

**Formule de Trace en géométrie non-commutative
et zéros de la fonction zeta de Riemann**
Alain CONNES

Abstract *Nous donnons une interprétation spectrale des zéros critiques de la fonction zêta de Riemann qui les fait voir comme les raies d'un spectre d'absorption, alors que les éventuels zéros non-critiques apparaissent comme des résonances. Nous donnons une interprétation géométrique des formules explicites de la théorie des nombres qui deviennent des formules de trace sur l'espace des classes d'adèles. Cela réduit l'hypothèse de Riemann à la validité de la formule de trace et élimine le paramètre δ de notre approche précédente.*

Table des matières

Introduction.

- I** Chaos quantique et flot hypothétique de Riemann.
- II** Géométrie algébrique et corps globaux de caractéristique nulle.
- III** Interprétation spectrale des zéros critiques.
- IV** Formule de trace d'une distribution pour les flots sur des variétés.
- V** L'action $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ de K^* d'un corps local K .
- VI** Le cas global, et le calcul de la formule de trace.
- VII** Preuve de la formule de trace dans le cas S -local.
- VIII** Formule de trace dans le cas global, et élimination de δ .

Remarques générales.

- Appendice I** Preuve du théorème 1.
- Appendice II** Formules explicites.
- Appendice III** Formules de trace d'une distribution.

Introduction

Nous allons donner dans cet article une interprétation spectrale des zéros de la fonction zêta de Riemann et un cadre géométrique dans lequel on peut transposer les idées de la géométrie algébrique impliquant l'action du Frobenius et la formule de Lefschetz. L'interprétation spectrale des zéros de zêta les considèrera comme les raies noires d'un spectre d'absorption. Tous les zéros joueront un rôle du côté spectral de la formule de trace, mais alors que les zéros critiques apparaîtront per-se, les zéros non-critiques apparaîtront comme des résonances et interviendront dans la formule de trace à travers leur potentiel harmonique par rapport à la droite critique. Ainsi, le versant spectral est entièrement

article original de référence Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function, Sel. Math. New ser. 5 (1999), p. 29-106.

lisible sur la page <http://alainconnes.org/fr/bibliography.php>
référence n° 132.

Traduction corrigée en décembre 2020, Denise Vella-Chemla.

canonique, et en prouvant la positivité de la distribution de Weil, nous montrerons que cette égalité avec le côté géométrique, i.e. la formule de trace globale, est équivalente à l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L à Grössencharakter. Nous prendrons modèle dans notre présentation sur la formule des traces de Selberg, mais notre formule diffère de celle-ci selon plusieurs aspects importants. Nous expliquerons d'abord en particulier dans quelle mesure un signe négatif crucial dans l'analyse des fluctuations statistiques des zéros de zêta indique que l'interprétation spectrale devrait être un spectre d'absorption, ou de façon équivalente, devrait être de nature cohomologique. Cela se combinera dans un cadre géométrique qui sera un espace à l'air innocent, l'espace X des classes d' adèles, dans lequel deux adèles qui appartiennent à la même orbite d'action de $GL_1(k)$ (k un corps global), sont considérées comme équivalentes. Le groupe $C_k = GL_1(A)/GL_1(k)$ des classes d'idèles (qui est le correspondant dans la théorie des corps de classes du groupe de Galois) agit par multiplication sur X .

Notre premier résultat préliminaire (théorème 1 de la section III) fournit une interprétation spectrale des zéros de zêta et des fonctions L sur un corps global k , à partir de l'action du groupe des classes d'idèles sur un espace de fonctions de carré intégrable, sur l'espace $X = A/k^*$ des classes d'adèles. Le corollaire 2 fournit le calcul correspondant de la trace spectrale. Ce résultat est seulement préliminaire parce qu'il nécessite un paramètre non naturel δ qui joue le rôle d'un exposant de Sobolev et permet de voir le spectre d'absorption comme un point du spectre.

Notre second résultat préliminaire est un calcul formel (section VI) du caractère de la représentation du groupe des classes d'idèles sur l'espace sous-jacent L^2 . Ce calcul formel donne la distribution de Weil qui est l'ingrédient essentiel de la formule explicite de Riemann-Weil. À ce point-là des recherches (qui était la situation dans [Co]), les problèmes principaux consistent à donner une signification rigoureuse au calcul de la formule de trace et à éliminer ce paramètre non souhaité δ .

Ces deux problèmes seront résolus dans le présent article. Nous démontrons d'abord une formule de trace (théorème 3 de la section V) pour l'action du groupe multiplicatif K^* sur un corps local K sur l'espace de Hilbert $L^2(K)$, et (théorème 4 de la section VII) une formule de trace pour l'action du groupe multiplicatif C_S des classes d'idèles associées à un ensemble fini S de places d'un corps global k , sur l'espace de Hilbert des fonctions à carré intégrable $L^2(X_S)$, où X_S est le quotient de $\prod_{v \in S} k_v$ par l'action du groupe O_S^* des S-unités de k . Dans les deux cas, nous obtenons exactement les termes des formules explicites de Weil qui appartiennent à l'ensemble fini des places. Ce résultat est plutôt important puisque l'espace X_S est hautement non trivial lorsque S est supérieur ou égal à 3. Par exemple, cet espace-quotient n'est pas de type I au sens de la géométrie non-commutative et il est rassurant que la formule de trace continue d'être alors valable dans ce cas.

Nous testons en détail (théorème 6 de l'Appendice II) que la réécriture des formules explicites de Weil qui est prédite par la formule de trace globale est correcte.

Finalement, nous éliminons dans la section VIII, en utilisant des idées qui sont communes et à la formule des traces de Selberg, et à l'explication standard des raies d'absorption en physique, le paramètre problématique δ qui est apparu comme un paramètre des espaces de fonctions de la section III. Nous écrivons la formule globale de trace de manière analogue à la formule des traces

de Selberg. La validité de la formule de trace pour n'importe quel ensemble fini de places découle du théorème 4 de la section VII, mais le cas global est laissé ouvert et on montre (Théorème 5 de la section VIII) qu'il est équivalent à la validité de l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L à Grössencharakter. Cette équivalence, avec la plausibilité de l'obtention d'une preuve directe de la formule de trace selon les lignes du théorème 4 (section VII) constitue le résultat principal de cet article. L'élimination du paramètre δ est l'amélioration principale du présent article relativement à [Co].

C'est une idée ancienne, due à Polya et Hilbert, que dans le but de comprendre la localisation des zéros de la fonction zêta de Riemann, il conviendrait de trouver un espace de Hilbert \mathcal{H} et un opérateur D sur \mathcal{H} dont le spectre est donné par les zéros non triviaux de la fonction zêta. L'espoir est alors que des propriétés convenables d'auto-adjonction de D (de $i(D - \frac{1}{2})$ plus précisément) ou bien des propriétés de positivité de $\Delta = D(1 - D)$ seraient plus aisées à traiter que la conjecture originale. Les raisons principales qui doivent nous faire prendre ces idées très au sérieux sont d'une part le travail de A. Selberg ([Se]) dans lequel un Laplacien Δ est relié de la façon décrite ci-dessous à un analogue de la fonction zêta, et d'autre part l'évidence théorique ([M][B][KS]) et expérimentale ([O][BG]) des fluctuations de l'espacement entre les zéros consécutifs de zêta. Le nombre de zéros de zêta dont la partie imaginaire est inférieure à $E > 0$,

$$(1) \quad N(E) = \# \text{ de zéros } \rho, \quad 0 < \text{Im } \rho < E$$

a une expression asymptotique ([R]) donnée par

$$(2) \quad N(E) = \frac{E}{2\pi} \left(\log \left(\frac{E}{2\pi} \right) - 1 \right) + \frac{7}{8} + o(1) + N_{\text{osc}}(E)$$

où la partie oscillatoire de la fonction N étagée est

$$(3) \quad N_{\text{osc}}(E) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \log \zeta \left(\frac{1}{2} + iE \right)$$

en assumant que E n'est pas la partie imaginaire d'un zéro et en prenant comme logarithme la branche qui vaut 0 à l'+ ∞ .

On montre (cf. [Pat]) que $N_{\text{osc}}(E)$ est en $O(\log E)$. Dans la décomposition (2), les deux termes $\langle N(E) \rangle = N(E) - N_{\text{osc}}(E)$ et $N_{\text{osc}}(E)$ jouent un rôle indépendant. Le premier $\langle N(E) \rangle$, qui fournit la densité moyenne des zéros, provient de la formule de Stirling et est parfaitement contrôlé. Le second $N_{\text{osc}}(E)$ est une manifestation du caractère vraiment aléatoire de la localisation des zéros, et pour éliminer le rôle de la densité, on retourne à une situation de densité uniforme par la transformation

$$(4) \quad x_j = \langle N(E_j) \rangle \quad (E_j \text{ la partie imaginaire du } j^{\text{eme}} \text{ zéro de zêta}).$$

Alors, l'espacement entre deux x_j consécutifs est 1 en moyenne et la seule information qui reste est dans la fluctuation statistique. Il s'avère que ([M][O]), ces fluctuations sont identiques aux fluctuations d'une matrice hermitienne de très grande taille.

H. Montgomery [M] a démontré (en assumant RH) une forme faible de la conjecture suivante (avec $\alpha, \beta > 0$),

$$(5) \quad \text{Card} \{ (i, j) ; i, j \in 1, \dots, M ; x_i - x_j \in [\alpha, \beta] \} \sim M \int_{\alpha}^{\beta} \left(1 - \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \right)^2 \right) du$$

Cette loi (5) est précisément identique à la corrélation entre les valeurs propres de matrices hermitiennes de l'ensemble unitaire gaussien ([M]). De plus, des tests numériques établis par A. Odlyzko ([O][BG]) ont confirmé avec une grande précision le comportement (5) ainsi qu'un comportement analogue pour plus de deux zéros. In [KS], N. Katz et P. Sarnak ont prouvé une loi analogue à celle de Montgomery-Odlyzko pour les fonctions zêta et pour les fonctions L sur des corps de fonctions.

C'est alors une excellente motivation que d'essayer de trouver une paire naturelle (\mathcal{H}, D) ; par naturelle, on veut dire par exemple que l'on pourrait ne même pas avoir à définir la fonction zêta, mais simplement son prolongement analytique, pour obtenir une telle paire (dans le but par exemple d'éviter la farce de définir \mathcal{H} comme l'espace ℓ^2 fabriqué à partir des zéros de zêta).

