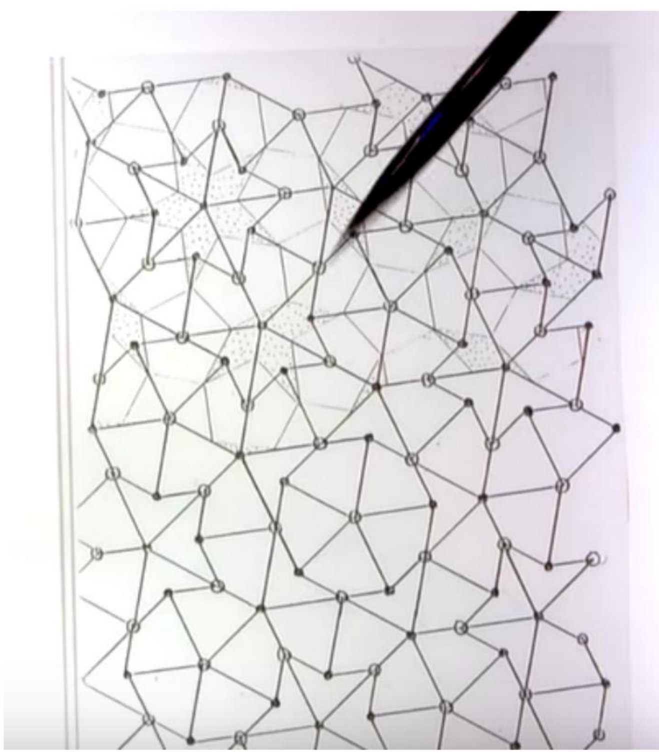
Transcription par Denise Vella-Chemla, octobre 2022, de la vidéo Symétrie cristalline interdite en mathématiques et architecture visionnable ici : https://www.youtube-nocookie.com/embed/th3YMEamzmw, Royal Institution (RI) Événement, 2013.

1La rouge, à gauche.

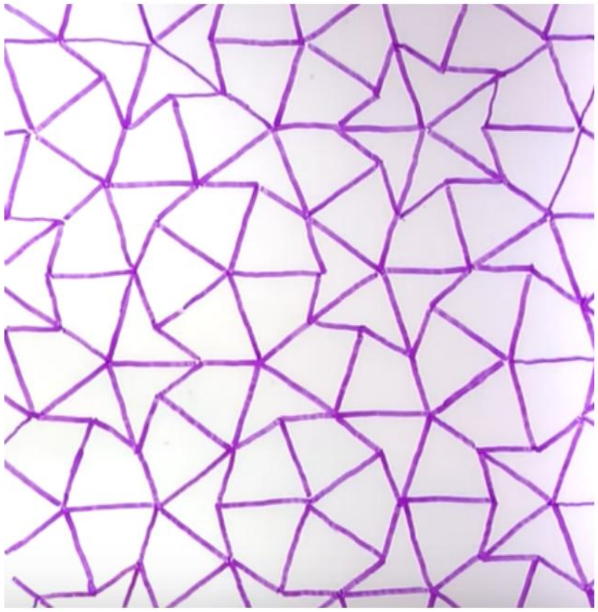




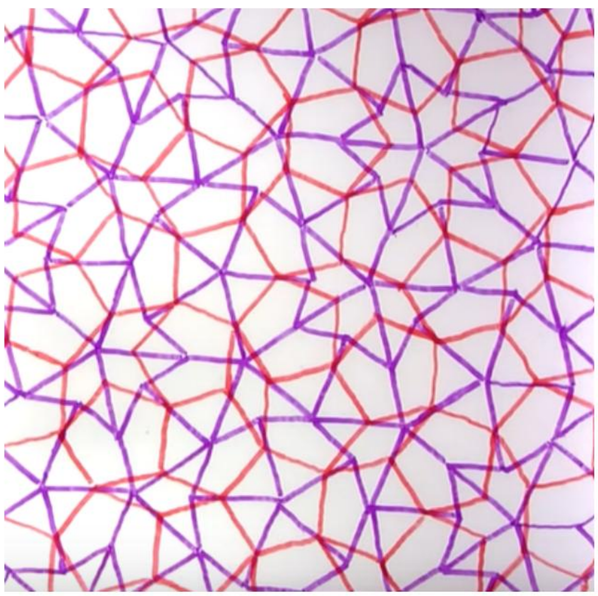
Eh bien, je vais montrer comment ces autres sont liés au modèle du pentagone ici, ils font tous partie de la même histoire pour s'assurer et garder ces choses en vue. Et voyons quelque chose à propos de l'histoire. Mais tout d'abord, permettez-moi de mentionner l'autre qui est venu en premier qui est les cerfs-volants et les fléchettes, ce sont les cerfs-volants et les fléchettes ici, et en haut j'espère que vous pouvez voir, vous mettez les cerfs-volants, vous marquez les cerfs-volants et le fléchettes; chaque fléchette est marquée de la même manière et la marque de chaque cerf-volant de la même manière, et elles s'emboîtent pour former le carrelage que je viens de vous montrer.