I. Chaos quantique et flot hypothétique de Riemann

Décrivons tout d'abord en suivant [B] la tentative directe de construire l'espace de Polya-Hilbert à partir de la quantification d'un système dynamique classique. La motivation initiale de la théorie des matrices aléatoires vient de la mécanique quantique. Dans cette théorie, la quantification d'un système dynamique classique donné par son espace des phases X et son hamiltonien h permet d'obtenir un espace de Hilbert \mathcal{H} et un opérateur auto-adjoint H dont le spectre est l'observable principal du système. Pour des systèmes compliqués, la seule information utile à propos de ce spectre est que, alors que la partie moyenne de la fonction de comptage,

$$(1) \quad N(E) = \# \text{ valeurs propres de } H \text{ dans } [0, E]$$

est calculée par une approximation semi-classique comme un volume dans l'espace des phases, la partie oscillatoire,

$$(2) \quad N_{\text{osc}}(E) = N(E) - \langle N(E) \rangle$$

est la même que pour une matrice aléatoire, gouvernée par les statistiques dictées par les symétries du système.

En l'absence de champ magnétique, i.e. pour un hamiltonien classique de la forme,

$$(3) \quad h = \frac{1}{2m} p^2 + V(q)$$

où V est un potentiel à valeurs réelles sur l'espace des configurations, il y a une symétrie naturelle de l'espace classique des phases, appelée la symétrie temporelle inverse,

$$(4) \quad T(p, q) = (-p, q)$$

qui préserve h , et implique que l'ensemble correct sur les matrices aléatoires n'est pas le GUE ci-dessous mais plutôt l'ensemble orthogonal Gaussien : GOE. De ce fait, la partie oscillatoire $N_{\text{osc}}(E)$ se comporte de la même manière qu'une matrice aléatoire *réelle symétrique*.

Bien sûr, H est juste un opérateur spécifique dans \mathcal{H} et, pour qu'il se comporte de façon *générique*, il est nécessaire (cf. [B]) que le système hamiltonien classique (X, h) soit *chaotique* avec des *orbites périodiques* isolées dont les exposants d'instabilité (i.e. les logarithmes des valeurs propres de l'application de Poincaré inverse agissant sur l'espace transverse aux orbites) soient différents de 0.

On peut alors ([B]) écrire une approximation semi-classique de la fonction oscillatoire $N_{\text{osc}}(E)$

$$(5) \quad N_{\text{osc}}(E) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \int_0^\infty \text{Trace}(H - (E + i\eta))^{-1} i d\eta$$

en utilisant l'approximation de la phase stationnaire de l'intégrale fonctionnelle correspondante. Pour un système dont la configuration est de dimension 2, cela donne ([B] (15)),

$$(6) \quad N_{\text{osc}}(E) \simeq \frac{1}{\pi} \sum_{\gamma_p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{2\text{sh}\left(\frac{m\lambda_p}{2}\right)} \sin(S_{\text{pm}}(E))$$

où les γ_p sont les orbites périodiques primitives, m correspondant au nombre de fois où l'orbite est traversée, alors que les exposants d'instabilité sont les $\pm\lambda_p$. La phase $S_{\text{pm}}(E)$ est à un facteur constant près, égale à $m E T_\gamma^\#$ où $T_\gamma^\#$ est la période de l'orbite primitive γ_p .

La formule (6) donne des informations très précieuses ([B]) sur le "flot de Riemann" hypothétique dont la quantification devrait fournir l'espace de Polya-Hilbert. On note particulièrement que la formule du produit d'Euler pour la fonction zêta amène (cf. [B]) une formule asymptotique similaire pour $N_{\text{osc}}(E)$ (3),

$$(7) \quad N_{\text{osc}}(E) \simeq \frac{-1}{\pi} \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{m/2}} \sin(m E \log p).$$

La comparaison de (6) et (7) fournit les informations suivantes

(A) Les orbites périodiques primitives devraient être étiquetées par les nombres premiers $p = 2, 3, 5, 7, \dots$, les périodes devraient être les $\log p$ et les exposants d'instabilité devraient être les $\lambda_p = \pm \log p$.

De plus, puisque chaque orbite est comptée seulement une fois, le flot de Riemann ne devrait pas présenter la symétrie T de (4) dont l'effet serait de dupliquer le nombre d'orbites. Ce dernier point exclut en particulier les flots géodésiques puisqu'ils respectent la symétrie temporelle T . Ainsi nous obtenons que :

(B) Le flot de Riemann ne peut pas satisfaire la symétrie de renversement du temps.

Pourtant, il y a deux importants problèmes (cf. [B]) entre les formules (6) et (7). Le premier est le signe *moins* au début de la formule (7), et le second est que bien que $2\text{sh}\left(\frac{m\lambda_p}{2}\right) \sim p^{m/2}$ quand $m \rightarrow \infty$, nous n'avons pas une égalité pour les valeurs finies de m .

Il y a donc deux difficultés fondamentales et pour les éliminer, nous utiliserons la stratégie bien connue consistant à élargir le problème au cas des *corps globaux* arbitraires. En restreignant alors le domaine au cas des corps de fonctions, nous obtiendrons une précieuse information supplémentaire.

II. Géométrie algébrique et corps globaux de caractéristique nulle

Les propriétés de base de la fonction zêta de Riemann s'étendent aux fonctions zêta associées à un corps global arbitraire, et il est peu probable que l'on puisse régler le problème de l'interprétation spectrale des zéros puis trouver le flot de Riemann pour le cas particulier des corps globaux \mathbb{Q} des nombres rationnels, sans du même coup régler ces problèmes pour tous les corps globaux simultanément.

La définition conceptuelle d'un tel corps k , est :

Un corps k est un corps global si et seulement s'il est discret et cocompact dans un anneau abélien semi-simple localement compact (non discret) A .

De cela découle que A dépend alors fonctoriellement de k et est appelé l'anneau des adèles de k , souvent noté k_A . Aussi, bien que le corps k lui-même n'ait aucune topologie intéressante, il y a un anneau, et avec une topologie hautement non triviale, qui est canoniquement associé à k .

Quand la caractéristique p d'un corps global k est > 0 , le corps k est le corps des fonctions sur une courbe algébrique non-singulière Σ définie sur un corps fini \mathbb{F}_q inclus dans k comme sous-corps fini maximal, appelé le corps des constantes. On peut alors appliquer les idées de la géométrie algébrique, d'abord développée sur \mathbb{C} , à la géométrie de la courbe Σ et obtenir une interprétation des propriétés de base de la fonction zêta de k ; le dictionnaire contient en particulier les lignes suivantes :

Interprétation spectrale des zéros	Valeurs propres de l'action de Frobenius sur la cohomologie ℓ -adique
Équation fonctionnelle	Théorème de Riemann Roch (Dualité de Poincaré)
Formules explicites de la théorie des nombres	Formule de Lefschetz pour le Frobenius
Hypothèse de Riemann	Positivité de Castelnuovo

Puisque \mathbb{F}_q n'est pas algébriquement clos, les points de Σ définis sur \mathbb{F}_q ne suffisent pas et on a besoin de considérer $\bar{\Sigma}$, les points de Σ sur la fermeture algébrique $\bar{\mathbb{F}}_q$ de \mathbb{F}_q , qui sont obtenus en adjoignant à \mathbb{F}_q les racines de l'unité d'ordre premier à q . Cet ensemble de points est une union dénombrable d'orbites périodiques sous l'action de l'automorphisme de Frobenius, ces orbites étant paramétrées

par l'ensemble des places de k et leurs périodes sont dans ce cas données par les analogues des $\log p$ de (A). Comme c'est un ensemble dénombrable, il ne se qualifie pas comme analogue du flot de Riemann et il acquiert seulement une structure intéressante de la géométrie algébrique. Le signe moins qui était problématique dans la discussion ci-dessus admet ici une belle résolution puisque l'analogue de l'espace de Polya-Hilbert est donné, si l'on remplace \mathbb{C} par \mathbb{Q}_ℓ le corps des nombres ℓ -adiques $\ell \neq p$, par le groupe de cohomologie

$$(2) \quad H_{\text{et}}^1(\bar{\Sigma}, \mathbb{Q}_\ell)$$

qui apparaît avec un signe couvrant moins dans la formule de Lefschetz

$$(3) \quad \sum (-1)^j \text{Trace } \varphi^* / H^j = \sum_{\varphi(x)=x} 1.$$

Pour le cas général, cela suggère que :

(C) L'espace de Polya-Hilbert \mathcal{H} devrait provenir de son espace $\ominus \mathcal{H}$.

En d'autres termes, l'interprétation spectrale des zéros de la fonction zêta de Riemann devrait être un spectre d'absorption plutôt qu'un spectre d'émission, pour emprunter le langage de la spectroscopie.

L'élément suivant que l'on apprend de cette excursion dans la caractéristique $p > 0$ est que dans ce cas, on ne travaille pas avec un flot mais plutôt avec une simple transformation. En fait, en tirant parti des couvertures de Σ et de l'isomorphisme fondamental de la théorie des corps de classes, on trouve que le groupe naturel qui devrait remplacer \mathbb{R} pour le flot général de Riemann est le groupe des classes d'idèles :

$$(D) \quad C_k = \text{GL}_1(A)/k^* .$$

Nous pouvons alors mémoriser les informations (A) (B) (C) (D) que nous avons obtenues jusque-là et chercher le flot de Riemann comme étant une action de C_k sur un espace hypothétique X .

III. Interprétation spectrale des zéros critiques

Il y a une troisième approche au problème des zéros de la fonction zêta de Riemann, due à G. Pólya [P] et à M. Kac [K] et poursuivie plus tard dans [J] [BC]. Elle est basée sur la mécanique statistique et sur la construction d'un système quantique statistique dont la *fonction de partition* est la fonction zêta de Riemann. Un tel système a été construit naturellement dans [BC] et il indique, en utilisant la première ligne du dictionnaire de Géométrie non-commutative (notamment la correspondance entre les espaces-quotients et les algèbres non-commutatives) que l'espace X devrait en général être :

$$(1) \quad X = A/k^*$$

littéralement le quotient de l'espace $A = k_A$ des adèles par l'action du groupe multiplicatif k^* ,

$$(2) \quad a \in A, q \in k^* \rightarrow aq \in A.$$

Cet espace X apparaît déjà d'une manière très implicite dans le travail de Tate et Iwasawa sur l'équation fonctionnelle. C'est un espace non-commutatif en ce que, même au niveau de la théorie de la mesure, c'est un espace-quotient très "sioux". Par exemple, au niveau de la théorie de la mesure, l'algèbre de von Neumann correspondante,

$$(3) \quad R_{01} = L^\infty(A) \rtimes k^*$$

où A est doté de sa mesure de Haar comme groupe additif, est le facteur hyperfini de type II_∞ .