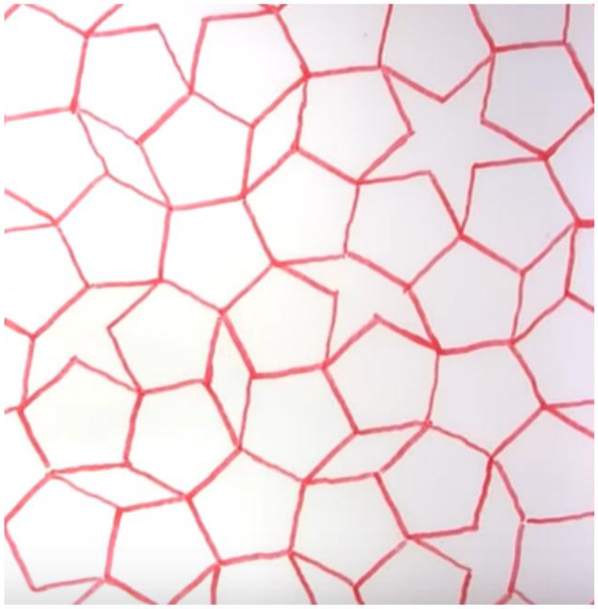
Je pense que ce serait mieux si je vous montrais leurs cerfs-volants et fléchettes assemblés



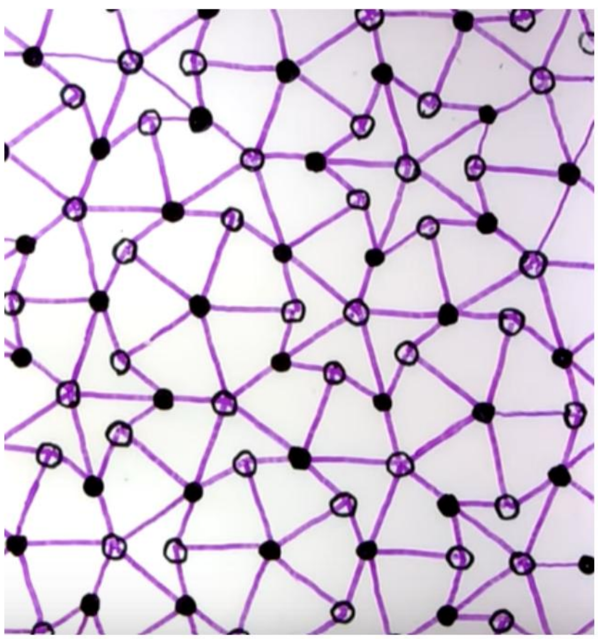
et ici nous avons les pentagones.



Donc voilà, je pense que c'est ça, et si vous regardez attentivement, vous verrez que chaque cerf-volant est marqué de la même manière, et chaque fléchette est marquée de la même manière. Donc ce patron de cerfs-volants et de fléchettes est équivalent à ce patron :



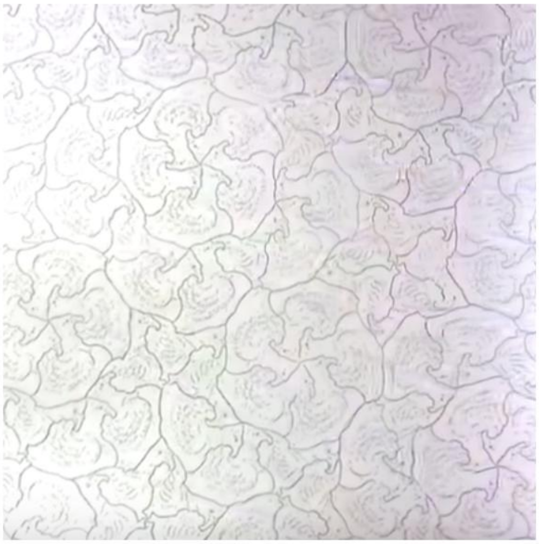
Il produit cela mais seulement avec seulement deux formes. C'est ainsi que vous pouvez le faire à deux. Bien sûr, je n'ai pas mis les encoches et les boutons dessus, laissez-moi le faire en indiquant si je mets des boutons ici avec des couleurs de coins noir et blanc. Je peux donc le faire ici.