Le groupe des classes d'idèles C_k agit sur X par

$$(4) \quad (j, a) \rightarrow ja \quad \forall j \in C_k, a \in X$$

et il était impératif de diviser A par k^* pour que (4) ait le bon sens.

Nous reviendrons ultérieurement sur l'analogie entre l'action de C_k sur R_{01} et l'action du groupe de Galois sur l'extension abélienne maximale de k .

Ce que nous allons faire maintenant va consister à construire l'espace de Hilbert L_δ^2 des fonctions sur X avec une croissance indexée par $\delta > 1$. Puisque X est un espace-quotient, nous apprendrons d'abord dans la variété habituelle comment obtenir l'espace de Hilbert $L^2(M)$ des fonctions de carré intégrable sur une variété M en travaillant seulement sur la couverture universelle \widetilde{M} avec l'action de $\Gamma = \pi_1(M)$. Chaque fonction $f \in C_c^\infty(\widetilde{M})$ donne naissance à une fonction \widetilde{f} sur M par

$$(5) \quad \widetilde{f}(x) = \sum_{\pi(\widetilde{x})=x} f(\widetilde{x})$$

et toutes les $g \in C^\infty(M)$ apparaissent de cette manière. De plus, on peut écrire le produit intérieur de l'espace de Hilbert $\int_M \widetilde{f}_1(x) \widetilde{f}_2(x) dx$, en terme de f_1 et f_2 seules. Ainsi $\|\widetilde{f}\|^2 = \int \left| \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma x) \right|^2 dx$ où l'intégrale est calculée sur un domaine fondamental pour Γ agissant sur M . Cette formule définit une norme d'espace préhilbertien sur $C_c^\infty(\widetilde{M})$ et $L^2(M)$ est juste la complétion de $C_c^\infty(\widetilde{M})$ pour cette norme. Noter que toute fonction de la forme $f - f_\gamma$ a une norme qui s'évanouit et qui, de ce fait, disparaît pendant le processus de complétion. Dans notre cas où $X = A/k^*$, nous avons du coup besoin de définir une norme analogue sur l'espace de Bruhat-Schwartz $\mathcal{S}(A)$ des fonctions sur A (cf. Appendice I pour une définition générale de l'espace de Bruhat-Schwartz). Puisque 0 reste fixe par l'action de k^* , l'expression $\sum_{\gamma \in k^*} f(\gamma x)$ n'a pas de sens pour $x = 0$ à moins que l'on ait $f(0) = 0$. De plus, quand $|x| \rightarrow 0$, les sommes ci-dessus approximent, en tant que sommes de Riemann, le produit des $|x|^{-1}$ par $\int f dx$ pour la mesure additive de Haar, et alors on a aussi besoin que $\int f dx = 0$. Nous pouvons maintenant définir l'espace de Hilbert $L_\delta^2(X)_0$ comme la complétion du sous-espace de codimension 2

$$(6) \quad \mathcal{S}(A)_0 = \{f \in \mathcal{S}(A) ; f(0) = 0, \int f dx = 0\}$$

pour la norme $\|\cdot\|_\delta$ donnée par

$$(7) \quad \|f\|_\delta^2 = \int \left| \sum_{q \in k^*} f(qx) \right|^2 (1 + \log^2 |x|)^{\delta/2} |x| d^*x$$

où l'intégrale calculée sur A^*/k^* et d^*x est la mesure de Haar multiplicative sur A^*/k^* . L'horrible terme $(1 + \log^2 |x|)^{\delta/2}$ est alors là pour contrôler la croissance des fonctions sur le quotient non-compact. Nous verrons comment supprimer ce terme plus tard dans la section VII. Noter que $|qx| = |x|$ pour tout $q \in k^*$.

Le point-clé est que nous utilisons la mesure $|x| d^*x$ plutôt que la mesure de Haar additive dx . Bien sûr, pour un corps local K , on a $dx = |x| d^*x$ mais cela ne sert à rien dans la situation globale ci-dessus. On a plutôt,

$$(8) \quad dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon |x|^{1+\varepsilon} d^*x.$$

Une représentation naturelle de C_k sur $L_\delta^2(X)_0$ est donnée par :

$$(9) \quad (U(j)f)(x) = f(j^{-1}x) \quad \forall x \in A, j \in C_k$$

et le résultat est indépendant du choix d'un relèvement de j dans $J_k = \text{GL}_1(A)$ parce que les fonctions $f - f_q$ sont dans le noyau de la norme. Les conditions (6) qui définissent $\mathcal{S}(A)_0$ sont invariantes sous l'action de C_k et elles fournissent l'action suivante de C_k sur le complémentaire à 2 dimensions de $\mathcal{S}(A)_0 \subset \mathcal{S}(A)$; ce complémentaire est $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1)$ où \mathbb{C} est le module trivial C_k (correspondant à $f(0)$) alors que le twist de Tate $\mathbb{C}(1)$ est le module

$$(10) \quad (j, \lambda) \rightarrow |j| \lambda$$

provenant de l'égalité

$$(11) \quad \int f(j^{-1}x) dx = |j| \int f(x) dx.$$

Dans le but d'analyser la représentation (9) de C_k sur $L_\delta^2(X)_0$, nous allons la relier à la représentation gauche régulière du groupe C_k sur l'espace de Hilbert $L_\delta^2(C_k)$ obtenue de l'espace de Hilbert suivant des fonctions de norme carrée,

$$(12) \quad \|\xi\|_\delta^2 = \int_{C_k} |\xi(g)|^2 (1 + \log^2 |g|)^{\delta/2} d^*g$$

où nous avons normalisé la mesure de Haar du groupe C_k , avec comme module,

$$(13) \quad | \cdot | : C_k \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

de telle façon que l'on ait (cf. [W3])

$$(14) \quad \int_{|g| \in [1, \Lambda]} d^*g \sim \log \Lambda \quad \text{quand} \quad \Lambda \rightarrow +\infty.$$

La représentation régulière gauche V de C_k sur $L_\delta^2(C_k)$ est

$$(15) \quad (V(a)\xi)(g) = \xi(a^{-1}g) \quad \forall g, a \in C_k.$$

Noter qu'à cause du poids $(1 + \log^2 |x|)^{\delta/2}$, cette représentation est *non* unitaire mais qu'elle satisfait l'estimation de la croissance

$$(16) \quad \|V(g)\| = O(\log |g|)^{\delta/2} \quad \text{quand} \quad |g| \rightarrow \infty$$

qui découle de l'inégalité (valable pour $u, v \in \mathbb{R}$)

$$(17) \quad \rho(u+v) \leq 2^{\delta/2} \rho(u) \rho(v), \quad \rho(u) = (1+u^2)^{\delta/2}.$$

Nous définissons E comme l'isométrie linéaire de $L_\delta^2(X)_0$ dans $L_\delta^2(C_k)$ donnée par l'égalité,

$$(18) \quad E(f)(g) = |g|^{1/2} \sum_{q \in k^*} f(qg) \quad \forall g \in C_k.$$

En comparant (7) à (12), on voit que E est une isométrie et le facteur $|g|^{1/2}$ est imposé par la comparaison des mesures $|g| d^*g$ de (7) et d^*g de (12).

$$\text{On a } E(U(a)f)(g) = |g|^{1/2} \sum_{k^*} (U(a)f)(qg) = |g|^{1/2} \sum_{k^*} f(a^{-1}qg) = |a|^{1/2} |a^{-1}g|^{1/2} \sum_{k^*} f(qa^{-1}g) = |a|^{1/2} (V(a)E(f))(g).$$

Ainsi,

$$(19) \quad EU(a) = |a|^{1/2} V(a)E.$$

Cette équivariance montre que l'image de E dans $L_\delta^2(C_k)$ est un espace clos invariant pour la représentation V .

Le théorème ci-dessous et son corollaire montrent que le conoyau $\mathcal{H} = L_\delta^2(C_k) / \text{Im}(E)$ de l'isométrie E joue le rôle de l'espace de Polya-Hilbert. Puisque $\text{Im } E$ est invariant sous la représentation V , on définit W comme la représentation correspondante de C_k sur \mathcal{H} .

Le groupe localement compact abélien C_k est (de façon non canonique) isomorphe à $K \times N$ où

$$(20) \quad K = \{g \in C_k ; |g| = 1\}, \quad N = \text{image } | \cdot | \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Pour des corps de nombres, on a $N = \mathbb{R}_+^*$ alors que pour des corps de caractéristique non-nulle, $N \simeq \mathbb{Z}$ est le sous-groupe $q^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_+^*$ (où $q = p^\ell$ est la cardinalité du corps des constantes).

Nous choisissons (de façon non canonique) un isomorphisme

$$(21) \quad C_k \simeq K \times N.$$

Par construction, la représentation W satisfait (en utilisant (16)),

$$(22) \quad \|W(g)\| = O(\log |g|)^{\delta/2}$$

et sa restriction à K est unitaire. Aussi, \mathcal{H} se scinde en une somme directe canonique de sous-espaces orthogonaux 2 à 2,

$$(23) \quad \mathcal{H} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{K}} \mathcal{H}_\chi, \quad \mathcal{H}_\chi = \{\xi ; W(g)\xi = \chi(g)\xi, \forall g \in K\}$$

où χ parcourt le groupe dual de Pontrjagin K , qui est le groupe abélien discret \widehat{K} des caractères de K . En utilisant l'isomorphisme non canonique (21), i.e. l'inclusion correspondante $N \subset C_k$, on peut maintenant restreindre la représentation W à n'importe lequel des secteurs \mathcal{H}_χ . Quand

la caractéristique de k est > 0 , alors $N \simeq \mathbb{Z}$ et la condition (22) montre que l'action de N sur \mathcal{H}_χ est donnée par un seul opérateur à spectre *unitaire* (on utilise la formule du rayon spectral $|\text{Spec } w| = \overline{\text{Lim}} \|w^n\|^{1/n}$). Quand la caractéristique de k est nulle, on travaille avec une action de $\mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{R}$ sur \mathcal{H}_χ et la condition (22) montre que cette représentation est engendrée par un opérateur clos non-borné D_χ à spectre purement imaginaire. Le résolvant $R_\lambda = (D_\chi - \lambda)^{-1}$ est donné, pour $\text{Re } \lambda > 0$, par l'égalité

$$(24) \quad R_\lambda = \int_0^\infty W_\chi(e^s) e^{-\lambda s} ds$$

et pour $\text{Re } \lambda < 0$ par,

$$(25) \quad R_\lambda = \int_0^\infty W_\chi(e^{-s}) e^{\lambda s} ds$$

alors que l'opérateur D_χ est défini par

$$(26) \quad D_\chi \xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (W_\chi(e^\varepsilon) - 1) \xi.$$

Théorème 1. *Soient $\chi \in \widehat{K}$, $\delta > 1$, \mathcal{H}_χ et D_χ comme ci-dessus. Alors D_χ a un spectre discret, $\text{Sp } D_\chi \subset i\mathbb{R}$ est l'ensemble des parties imaginaires des zéros de la fonction L à Grössencharakter $\tilde{\chi}$ de partie réelle $\frac{1}{2}$; $\rho \in \text{Sp } D \Leftrightarrow L(\tilde{\chi}, \frac{1}{2} + \rho) = 0$ et $\rho \in i\mathbb{R}$, où $\tilde{\chi}$ est l'unique extension de χ à C_k qui est égale à 1 sur N . De plus, la multiplicité des ρ dans $\text{Sp } D$ est égale au plus grand entier $n < \frac{1+\delta}{2}$, n étant inférieur à la multiplicité de $n \leq \frac{1}{2} + \rho$ comme zéro de L .*

Le théorème 1 a une formulation similaire quand la caractéristique de k est non-nulle. Le corollaire suivant est valide pour les corps globaux k de caractéristique arbitraire.

Corollaire 2. *Pour toute fonction de Schwartz $h \in \mathcal{S}(C_k)$ l'opérateur $W(h) = \int W(g) h(g) d^* g$ dans \mathcal{H} appartient à la classe des traces, et sa trace est donnée par*

$$\text{Trace } W(h) = \sum_{\substack{L(\tilde{\chi}, \frac{1}{2} + \rho) = 0 \\ \rho \in i\mathbb{R}/N^\perp}} \widehat{h}(\tilde{\chi}, \rho)$$

où la multiplicité est comptée comme dans le Théorème 1 et où la transformée de Fourier \widehat{h} de h est définie par,

$$\widehat{h}(\tilde{\chi}, \rho) = \int_{C_k} h(u) \tilde{\chi}(u) |u|^\rho d^* u.$$

Noter que nous n'avons pas eu à définir les fonctions L , mais seulement leur prolongement analytique, avant d'établir le théorème, qui montre que la paire

$$(27) \quad (\mathcal{H}_\chi, D_\chi)$$

se qualifie certainement comme un espace de Polya-Hilbert.

Le cas de la fonction zêta de Riemann correspond au caractère trivial $\chi = 1$ pour le corps global $k = \mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

En général, les zéros des fonctions L peuvent avoir des multiplicités mais l'on s'attend à ce que pour un Grössencharacter χ , cette multiplicité soit bornée, de telle façon que pour une valeur suffisamment grande de δ , la multiplicité spectrale de D sera la bonne. Quand la caractéristique de k est > 0 , cela est certainement vrai.

Si l'on modifie le choix de l'isomorphisme non canonique (21), cela change l'opérateur D en

$$(28) \quad D' = D - i s$$

où $s \in \mathbb{R}$ est déterminé par l'égalité

$$(29) \quad \tilde{\chi}'(g) = \tilde{\chi}(g) |g|^{i s} \quad \forall g \in C_k.$$

La cohérence de l'établissement du théorème est assurée par l'égalité

$$(30) \quad L(\tilde{\chi}', z) = L(\tilde{\chi}, z + i s) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Quand les zéros de L apparaissent de façon multiple et quand δ est assez grand, l'opérateur D est *non* semi-simple et il a une forme de Jordan non triviale (cf. Appendice I). Cela est compatible avec la condition presque unitaire (22) mais pas avec une symétrie biaisée pour D .

La preuve du théorème 1, fournie dans l'Appendice I, est basée sur l'interprétation de la distribution théorique par A. Weil [W2] de l'équation fonctionnelle basée sur l'idée de Tate et Iwasawa. Notre construction devrait être comparée à [Bg] et [Z].

Comme on s'y attend du fait de (C), l'espace de Polya-Hilbert \mathcal{H} apparaît comme un conoyau. Puisqu'on obtient l'espace de Hilbert $L_\delta^2(X)_0$ en imposant deux conditions linéaires sur $\mathcal{S}(A)$,

$$(31) \quad 0 \rightarrow \mathcal{S}(A)_0 \rightarrow \mathcal{S}(A) \xrightarrow{L} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1) \rightarrow 0,$$

nous définirons $L_\delta^2(X)$ de telle manière qu'il apparaisse dans une séquence exacte de C_k -modules

$$(32) \quad 0 \rightarrow L_\delta^2(X)_0 \rightarrow L_\delta^2(X) \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1) \rightarrow 0.$$

Nous pouvons alors utiliser la séquence exacte de C_k -modules

$$(33) \quad 0 \rightarrow L_\delta^2(X)_0 \rightarrow L_\delta^2(C_k) \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

avec le Corollaire 2 pour calculer de manière formelle quel devrait être le caractère du module $L_\delta^2(X)$. En utilisant (32) et (33), nous obtenons,

$$(34) \quad \text{Trace}(U(h)) = \hat{h}(0) + \hat{h}(1) - \sum_{\substack{L(\chi, \rho)=0 \\ \text{Re } \rho = \frac{1}{2}}} \hat{h}(\chi, \rho) + \infty h(1)$$

où $\hat{h}(\chi, \rho)$ est défini par le Corollaire 2 et

$$(35) \quad U(h) = \int_{C_k} U(g) h(g) d^* g$$

alors que la fonction test h est dans un espace de fonctions convenable. Noter que la trace du côté gauche de (34) n'a de sens qu'après qu'on ait procédé à une régularisation adéquate puisque la représentation régulière gauche de C_k n'est pas traçable. Cette situation est similaire à celle rencontrée par Atiyah et Bott ([AB]) dans leur preuve de la formule de Lefschetz. Nous devons d'abord apprendre comment calculer la trace ci-dessus de manière formelle à partir des points fixes de l'action de C_k sur X . Dans la section VII, nous montrerons comment régulariser la trace et éliminer complètement le paramètre δ .

IV. Formule de trace d'une distribution pour les flots sur des variétés

Dans le but de comprendre comment le côté gauche de l'égalité (34) devrait être calculé, nous devrions d'abord rendre compte de la preuve de la formule habituelle de Lefschetz par Atiyah-Bott ([AB]) et décrire le calcul de la trace théorique de la distribution sur les variétés, qui est une variation sur le thème de [AB] et qui a été fournie par Guillemin-Sternberg [GS]. Nous nous référons à l'Appendice III pour un traitement plus détaillé indépendant des coordonnées [GS].

Commençons par un difféomorphisme φ d'une variété lisse compacte M et supposons que le graphe de φ est transverse à la diagonale sur $M \times M$. On peut alors aisément définir et calculer la trace de la distribution théorique de l'opérateur $U : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$,

$$(1) \quad (U\xi)(x) = \xi(\varphi(x)).$$

Par exemple, soit $k(x, y)$ la distribution de Schwartz sur $M \times M$ telle que

$$(2) \quad (U\xi)(x) = \int k(x, y) \xi(y) dy,$$

La trace de la distribution sur U est simplement

$$(3) \quad \text{Trace}(U) = \int k(x, x) dx,$$

Près de la diagonale et en coordonnées locales, on obtient :

$$(4) \quad k(x, y) = \delta(y - \varphi(x))$$

où δ est la distribution de Dirac.

Puisque, par hypothèse, les points fixes de φ sont isolés, on peut calculer la trace (3) comme une somme finie $\sum_{x, \varphi(x)=x}$ et obtenir la contribution de chaque point fixe $x \in M$, $\varphi(x) = x$, comme

$$(5) \quad \frac{1}{|1 - \varphi'(x)|}$$

où $\varphi'(x)$ est le Jacobien de φ et $|A| = |\det A|$.

On utilise simplement l'inversibilité de $\text{id} - \varphi'(x)$ pour effectuer un changement de variables dans l'intégrale,

$$(6) \quad \int \delta(y - \varphi(y)) dy.$$

On obtient alors (cf. [AB]),

$$(7) \quad \text{Trace}(U) = \sum_{x, \varphi(x)=x} \frac{1}{|1 - \varphi'(x)|}.$$

Ce calcul s'étend immédiatement à l'action de φ sur les sections d'un fibré vectoriel équivariant E tel que le fibré $\wedge^k T^*$, dont les sections $C^\infty(M, E)$ sont les formes lisses de degré k . La somme alternée des traces théoriques de la distribution correspondante constitue la trace *ordinaire* de l'action de φ sur la cohomologie de de Rham, amenant ainsi à la formule habituelle de Lefschetz,

$$(8) \quad \sum (-1)^j \text{Trace} \varphi^* / H^j = \sum_{\varphi(x)=x} \text{sign} \det(1 - \varphi'(x)).$$

Référons-nous à l'appendice qui utilise des notations plus pédantes pour montrer que la trace théorique de la distribution est indépendante des coordonnées.

Nous allons maintenant écrire l'analogie de la formule (7) dans le cas d'un flot $F_t = \exp(tv)$ de difféomorphismes de M , où $v \in C^\infty(M, T)$ est un champ de vecteurs sur M . Nous obtenons un groupe à un paramètre d'opérateurs agissant sur $C^\infty(M)$,

$$(9) \quad (U_t \xi)(x) = \xi(F_t(x)) \quad \forall \xi \in C^\infty(M), x \in M, t \in \mathbb{R},$$

et nous avons besoin de la formule pour,

$$(10) \quad \rho(h) = \text{Trace} \left(\int h(t) U_t dt \right), \quad h \in C_c^\infty(\mathbb{R}), h(0) = 0.$$

La condition $h(0) = 0$ est nécessaire parce que nous ne pouvons pas être assurés que la fonction Identité F_0 est transverse à la diagonale.