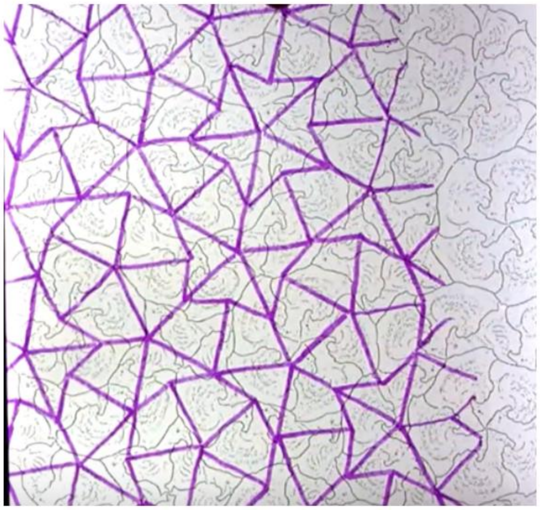
Je viens de remarquer qu'il y a un sens opposé à celui de cette autre image, mais cela n'a pas d'importance. Mais ici, nous avons les cerfs-volants et les fléchettes, je vais maintenant marquer les coins et si vous faites correspondre ces coins, la seule façon de les assembler est l'un de ces arrangements non périodiques.

Je devrais peut-être faire une remarque à ce sujet : est-ce que cela veut dire qu'il n'y a qu'une seule façon de couvrir tout le plan ? Oui et non est la réponse à cela : mathématiquement à proprement parler, la réponse est non, c'est-à-dire qu'il y a plusieurs façons de continuer à l'infini. Cependant, dans un certain sens fini, ils sont tous les mêmes. C'est-à-dire si vous trouvez deux de ces pavages complets du plan, avec les mêmes formes c'est-à-dire, et je prends l'un d'eux et je prends une région peu importe sa taille, c'est fini, je peux trouver ça, dans l'autre. Vous ne pouvez donc jamais dire dans laquelle vous vous trouvez. Peu importe la taille de la région, vous pouvez toujours la trouver dans l'autre, une infinité de fois. d'accord ce n'est pas si difficile à prouver en fait mais curieux. D'accord.

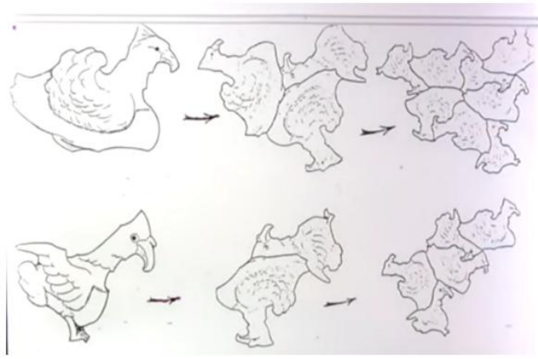
Vous pouvez aussi le faire en faisant un puzzle à la place des encoches et du bouton : puzzle, d'accord, en voici un : c'est une sorte d'Escher-isation je dirais.



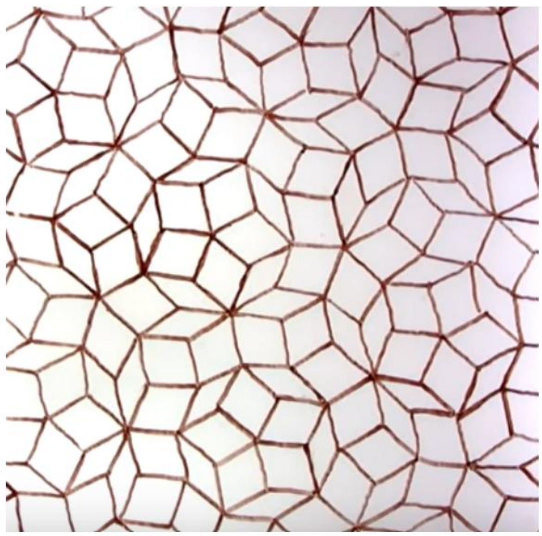
Je ne suis pas sûr que cela corresponde à cela, je n'ai pas essayé de les faire correspondre ; oh, ce n'est pas trop mal, ils pourraient le faire mais je n'ai pas vraiment essayé ça. Il y en a à peu près les mêmes, tu vois que si je me concentre sur cet oiseau-là ; c'est celui-là et celui-là, ils ne feront pas tout le tour, mais oui, on y est, ceux-là vont bien mais il faudrait que je trouve un meilleur endroit pour les assortir.