Pour définir ρ comme une distribution évaluée sur la fonction test h , choisissons f comme étant la fonction suivante,

$$(11) \quad f : X = M \times \mathbb{R} \rightarrow Y = M, \quad f(x, t) = F_t(x).$$

Le graphe de f est la sous-variété Z de $X \times Y$,

$$(12) \quad Z = \{(x, t, y) ; y = F_t(x)\}.$$

Soit φ l'application diagonale,

$$(13) \quad \varphi(x, t) = (x, t, x), \quad \varphi : M \times \mathbb{R} \rightarrow X \times Y$$

et supposons la transversalité $\varphi \pitchfork Z$ en dehors de $M \times (0)$.

Soit τ la distribution,

$$(14) \quad \tau = \varphi^*(\delta(y - F_t(x)) dy),$$

et q la seconde projection,

$$(15) \quad q(x, t) = t \in \mathbb{R},$$

alors, par définition, ρ est le foncteur image directe $q_*(\tau)$ de la distribution τ .

On peut vérifier (cf. Appendice III) que $q_*(\tau)$ est une fonction généralisée.

Exactement comme dans le cas d'une transformation simple, les contributions à (10) viendront des points fixes de F_t . Ces dernières viendront soit d'un zéro du champ vectoriel v , (i.e. $x \in M$ tel que $v_x = 0$) soit d'une orbite périodique γ du flot et nous appellerons $T_\gamma^\#$ la longueur d'une telle orbite périodique.

Sous l'hypothèse de transversalité ci-dessus, la formule pour (10) est (cf. [GS], [G] et l'Appendice III),

$$(16) \quad \text{Trace} \left(\int h(t) U_t dt \right) = \sum_{x, v_x=0} \int \frac{h(t)}{|1-(F_t)_*|} dt + \sum_\gamma \sum_T T_\gamma^\# \frac{1}{|1-(F_T)_*|} h(T)$$

où dans la seconde somme, γ est une orbite périodique de longueur $T_\gamma^\#$, et T varie dans $\mathbb{Z} T_\gamma^\#$ tandis que $(F_T)_*$ est l'application inverse de Poincaré, i.e. la restriction du plan tangent à la transverse à l'orbite.

On peut réécrire (16) sous une forme plus simple ainsi,

$$(17) \quad \text{Trace} \left(\int h(t) U_t dt \right) = \sum_\gamma \int_{I_\gamma} \frac{h(u)}{|1-(F_u)_*|} d^*u,$$

où les zéros $x \in M$, $v_x = 0$, sont aussi considérés comme des orbites périodiques γ , alors que $I_\gamma \subset \mathbb{R}$ est le sous-groupe d'isotopie d'un $x \in \gamma$, et où d^*u est l'unique mesure de Haar dans I_γ telle que le covolume de I_γ soit égal à 1, i.e. tel que pour l'unique mesure de Haar $d\mu$ de masse totale 1 sur \mathbb{R}/I et pour tout $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$(18) \quad \int_{\mathbb{R}} f(t) dt = \int_{\mathbb{R}/I} \left(\int_I f(u+s) d^*u \right) d\mu(s).$$

On écrit également $(F_u)_*$ pour la restriction du plan tangent F_u à l'espace transverse aux orbites.

Pour comprendre à quoi ressemble $(F_t)_*$ en un zéro de v , on peut remplacer $v(x)$ pour x proche de x_0 par son image tangentielle. Pour des raisons de simplicité, prenons le cas en dimension 1, avec $v(x) = x \frac{\partial}{\partial x}$, agissant sur $\mathbb{R} = M$.

On a $F_t(x) = e^t x$. Puisque F_t est linéaire, le plan tangent $(F_t)_*$ est

$$(19) \quad (F_t)_* = e^t$$

et (12) devient

$$(20) \quad \text{Trace} \left(\int h(t) U_t dt \right) = \int \frac{h(t)}{|1-e^t|} dt.$$

Ainsi, pour ce flot, la formule de trace de la distribution est

$$(21) \quad \text{Trace}(U(h)) = \int \frac{h(u)}{|1-u|} d^*u$$

où nous utilisons une notation multiplicative de telle façon que \mathbb{R}_+^* agisse sur \mathbb{R} par multiplication, alors que $U(h) = \int U(v)h(v) d^*v$ et d^*v est la mesure de Haar du groupe \mathbb{R}_+^* .

On peut traiter de manière similaire l'action, par multiplication, du groupe des nombres complexes non-nuls de la variété \mathbb{C} .

Nous allons maintenant étudier le cas plus général d'un corps local arbitraire.

V. L'action $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ de K^* d'un corps local K .

Soit K un corps local et considérons l'application,

$$(1) \quad f : K \times K^* \rightarrow K, \quad f(x, \lambda) = \lambda x$$

ainsi que l'application diagonale,

$$(2) \quad \varphi : K \times K^* \rightarrow K \times K^* \times K, \quad \varphi(x, \lambda) = (x, \lambda, x)$$

comme dans IV (11) et (12) ci-dessous.

Quand K est archimédien, on est dans le cadre des variétés et on peut associer à f une δ -section de support $Z = \text{Graphe}(f)$,

$$(3) \quad \delta_Z = \delta(y - \lambda x) dy.$$

En utilisant la projection $q(x, \lambda) = \lambda$ de $K \times K^*$ sur K^* , on considère alors comme ci-dessus la fonction généralisée sur K^* donnée par,

$$(4) \quad q_*(\varphi^* \delta_Z).$$

Le calcul formel de cette fonction généralisée de λ est

$$\begin{aligned} \int \delta(x - \lambda x) dx &= \int \delta((1 - \lambda)x) dx = \int \delta(y) d((1 - \lambda)^{-1} y) \\ &= |1 - \lambda|^{-1} \int \delta(y) dy = |1 - \lambda|^{-1}. \end{aligned}$$

Nous devons justifier cela en calculant la convolution des transformées de Fourier de $\delta(x - y)$ et $\delta(y - \lambda x)$ puisque c'est la manière correcte de définir le produit de deux distributions dans ce contexte local.

Calculons d'abord la transformée de Fourier de $\delta(ax + by)$ où $(a, b) \in K^2 (\neq 0)$. L'appariement de K^2 et de son dual K^2 est donné par

$$(5) \quad \langle (x, y), (\xi, \eta) \rangle = \alpha(x\xi + y\eta) \in U(1).$$

où α est un caractère fixe non trivial du groupe additif K .

Soit $(c, d) \in K^2$ tel que $ad - bc = 1$ et considérons la transformation linéaire inversible de K^2 ,

$$(6) \quad L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

La transformée de Fourier de $\varphi \circ L$ est donnée par

$$(7) \quad (\varphi \circ L)^\wedge = |\det L|^{-1} \widehat{\varphi} \circ (L^{-1})^t.$$

Ici, on a $\det L = 1$ et $(L^{-1})^t$ définie par

$$(8) \quad (L^{-1})^t = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

On calcule d'abord la transformée de Fourier de $\delta(x)$, la mesure de Haar additive dx est normalisée de façon à être auto-duale et en une seule variable, $\delta(x)$ et 1 sont transformées de Fourier l'une de l'autre, de telle sorte que

$$(9) \quad (\delta \otimes 1)^\wedge = 1 \otimes \delta.$$

En utilisant (7), on obtient que la transformée de Fourier de $\delta(ax + by)$ est $\delta(-b\xi + a\eta)$. On doit alors calculer la convolution des deux fonctions généralisées, $\delta(\xi + \eta)$ et $\delta(\xi + \lambda\eta)$. Maintenant,

$$\int f(\xi, \eta) \delta(\xi + \eta) d\xi d\eta = \int f(\xi, -\xi) d\xi$$

et

$$\int f(\xi, \eta) \delta(\xi + \lambda\eta) d\xi d\eta = \int f(-\lambda\eta, \eta) d\eta$$

de telle manière que l'on doit gérer deux mesures portées respectivement par deux lignes distinctes. Leur convolution évaluée sur $f \in C_c^\infty(K^2)$ est

$$\begin{aligned} \int f(\alpha + \beta) d\mu(\alpha) d\nu(\beta) &= \int \int f((\xi, -\xi) + (-\lambda\eta, \eta)) d\xi d\eta \\ &= \int \int f(\xi - \lambda\eta, -\xi + \eta) d\xi d\eta \\ &= \left(\int \int f(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right) \times |J|^{-1} \end{aligned}$$

où J est le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = L$, de telle manière que $\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$. On a $J = 1 - \lambda$ et alors, la convolution des fonctions généralisées $\delta(\xi + \eta)$ et $\delta(\xi + \lambda\eta)$ donne comme attendu la fonction constante

$$(10) \quad |1 - \lambda|^{-1} 1.$$

De manière correspondante, le produit des distributions $\delta(x - y)$ et $\delta(y - \lambda x)$ donne $|1 - \lambda|^{-1} \delta_0$ de façon que,

$$(11) \quad \int \delta(x - y) \delta(y - \lambda x) dx dy = |1 - \lambda|^{-1}.$$

Dans ce cas local, la transformée de Fourier seule était suffisante pour donner un sens pertinent au produit des distributions. En fait, cela continuerait d'avoir du sens que de remplacer $\delta(y - \lambda x)$ par

$$\int h(\lambda^{-1}) \delta(y - \lambda x) d^* \lambda$$

où $h(1) = 0$.

Nous allons maintenant traiter en détail le cas général plus délicat dans lequel $h(1)$ est arbitraire.