Mais comme je l'ai dit, n'importe quelle région finie qui sera en pointes etc, etc, mais si tu veux savoir comment faire, tu fais comme ça, ce sont vraiment des cerfs-volants et des fléchettes déguisés, et puis il y a une hiérarchie que tu peut déduire (Rires).

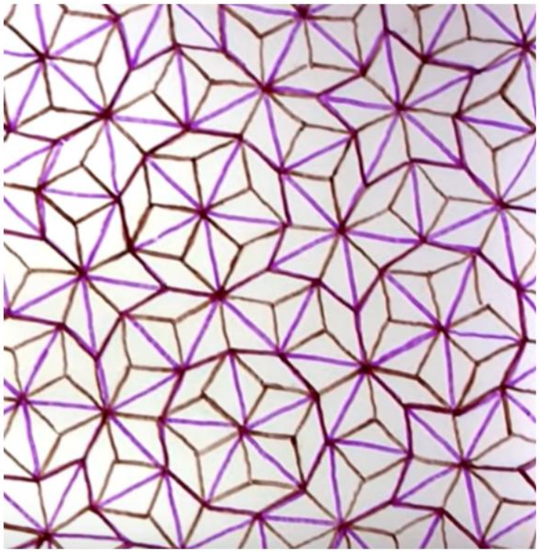


Je n'entrerai pas dans les détails ici, mais juste pour vous montrer ce genre de choses que vous pouvez faire. Voici maintenant un motif en losange.

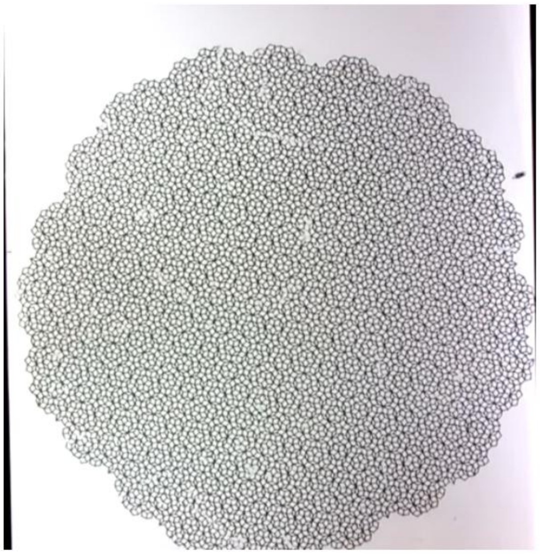


Lorsque les gens l'utilisent, ils ont tendance à le faire sans aucun ornement. Je préfère quand tu vois où tu es ; le problème avec cela si vous ne le prenez pas comme un puzzle (il y a des zillions de façons de faire bien sûr parce que vous pouvez carreler avec l'un, sans utiliser l'autre, et il y a plusieurs façons de le faire.

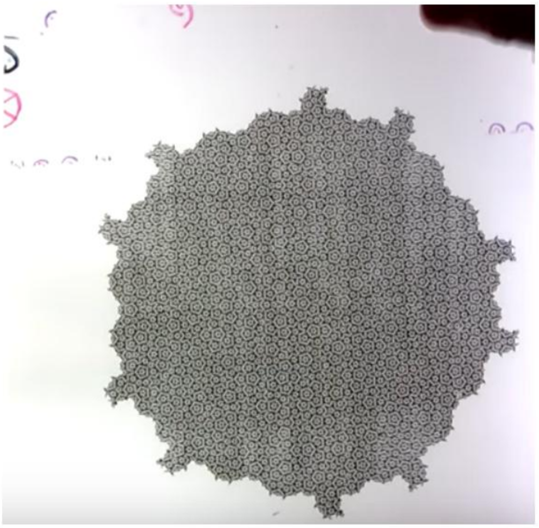
Vous devez donc avoir une règle sur la façon dont vous les assemblez et la règle pourrait bien être que c'est ce modèle, mais ce n'est pas très économique. On pourrait dire que la règle est qu'ils doivent correspondre aux rayures que je vous ai montrées auparavant et ainsi de suite il y a aussi une relation étroite entre les cerfs-volants et les fléchettes et le losange :



Vous voyez que beaucoup de lignes sont en commun entre les deux. D'accord, revenons au modèle de losange à nouveau, puis "mémorisez ce modèle" (Rires) et en voici un plutôt plus fin.

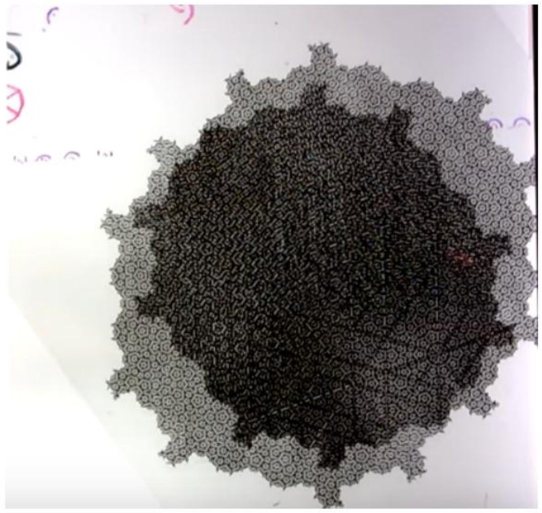


J'espère que vous pouvez bien voir les losanges, j'ai bien peur qu'il y ait des endroits où c'est un peu usé.
Mais c'est bien de cela qu'il s'agit. Bien sûr, vous voyez, je faisais ces choses à la main, mais bien sûr, maintenant, avec l'ordinateur, les gens prennent le relais et ils peuvent faire des photos beaucoup plus impressionnantes que je n'ai jamais pu le faire. C'est donc une image d'ordinateur. Je vais vous montrer une autre image d'ordinateur que vous pouvez rendre encore plus fine que celle-là.

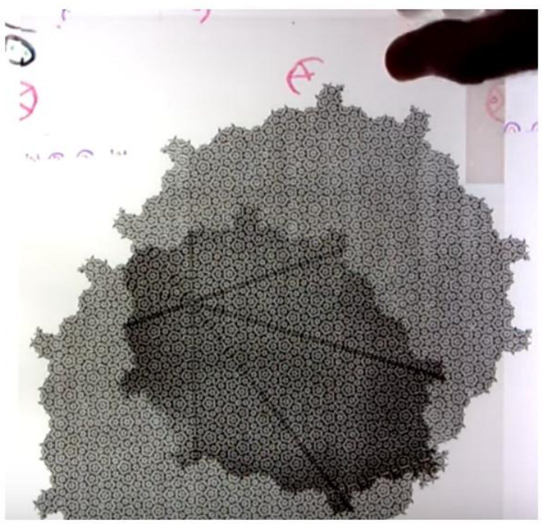


Et maintenant, c'est un motif en losange ; Je ne pense pas que vous puissiez tout à fait voir les losanges, mais ce que vous pouvez probablement voir, ce sont des motifs moirés.

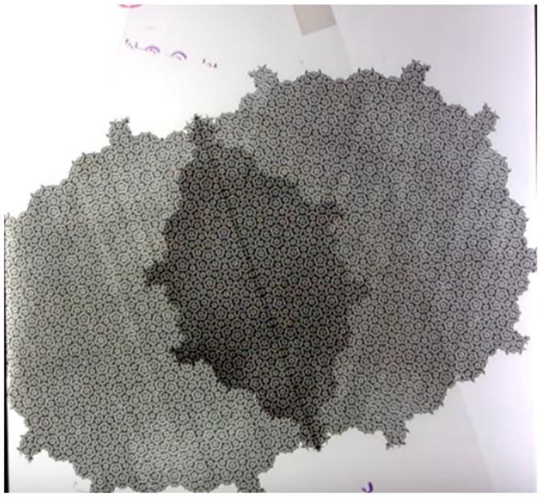
Maintenant, c'est assez intéressant parce que vous pouvez en placer un au milieu, donc cela demande un peu d'habileté pour le faire, et je l'ai peut-être perdu parce que oui, vous devez déplacer la chose à angle droit de la manière où vous voulez déplacez-le, donc c'est délicat, j'essaie d'obtenir cet endroit au milieu.



Maintenant, vous voyez différentes lignes qui traversent. Ces lignes sont les endroits où les modèles diffèrent ; où ils s'accordent sont les espaces intermédiaires. Maintenant, il y a un autre endroit, essayons celui-là, je ne suis pas sûr de m'améliorer, mais je vais essayer. Je pense que les lignes sont bien plus loin. Je vais tricher maintenant, je vais utiliser quelques petits repères au bord. Maintenant, je ne suis pas sûr d'avoir assez de précision, c'est assez difficile à faire, ah oui vous pouvez voir là, ouais !