Nous allons démontrer un résultat général précis (théorème 3) qui gère le manque de transversalité lorsque $h(1) \neq 0$. On travaille directement avec l'opérateur suivant dans $L^2(K)$,

$$(12) \quad U(h) = \int h(\lambda) U(\lambda) d^* \lambda,$$

où l'opérateur d'échelle $U(\lambda)$ est défini par

$$(13) \quad (U(\lambda) \xi)(x) = \xi(\lambda^{-1} x) \quad \forall x \in K$$

et où la mesure de Haar multiplicative $d^* \lambda$ est normalisée par,

$$(14) \quad \int_{|\lambda| \in [1, \Lambda]} d^* \lambda \sim \log \Lambda \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty.$$

Pour interpréter la "trace" de $U(h)$, nous allons procéder comme dans le cas de la formule de trace de Selberg ([Se]) et utiliser une coupure (cut-off). Pour cela, nous utilisons la projection orthogonale P_Λ sur le sous-espace,

$$(15) \quad P_\Lambda = \{ \xi \in L^2(K); \xi(x) = 0 \quad \forall x, |x| > \Lambda \}.$$

Alors, P_Λ est l'opérateur multiplicatif par la fonction ρ_Λ , où $\rho_\Lambda(x) = 1$ si $|x| \leq \Lambda$, et $\rho(x) = 0$ pour $|x| > \Lambda$. Cela donne une coupure (cut-off) infrarouge et pour obtenir une coupure (cut-off) ultraviolette, on utilise $\widehat{P}_\Lambda = F P_\Lambda F^{-1}$ où F est la transformée de Fourier (qui dépend du caractère de base α). On pose

$$(16) \quad R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda.$$

Le résultat principal de cette section est alors,

Théorème 3. *Soit K un corps local de caractère de base α . Soit $h \in \mathcal{S}(K^*)$ à support compact. Alors $R_\Lambda U(h)$ est un opérateur de classe trace et quand $\Lambda \rightarrow \infty$, on a*

$$\text{Trace}(R_\Lambda U(h)) = 2h(1) \log' \Lambda + \int' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^* u + o(1)$$

où $2 \log' \Lambda = \int_{\lambda \in K^*, |\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^* \lambda$, et où la valeur principale \int' est uniquement déterminée par l'appariement avec l'unique distribution sur K qui coïncide avec $\frac{du}{|1-u|}$ pour $u \neq 1$ et dont la transformée de Fourier s'évanouit en 1.

Preuve. On normalise comme ci-dessus la mesure de Haar additive pour qu'elle soit auto-duale sur K . Soit la constante $\rho > 0$ déterminée par l'égalité,

$$(17) \quad \int_{1 \leq |\lambda| \leq \Lambda} \frac{d\lambda}{|\lambda|} \sim \rho \log \Lambda \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty.$$

de telle manière que $d^* \lambda = \rho^{-1} \frac{d\lambda}{|\lambda|}$. Soit L l'unique distribution, extension de $\rho^{-1} \frac{du}{|1-u|}$ dont la transformée de Fourier s'évanouit en 1, $\widehat{L}(1) = 0$. On a alors, par définition,

$$(18) \quad \int' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^* u = \left\langle L, \frac{h(u^{-1})}{|u|} \right\rangle,$$

où $\frac{h(u^{-1})}{|u|} = 0$ pour u^{-1} en dehors du support de h .

Soit $T = U(h)$. On peut écrire le noyau de Schwartz de T comme,

$$(19) \quad k(x, y) = \int h(\lambda^{-1}) \delta(y - \lambda x) d^* \lambda.$$

Étant donné n'importe quel tel noyau k , on introduit son symbole,

$$(20) \quad \sigma(x, \xi) = \int k(x, x + u) \alpha(u\xi) du$$

comme sa transformée de Fourier partielle. Le noyau de Schwartz $r_\Lambda^t(x, y)$ de la transposée R_Λ^t est donné par,

$$(21) \quad r_\Lambda^t(x, y) = \rho_\Lambda(x) (\widehat{\rho_\Lambda})(x - y).$$

Ainsi, le symbole σ_Λ de R_Λ^t est simplement,

$$(22) \quad \sigma_\Lambda(x, \xi) = \rho_\Lambda(x) \rho_\Lambda(\xi).$$

L'opérateur R_Λ est de classe trace et l'on a,

$$(23) \quad \text{Trace}(R_\Lambda T) = \int k(x, y) r_\Lambda^t(x, y) dx dy.$$

En utilisant la formule de Parseval, on obtient,

$$(24) \quad \text{Trace}(R_\Lambda T) = \int_{|x| \leq \Lambda, |\xi| \leq \Lambda} \sigma(x, \xi) dx d\xi.$$

Maintenant, le symbole σ de T est donné par,

$$(25) \quad \sigma(x, \xi) = \int h(\lambda^{-1}) \left(\int \delta(x + u - \lambda x) \alpha(u\xi) du \right) d^* \lambda.$$

On a,

$$(26) \quad \int \delta(x + u - \lambda x) \alpha(u\xi) du = \alpha((\lambda - 1)x\xi),$$

aussi (25) donne,

$$(27) \quad \sigma(x, \xi) = \rho^{-1} \int_K g(\lambda) \alpha(\lambda x \xi) d\lambda$$

où,

$$(28) \quad g(\lambda) = h((\lambda + 1)^{-1}) |\lambda + 1|^{-1}.$$

Puisque h est lisse à support compact sur K^* , la fonction g appartient à $C_c^\infty(K)$.

Alors $\sigma(x, \xi) = \rho^{-1} \widehat{g}(x\xi)$ et,

$$(29) \quad \text{Trace}(R_\Lambda T) = \rho^{-1} \int_{|x| \leq \Lambda, |\xi| \leq \Lambda} \widehat{g}(x\xi) dx d\xi.$$

Avec $u = x\xi$, on a $dx d\xi = du \frac{dx}{|x|}$ et, pour $|u| \leq \Lambda^2$,

$$(30) \quad \rho^{-1} \int_{\frac{|u|}{\Lambda} \leq |x| \leq \Lambda} \frac{dx}{|x|} = 2 \log' \Lambda - \log |u|$$

(en utilisant la définition précise de $\log' \Lambda$ pour gérer les termes aux bornes). Ainsi, nous pouvons réécrire (29) comme,

$$(31) \quad \text{Trace}(R_\Lambda T) = \int_{|u| \leq \Lambda^2} \widehat{g}(u) (2 \log' \Lambda - \log |u|) du$$

Puisque $g \in C_c^\infty(K)$, on a,

$$(32) \quad \int_{|u| \geq \Lambda^2} |\widehat{g}(u)| du = O(\Lambda^{-N}) \quad \forall N$$

et de façon similaire, pour $|\widehat{g}(u) \log |u||$. Ainsi,

$$(33) \quad \text{Trace}(R_\Lambda T) = 2 g(0) \log' \Lambda - \int \widehat{g}(u) \log |u| du + o(1).$$

Maintenant, pour n'importe quel corps local K et pour n'importe quel caractère de base α , si nous prenons comme mesure de da la mesure auto-duale, la transformée de Fourier de la distribution $\varphi(u) = -\log |u|$ est donnée ailleurs qu'en 0 par

$$(34) \quad \widehat{\varphi}(a) = \rho^{-1} \frac{1}{|a|},$$

avec ρ déterminée par (17). Pour connaître celui-ci, appelons P la distribution sur K donnée par,

$$(35) \quad P(f) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in \text{Mod}(K)}} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} f(x) d^*x + f(0) \log \varepsilon \right).$$

On a $P(f_a) = P(f) - \log |a| f(0)$, ce qui est suffisant pour montrer que $\widehat{P}(x)$ est égal à $-\log |x| + \text{Cte}$, et que $\widehat{\varphi}$ diffère de P par un multiple de δ_0 .

Alors, la formule de Parseval donne, avec les conventions du théorème 3,

$$(36) \quad - \int \widehat{g}(u) \log |u| du = \frac{1}{\rho} \int' g(a) \frac{da}{|a|}.$$

En remplaçant a par $\lambda - 1$ et en appliquant (28), on obtient le résultat escompté. ■

Nous montrerons dans l'Appendice II que la valeur principale à privilégier, qui dépend du caractère de base α , est la même que dans les formules explicites de Weil.

VI. Le cas global, et le calcul de la formule de trace.

Nous allons maintenant considérer l'action de C_k sur X et écrire l'analogie de IV (17)¹ pour la formule de trace de la distribution.

¹III (17) dans l'original.

X et C_k sont tous les deux définis comme des quotients et l'on définit

$$(1) \quad \pi : A \rightarrow X, \quad c : \mathrm{GL}_1(A) \rightarrow C_k$$

comme les applications quotients correspondantes.

Comme ci-dessus, on considère le graphe Z de l'action

$$(2) \quad f : X \times C_k \rightarrow X, \quad f(x, \lambda) = \lambda x$$

et l'application diagonale

$$(3) \quad \varphi : X \times C_k \rightarrow X \times C_k \times X \quad \varphi(x, \lambda) = (x, \lambda, x).$$

Recherchons d'abord les points fixes, $\varphi^{-1}(Z)$, i.e. les paires $(x, \lambda) \in X \times C_k$ telles que $\lambda x = x$. Choisissons $x = \pi(\tilde{x})$ et $\lambda = c(j)$. Alors l'égalité $\lambda x = x$ signifie que $\pi(j\tilde{x}) = \pi(\tilde{x})$ et alors, il existe $q \in k^*$ tel qu'avec $\tilde{j} = qj$, on a

$$(4) \quad \tilde{j}\tilde{x} = \tilde{x}.$$

Rappelons maintenant que A est le produit direct restreint $A = \prod_{\mathrm{res}} k_v$ des corps locaux k_v obtenu par complétion de k par rapport à la place v . L'égalité (4) signifie que $\tilde{j}_v \tilde{x}_v = \tilde{x}_v$; ainsi, si $\tilde{x}_v \neq 0$ pour tout v , il s'ensuit que $\tilde{j}_v = 1 \forall v$ et $\tilde{j} = 1$. Cela montre que la projection de $\varphi^{-1}(Z) \cap C_k \setminus \{1\}$ sur X est l'union des hyperplans

$$(5) \quad \cup H_v; \quad H_v = \pi(\tilde{H}_v), \quad \tilde{H}_v = \{x; x_v = 0\}.$$

Chaque \tilde{H}_v est clos dans A et est invariant par la multiplication par des éléments de k^* . De cela, il découle que H_v est un sous-ensemble clos de X et on vérifie que c'est la fermeture de l'orbite sous C_k de n'importe quel point générique

$$(6) \quad x, x_u = 0 \quad \iff \quad u = v.$$

Pour n'importe quel tel point x , le groupe d'isotropie I_x est l'image dans C_k du groupe multiplicatif k_v^* ,

$$(7) \quad I_x = k_v^*$$

par l'application $\lambda \in k_v^* \rightarrow (1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots)$. Cette application apparaît aussi dans la théorie des corps de classes (cf. [W1]) pour relier la théorie de Galois locale à la théorie globale.