Il convient partout sauf le long de ces lignes là, et si je le déplace assez loin, je peux faire le patch où les degrés sont aussi grands que vous le souhaitez, je pense que je pourrais en essayer un de plus ici, si je peux réellement trouver le bon marques, je ne suis pas sûr, je suis avec le bord ici pour essayer de le trouver, espérons que ça se propage ouais, ça convient partout, sauf cette ligne au milieu.



Sauf que je ne vais pas le trouver, vous pouvez le faire de cette façon je pense, mais alors c'est, je ne sais pas, laissez-moi juste faire correspondre les choses au bord de la légende. Peux-tu le voir ? Ça y est, on y est, ça y est, hein, d'accord, c'est la démonstration, d'accord.

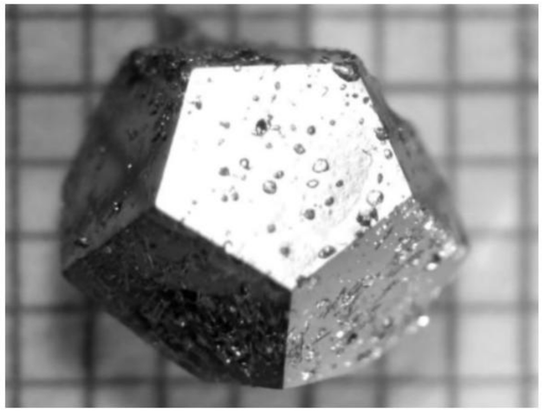
Maintenant permettez-moi de faire une remarque ; J'avais l'habitude de donner des conférences sur ces choses il y a longtemps et dans les années 70, et les gens disaient « eh bien, cela ne veut-il pas dire qu'il y a une sorte de domaine de la cristallographie qui s'ouvre ? et j'avais l'habitude de dire, eh bien oui en principe, cela veut dire que vous pourriez imaginer de telles choses, mais je ne pouvais pas imaginer comment la nature le ferait. Maintenant, il y a une raison de dire cela, et c'est que l'assemblage ne peut pas être de la manière dont vous imagineriez qu'un cristal soit fabriqué, parce que ce type d'assemblage de cristal classique est que vous avez une petite pièce qui arrive et s'assoit en quelque sorte dans un petit pont un par un, et puis ils viennent sur une autre couche, et une autre comme ça, c'est une assemblée locale. Maintenant, vous voyez que l'assembly n'est jamais local, et je le savais parce que supposons que nous ayons ce modèle :

Ce sont des chats et des chiens et qu'il est correctement assemblé, vous pouvez continuer cela à l'infini, si vous mettez une fléchette là-bas, vous pouvez toujours le continuer à l'infini si j'enlève cette fléchette, et je mets un cerf-volant ici, vous pouvez toujours continuer cela à l'infini. Mais si je mets une fléchette là et un cerf-volant là, ça tourne mal à peu près là (montrant un point à 10 cm en bas de l'image, et puis, rires du public). Il s'agit donc d'une fonctionnalité non locale. Et il semble déroutant de voir comment vous pourriez faire croître des substances de type cristallin si c'est ce genre de pavage. J'étais donc un peu sceptique sur le fait que vous pourriez peut-être avoir une telle chose. Eh bien, je pense que je veux maintenant passer aux images PowerPoint.

C'est un dessin pour une affiche qui se trouvait à l'Institut de Mathématiques, où nous déménageons dans cet autre bâtiment, et je ne pense pas qu'elle ait encore été installée dans le nouveau bâtiment, mais l'idée était d'avoir un assemblage de ces carrelages. Ce sont tous des pavages qui m'ont été donnés par des gens qui fabriquaient des carreaux individuels, ceux du milieu ont été donnés par un mathématicien appelé Ron Graham, je pense qu'il voulait juste jouer avec ces idées, et il a mis des petits boutons dessus pour que vous pourriez les assembler. Vous n'êtes pas censé les retourner, sinon vous pouvez aussi le faire dans le mauvais sens. Ce sont aussi quelques-uns des siens, donc vous pouvez voir les cerfs-volants et les fléchettes. ce motif de cerf-volant et de fléchettes est également que j'ai cinq couleurs différentes et la coloration du motif est uniquement déterminée par le carrelage. Je n'entrerai pas dans les détails mais cela fait que le motif de couleurs est absolument fixé par le motif de pavage, avec certaines règles à ce sujet. Vous avez peut-être pu voir des choses vous sauter aux yeux lorsque vous regardez le modèle. Ici, nous avons une version en losange et ici nous avons les règles sur la hiérarchie de leur fonctionnement.
Je n'entrerais probablement pas dans les détails.

Ici, nous nous amusons avec je vous ai montré les oiseaux ce sont les oiseaux ce sont vraiment les oiseaux cerfs-volants et fléchettes, vous pouvez les voir comme des oiseaux individuels de l'autre côté, enfin pas de l'autre côté mais la manière alternative de le colorer, apporte Retournez le carrelage pentagone d'origine. Vous remarquez qu'il y a une petite créature étrangère au milieu, il y a un chien là ; si vous mettez un chien dans ce modèle, le modèle entier qui s'étend à l'infini est complètement unique. Il y a exactement une façon de faire qui est assez curieuse. C'est un peu difficile de voir ce qui se passe avec ce modèle. Ici, dans le coin, nous avons de vrais matériaux, c'est un véritable quasi-cristal. Je pense qu'ils appellent maintenant ces choses des cristaux au lieu de quasi-cristaux, je ne suis pas tout à fait sûr : la notion de cristal s'est étendue pour inclure ces choses, mais vous voyez ce beau dodécaèdre régulier, qui n'est certainement pas autorisé dans la cristallographie ordinaire. Et ici, nous avons le diagramme de diffraction par lequel ces choses ont été découvertes à l'origine ? en regardant les diagrammes de diffraction. Et si vous regardez attentivement, vous voyez qu'il y a des pentagones et autres, dans le diagramme de diffraction lui-même.

Il y a une image plus grande de cette très belle piste devenue un très beau dodécaèdre,



un dodécaèdre régulier et avec de très beaux bords et coins. Et on pense que les arrangements atomiques sont du genre de ceux que vous avez vus ici. Il existe de nombreuses versions de ces arrangements atomiques que vous pouvez avoir mais je ne sais pas dans ce cas particulier de quel arrangement il s'agit ; ce n'est qu'une version tridimensionnelle bien sûr, je pense que Robert Ammann a été la première personne à produire une version tridimensionnelle des pavages pentagonaux, mais divers mathématiciens ont ensuite découvert des moyens très sophistiqués de générer ces choses en prenant des treillis et en les découpant en haute dimension et en projetant eux, je ne veux pas entrer dans tout cela ici.

Laissez-moi voir quelle est la suite.

D'accord, voyons maintenant une architecture, c'était la première utilisation que je connaisse de l'un de ces pavages. Cela a été fait assez peu de temps après que je les ai produits par un architecte japonais, j'ai été vraiment très impressionné par lui car il y a toutes sortes de choses dans ses cerfs-volants et ses fléchettes qu'il est un peu difficile de voir au début car ils sont décorés par certains arcs qui étaient suggéré par John Conway un mathématicien pour produire de jolis motifs.
Mais ici vous avez deux fléchettes, deux cerfs-volants et une fléchette, et il y a une fléchette, cinq cerfs-volants et ainsi de suite. Mais l'architecte a remarqué quand ils ont installé cette chose qu'il y avait une erreur et vous avez insisté pour qu'ils l'enlèvent et corrigent l'erreur, alors j'ai été impressionné par cela, qu'il s'en souciait suffisamment.

Mais c'est un modèle très intrigant et intéressant, j'étais assez flatté de voir cette chose produite et il y a une version plus jeune de moi qui se tient là. Maintenant, cette salle d'histoire à Melbourne en Australie. Ils voulaient que je sois là à l'ouverture, je n'ai pas pu y aller, j'ai visité plus tard, c'est l'endroit le plus extraordinaire... Je ne sais pas trop ce que j'en pense . (Rires)

Gravity Discovery Centre, Perth WA, Australia.

Vous pouvez aller à l'intérieur et vous trouverez plus de ces choses partout. Donc c'est basé sur ce carrelage en losange et assez correctement fait je pense comment, mais c'est élaboré et de toutes sortes de manières curieuses donc c'est un bâtiment assez intéressant, mais passons à autre chose.

Maintenant nous avons ici... Ça doit être en Australie hein j'ai un berceau ici qui me dit non c'est celui du Science Centre, je pense aussi deux de ces pavages à Perth : le Science Center, je pense que celui-ci est le Centre des sciences, c'est vrai, et ce sont des carreaux de losange simples et vous les voyez bordés, et il y en a deux différents, le losange gras et fin est là, c'est un peu difficile de les voir sur cette photo, mais vous avez une idée de l'étendue d'eux et c'est le coup pris d'en haut.