Les deux groupes k_v^* et C_k sont commensurables à \mathbb{R}_+^* par l'homomorphisme de modules, qui est propre à image cocompacte,

$$(8) \quad G \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}_+^*.$$

Puisque la restriction à k_v^* du module de C_k est le module de k_v^* , il s'ensuit que

$$(9) \quad I_x \text{ est un sous-groupe cocompact de } C_k.$$

Cela autorise à normaliser les mesures de Haar respectives de telle manière que le covolume de I_x vaille 1. Cela est en fait assuré par la normalisation canonique des mesures de Haar des groupes modulés (cf. [W3]),

$$(10) \quad \int_{|g| \in [1, \Lambda]} d^*g \sim \log \Lambda \quad \text{quand} \quad \Lambda \rightarrow +\infty.$$

Il est important de noter que bien que I_x soit cocompact dans C_k , l'orbite de x n'est pas fermée et qu'il est nécessaire de la fermer, le résultat de cette fermeture étant H_v . Nous expliquerons comment justifier ce point plus tard dans la section VII, dans la situation similaire de l'action de C_S sur X_S . Nous pouvons maintenant au vu des résultats des deux sections précédentes écrire la contribution de chaque H_v à la trace de la distribution.

Puisque \tilde{H}_v est un hyperplan, on peut identifier l'espace transverse N_x à H_v en x avec le quotient

$$(11) \quad N_x = A/\tilde{H}_v = k_v$$

qui est plus précisément le groupe additif du corps local k_v . Étant donné $j \in I_x$, on a $j_u = 1 \forall u \neq v$, et $j_v = \lambda \in k_v^*$. L'action de j sur A est linéaire et rend x fixe, ce qui a pour conséquence que l'action sur l'espace transverse N_x est donnée par

$$(12) \quad (\lambda, a) \rightarrow \lambda a \quad \forall a \in k_v.$$

Nous pouvons alors espérer aboutir en écrivant la contribution de H_v à la trace de la distribution ainsi,

$$(13) \quad \int_{k_v^*} \frac{h(\lambda)}{|1 - \lambda|} d^*\lambda$$

où h est la fonction test sur C_k qui s'évanouit en 1. Nous devons alors prêter attention à une contradiction en terme de notations avec la troisième section (formule 9), quand nous avons utilisé le symbole $U(j)$ pour l'opération

$$(14) \quad (U(j)f)(x) = f(j^{-1}x)$$

tandis que nous avons utilisé j dans la discussion ci-dessus. Cela revient à remplacer la fonction test $h(u)$ par $h(u^{-1})$ et alors, nous obtenons comme analogue formel de IV (17)² l'expression suivante pour la trace de la distribution

$$(15) \quad \text{Trace}(U(h)) = \sum_v \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1 - u|} d^*u.$$

Maintenant, le côté droit de (15) devient, quand on le restreint à l'hyperplan $h(1) = 0$, la distribution obtenue par André Weil [W3] comme synthèse des formules explicites de la théorie des nombres pour toutes les fonctions L à Grössencharakter. En particulier, nous pouvons la réécrire en

$$(16) \quad \hat{h}(0) + \hat{h}(1) - \sum_{L(\chi, \rho)=0} \hat{h}(\chi, \rho) + \infty h(1)$$

où cette fois, la restriction $\text{Re}(\rho) = \frac{1}{2}$ a été éliminée.

²noté III (17) dans l'article original.

Ainsi, rendre égales (34) de la section III et (16) pour $h(1) = 0$, devrait permettre d'obtenir l'information souhaitée sur les zéros. Bien sûr, cela nécessite au préalable d'éliminer le rôle de δ , et (comme dans [AB]) de prouver que la trace coïncide avec la trace théorique d'un opérateur ordinaire sur le conoyau de E . On effectue cela pour la formulation connue du théorème du point-fixe de Lefschetz en utilisant les familles.

Une propriété très importante de la partie droite de (15) (et de IV (17) en général) est que si la fonction test h , avec $h(1) = 0$, est positive,

$$(17), \quad h(u) \geq 0 \quad \forall u \in C_k$$

alors le côté droit est *positif*. Cela indique dès le début que, dans le but d'obtenir l'espace de Poly-Hilbert à partir du flot de Riemann, *ce n'est pas* la quantification qui devrait être en jeu mais simplement le passage à l'espace L^2 , $X \rightarrow L^2(X)$. Effectivement, la positivité de IV (17) est typique des *matrices de permutation* plutôt qu'associée à la quantification. Cette distinction joue un rôle crucial dans la discussion ci-dessus au sujet de la formule de trace, en particulier par le fait que la formule de trace attendue n'est pas une formule semi-classique mais une formule de Lefschetz dans l'esprit de [AB].

La discussion ci-dessus *n'est pas* une justification rigoureuse de cette formule. Le premier obstacle évident est que la trace de la distribution est seulement formelle et que, pour lui donner une signification rigoureuse liée aux opérateurs sur les espaces de Hilbert, on a besoin, comme dans la section V, d'effectuer une coupure (cut-off).

La seconde difficulté provient de la présence du paramètre δ comme paramètre de l'espace de Hilbert, alors que δ n'apparaît pas dans la formule de trace.

Comme nous le verrons dans les deux prochaines sections, la coupure (cut-off) éliminera complètement le rôle de δ , et nous montrerons néanmoins (en démontrant la positivité de la distribution de Weil) que la validité de la formule de trace (indépendante de δ) est équivalente à l'hypothèse de Riemann pour tous les Grössencharaktere de k .

VII. Preuve de la formule de trace dans le cas S -local.

Dans le calcul de la trace formelle de la section VI, nous passons sur les difficultés inhérentes à la structure "sioux" de l'espace X .

Pour comprendre comment gérer les formules de traces sur de tels espaces, nous allons considérer la situation légèrement plus simple qui advient lorsqu'on considère seulement un ensemble fini S de places de k .

Dès que la cardinalité de S est plus grande que 3, l'espace correspondant X_S présente la plupart des propriétés "sioux" de X . En particulier, il n'est plus de type I au sens de la Géométrie non-commutative.

Néanmoins, nous pourrions démontrer un résultat général précis (théorème 4) qui montre que la gestion des orbites périodiques ci-dessus, et de leur contribution à la trace, est celle qui convient.

Cela montrera en particulier pourquoi les orbites du point fixe 0, ou des éléments $x \in A$, tels que x_v s'évanouit en au moins deux places, ne contribuent pas à la formule de trace.

En même temps, nous gèrerons, comme dans la section V, l'absence de transversalité quand $h(1) \neq 0$.

Décrivons d'abord le contexte réduit pour la formule de trace. Prenons k un corps global et S un ensemble fini de places de k contenant toutes les places infinies. Le groupe O_S^* des S -unités est défini comme le sous-groupe de k^* ,

$$(1) \quad O_S^* = \{q \in k^*, |q_v| = 1, v \notin S\}$$

Il est cocompact dans J_S^1 où,

$$(2) \quad J_S = \prod_{v \in S} k_v^*$$

et,

$$(3) \quad J_S^1 = \{j \in J_S, |j| = 1\}.$$

Ainsi, le groupe-quotient $C_S = J_S/O_S^*$ joue le même rôle que C_k , et agit sur le quotient X_S de $A_S = \prod_{v \in S} k_v$ par O_S^* .

Pour avoir à l'esprit un exemple simple, on peut prendre $k = \mathbb{Q}$, avec S constitué des trois places 2, 3, et ∞ . On vérifie sur cet exemple que la topologie de X_S n'est pas de type I puisque par exemple, le groupe $O_S^* = \{\pm 2^n 3^m; n, m \in \mathbb{Z}\}$ agit ergodiquement sur $\{0\} \times \mathbb{R} \subset A_S$.

On normalise la mesure de Haar $d^* \lambda$ de C_S par,

$$(4) \quad \int_{|\lambda| \in [1, \Lambda]} d^* \lambda \sim \log \Lambda \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty,$$

et on normalise la mesure de Haar multiplicative $d^* \lambda$ de J_S de telle manière qu'elle coïncide sur le domaine fondamental D avec l'action de O_S^* sur J_S .

Il n'y a pas de difficulté à définir l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$ des fonctions de carré intégrable sur X_S . Nous procédons comme dans la section III (sans le δ), et nous complétons (et séparons) l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(A_S)$ pour la structure préhilbertienne donnée par,

$$(5) \quad \|f\|^2 = \int \left| \sum_{q \in O_S^*} f(qx) \right|^2 |x| d^* x$$

où l'intégrale est calculée sur C_S ou, de manière équivalente, sur un domaine fondamental D pour l'action de O_S^* sur J_S .

Pour montrer que (5) fait sens, on prouve que pour $f \in \mathcal{S}(A_S)$, la fonction $E_0(f)(x) = \sum_{q \in O_S^*} f(qx)$ est bornée supérieurement par une puissance de $\log |x|$ quand $|x|$ tend vers zéro. Pour voir cela quand

f est la fonction caractéristique de $\{x \in A_S, |x_v| \leq 1, \forall v \in S\}$, on utilise la cocompacité de O_S^* dans J_S^1 , pour remplacer la somme par une intégrale. Cette dernière intégrale est alors comparable à,

$$(6) \quad \int_{u_i \geq 0, \sum u_i = -\log|x|} \prod du_i,$$

où l'indice i varie dans S . Le cas général découle de cela.

L'opérateur d'échelle $U(\lambda)$ est défini par,

$$(7) \quad (U(\lambda)\xi)(x) = \xi(\lambda^{-1}x) \quad \forall x \in A_S$$

et la même formule, avec $x \in X_S$, définit son action sur $L^2(X_S)$.

Se donner une fonction lisse h supportée de façon compacte sur C_S , $U(h) = \int h(g)U(g)dg$, consiste à se donner un opérateur agissant sur $L^2(X_S)$.

Nous allons maintenant montrer que la transformée de Fourier F sur $\mathcal{S}(A_S)$ s'étend à un opérateur unitaire sur l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$.

Lemme 1. *a) Pour toute fonction $f_i \in \mathcal{S}(A_S)$, les séries $\sum_{O_S^*} \langle f_1, U(q) f_2 \rangle_A$ des produits intérieurs sur $L^2(A_S)$ convergent géométriquement sur le groupe commutatif fini engendré O_S^* . De plus, leur somme est égale au produit intérieur de f_1 et f_2 dans l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$.*

b) Soit $\alpha = \prod \alpha_v$ un caractère de base du groupe additif A_S et F la transformée de Fourier lui correspondant. La fonction $f \rightarrow F(f)$, $f \in \mathcal{S}(A_S)$ étend de façon unique l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$.