Gravity Discovery Centre, Perth WA, Australia.

Oui, c'est le Science Center dans un endroit près de Perth, en Australie occidentale. très impressionnant, je pense qu'ils sont très bien faits.

St. John's Cambridge, Penrose Building

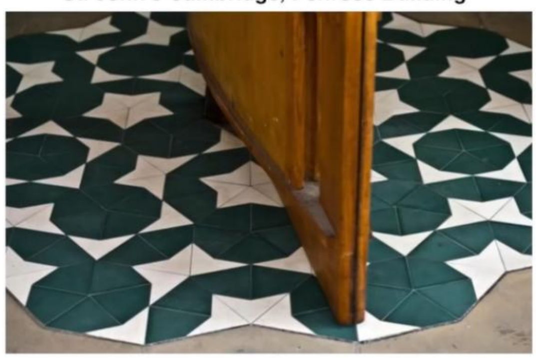


Photo: Paul Everest

Maintenant, ce sont les cerfs-volants et les fléchettes, c'est dans mon ancien collège St. John's College à Cambridge, et je pense que Peter Goddard, qui était le maître à l'époque, a en quelque sorte aimé le jeu de mots de l'idée, parce que c'est l'entrée du Penrose bâtiment si rien à voir avec un membre de ma famille, pour autant que je sache, mais il se trouve que c'est quelqu'un du nom de Penrose qui l'a conçu. Et le morceau de bois au milieu de l'image ici est la porte, c'est l'entrée de la bibliothèque et c'est une sorte de motif circulaire sur le sol, et la porte ici pivote, il y a un pilier au milieu là, et ça tourne en rond. Vous ne pouvez donc pas vraiment voir tout le motif d'un coup, mais vous pouvez faire pivoter la porte et en voir différentes parties. Ici, nous venons de voir le motif auquel il ressemble,

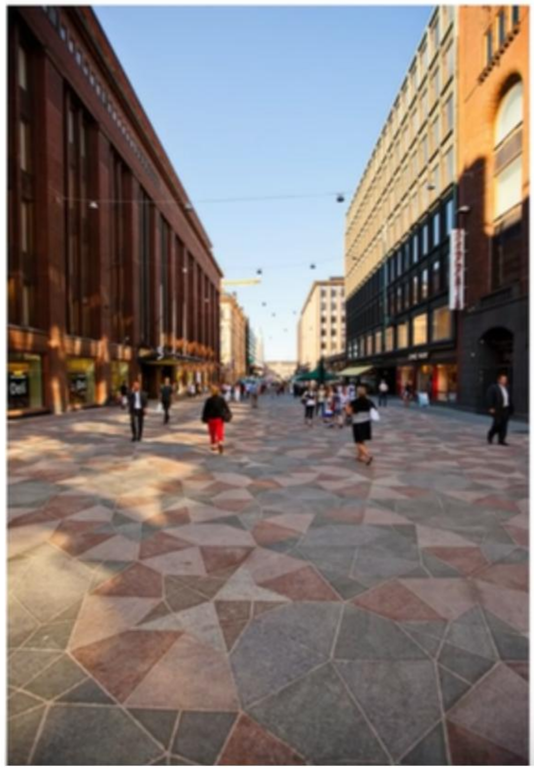
St. John's Cambridge, Penrose Building

Photo: Paul Everest

C'est donc des cerfs-volants et des fléchettes simples, ça a l'air très bien.

Maintenant, c'est Helsinki et je l'ai montré.

Tiles in Helsinki



Et je suis un peu perplexe parce qu'il m'a fallu un peu de temps pour réaliser ce que c'était. A première vue, ça ressemble à autre chose mais quand on regarde bien on voit ces triangles et cette forme, ils font une fléchette ; donc les fléchettes sont décomposées, voyons si je peux en trouver une, ici, ici il y a une fléchette, c'est la plus proche, il y a une fléchette qui est coupée à deux endroits pour faire des carreaux plus petits je suppose qu'ils n'aimaient pas leurs formes de carreaux pour être convexe, je ne sais pas si c'était ça, mais que les cerfs-volants sont des cerfs-volants complets. C'était une très grande zone carrelée de cette façon, je ne pense pas l'avoir jamais vue, mais c'est à Helsinki, en Finlande, d'accord.