Preuve. La fonction $L : O_S^* \rightarrow \mathbb{R}^S$, donnée par $L(u)_v = \log|u_v|$ a un noyau fini et son image est un treillis sur l'hyperplan $H = \{(y_v), \sum_S y_v = 0\}$. Sur H , on a $Sup_S y_v \geq 1/2n \sum |y_v|$, où $n = \text{card}(S)$. Alors, on a l'inégalité

$$(8) \quad Sup_S |q_v| \geq \exp(d(q, 1)) \quad \forall q \in O_S^*$$

pour une métrique spatiale adéquate d sur O_S^* .

Soit $K_n = \{x \in A_S; |x_v| \leq n, \forall v \in S\}$ et k_n la fonction caractéristique de K_n . Soit (λ_n) une suite à décroissance rapide telle que,

$$(9) \quad |f_i(x)| \leq \sum \lambda_n k_n(x) \quad \forall x \in A_S.$$

On a pour une constante adéquate c ,

$$(10) \quad |\langle k_n, U(q^{-1}) k_n \rangle| \leq c n^m (Sup_S |q_v|)^{-1}$$

où $m = \text{Card}(S)$.

En utilisant (9), on voit alors que $\langle f_1, U(q) f_2 \rangle_A$ décroît exponentiellement sur O_S^* . En appliquant le théorème de Fubini, on aboutit à l'égalité,

$$(11) \quad \int \left| \sum_{q \in O_S^*} f(qx) \right|^2 |x| d^*x = \sum_{O_S^*} \langle f, U(q) f \rangle_A.$$

Cela prouve a). Pour prouver b), on utilise seulement (11) et les égalités $\langle Ff, Ff \rangle_A = \langle f, f \rangle_A$ et $F(U(q)f) = U(q^{-1})F(f)$. ■

Maintenant, exactement comme dans le cas des corps locaux ci-dessus (théorème V.3), on a besoin d'utiliser une coupure (cut-off). Pour cela, on utilise la projection orthogonale P_Λ sur le sous-espace,

$$(12) \quad P_\Lambda = \{\xi \in L^2(X_S); \xi(x) = 0 \quad \forall x, |x| > \Lambda\}.$$

Ainsi, P_Λ est l'opérateur multiplicatif par la fonction ρ_Λ , où $\rho_\Lambda(x) = 1$ si $|x| \leq \Lambda$, et $\rho(x) = 0$ pour $|x| > \Lambda$. Cela donne une coupure (cut-off) infrarouge et pour obtenir une coupure ultraviolette, on utilise $\widehat{P}_\Lambda = FP_\Lambda F^{-1}$ où F est la transformée de Fourier (lemme 1) qui dépend du choix du caractère de base $\alpha = \prod \alpha_v$. On pose,

$$(13) \quad R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda.$$

Le résultat principal de cette section est alors,

Théorème 4. *Soit A_S défini comme précédemment, avec un caractère de base $\alpha = \prod \alpha_v$. Soit $h \in \mathcal{S}(C_S)$ possédant un support compact. Alors quand $\Lambda \rightarrow \infty$, on a*

$$\text{Trace}(R_\Lambda U(h)) = 2h(1) \log' \Lambda + \sum_{v \in S} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1)$$

où $2 \log' \Lambda = \int_{\lambda \in C_S, |\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^* \lambda$, chaque k_v^* est envoyé sur C_S par la fonction $u \rightarrow (1, 1, \dots, u, \dots, 1)$ et la valeur principale \int' est déterminée de manière unique par l'appariement avec l'unique distribution sur k_v qui coïncide avec $\frac{du}{|1-u|}$ pour $u \neq 1$ et dont la transformée de Fourier relative à α_v s'évanouit en 1.

Preuve. On normalise comme ci-dessus la mesure de Haar additive dx pour qu'elle soit la mesure auto-duale sur le groupe abélien A_S . On détermine la constante $\rho > 0$ par l'égalité (où le domaine fondamental D est comme ci-dessus),

$$\int_{\lambda \in D, 1 \leq |\lambda| \leq \Lambda} \frac{d\lambda}{|\lambda|} \sim \rho \log \Lambda \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty.$$

de telle façon que $d^* \lambda = \rho^{-1} \frac{d\lambda}{|\lambda|}$.

On prend f une fonction compacte lisse supportée par J_S et telle que

$$(14) \quad \sum_{q \in O_S^*} f(qg) = h(g) \quad \forall g \in C_S.$$

L'existence d'une telle fonction f découle du caractère discret de O_S^* dans J_S . Nous avons alors l'égalité $U(f) = U(h)$, où

$$(15) \quad U(f) = \int f(\lambda) U(\lambda) d^* \lambda,$$

Pour calculer la trace de $U(h)$ agissant sur les fonctions de l'espace quotient X_S , on procède comme dans le calcul de la formule de trace de Selberg (cf. [Se]). Ainsi pour un opérateur T , agissant sur les fonctions sur A_S , qui commute avec l'action de O_S^* et qui est représenté par un noyau entier,

$$(16) \quad T(\xi) = \int k(x, y) \xi(y) dy,$$

la trace de son action sur $L^2(X_S)$ est donnée par,

$$(17) \quad \text{Trace}(T) = \sum_{q \in O_S^*} \int_D k(x, qx) dx.$$

où D est comme ci-dessus le domaine fondamental de l'action de O_S^* sur le sous-ensemble J_S de A_S , dont le complément est négligeable. Posons $T = U(f)$. On peut écrire le noyau de Schwartz de T comme,

$$(18) \quad k(x, y) = \int f(\lambda^{-1}) \delta(y - \lambda x) d^* \lambda.$$

Par construction, on a,

$$(19) \quad k(qx, qy) = k(x, y) \quad q \in O_S^*.$$

Pour n'importe quel $q \in O_S^*$, nous évaluerons l'intégrale,

$$(20) \quad I_q = \int_{x \in D} k(qx, y) r_\Lambda^t(x, y) dy dx$$

où le noyau de Schwartz $r_\Lambda^t(x, y)$ pour la transposée R_Λ^t est donné par,

$$(21) \quad r_\Lambda^t(x, y) = \rho_\Lambda(x) (\widehat{\rho_\Lambda})(x - y).$$

Pour évaluer l'intégrale ci-dessus, on pose $y = x + a$ et on calcule la transformée de Fourier en a .

Pour la transformée de Fourier en a de $r_\Lambda^t(x, x + a)$, on obtient,

$$(22) \quad \sigma_\Lambda(x, \xi) = \rho_\Lambda(x) \rho_\Lambda(\xi).$$

Pour la transformée de Fourier en a de $k(qx, x + a)$, on obtient,

$$(23) \quad \sigma(x, \xi) = \int f(\lambda^{-1}) \left(\int \delta(x + a - \lambda qx) \alpha(a\xi) da \right) d^* \lambda.$$

On a,

$$(24) \quad \int \delta(x + a - \lambda qx) \alpha(a\xi) da = \alpha((\lambda q - 1)x\xi),$$

ainsi (23) donne,

$$(25) \quad \sigma(x, \xi) = \rho^{-1} \int_{A_S} g_q(u) \alpha(ux\xi) du$$

où,

$$(26) \quad g_q(u) = f(q(u + 1)^{-1}) |u + 1|^{-1}.$$

Puisque f est lisse à support compact sur A_S^* , la fonction g_q appartient à $C_c^\infty(A_S)$.

Ainsi $\sigma(x, \xi) = \rho^{-1} \widehat{g}_q(x\xi)$ et, en utilisant la formule de Parseval, on obtient,

$$(27) \quad I_q = \int_{x \in D, |x| \leq \Lambda, |\xi| \leq \Lambda} \sigma(x, \xi) dx d\xi.$$

Cela donne,

$$(28) \quad I_q = \rho^{-1} \int_{x \in D, |x| \leq \Lambda, |\xi| \leq \Lambda} \widehat{g}_q(x\xi) dx d\xi.$$

Avec $u = x\xi$, on a $dx d\xi = du \frac{dx}{|x|}$ et, pour $|u| \leq \Lambda^2$,

$$(29) \quad \rho^{-1} \int_{x \in D, \frac{|u|}{\Lambda} \leq |x| \leq \Lambda} \frac{dx}{|x|} = 2 \log' \Lambda - \log |u|$$

(en utilisant la définition précise de $\log' \Lambda$ pour gérer les termes aux limites). Ainsi, on peut réécrire (28) comme,

$$(30) \quad \text{Trace}(R_\Lambda T) = \sum_{q \in O_S^*} \int_{|u| \leq \Lambda^2} \widehat{g}_q(u) (2 \log' \Lambda - \log |u|) du$$

Maintenant $\log |u| = \sum_{v \in S} \log |u_v|$, et nous allons d'abord prouver que,

$$(31) \quad \sum_{q \in O_S^*} \int \widehat{g}_q(u) du = h(1),$$

alors que pour tout $v \in S$,

$$(32) \quad \sum_{q \in O_S^*} \int \widehat{g}_q(u) (-\log |u_v|) du = \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u.$$

En fait, toutes les sommes dans q auront seulement des termes non-nuls certains nombres finis de fois.

Il restera alors à contrôler le terme d'erreur, c'est-à-dire à montrer que,

$$(33) \quad \sum_{q \in O_S^*} \int \widehat{g}_q(u) (\log |u| - 2 \log' \Lambda)^+ du = 0(\Lambda^{-N})$$

pour tout N , où nous avons utilisé la notation $x^- = 0$ si $x \leq 0$ et $x^+ = x$ si $x > 0$.

Maintenant, on rappelle que,

$$g_q(u) = f(q(u+1)^{-1}) |u+1|^{-1},$$

de telle façon que $\int \widehat{g}_q(u) du = g_q(0) = f(q)$. Puisque f est à support compact dans A_S^* , l'intersection de O_S^* avec le support de f est finie et par (14), on obtient l'égalité (31).

Pour prouver (32), on considère la projection naturelle pr_v de $\prod_{l \in S} k_l^*$ sur $\prod_{l \neq v} k_l^*$. L'image $pr_v(O_S^*)$ est encore un sous-groupe discret de $\prod_{l \neq v} k_l^*$, (puisque k_v^* est cocompact dans C_S); ainsi, il y a seulement un nombre fini de $q \in O_S^*$ tels que k_v^* rencontre le support f_q , c'est-à-dire tels que $f_q(a) = f(qa)$ pour tout a .

Pour chaque $q \in O_S^*$, on a, comme dans la section V,

$$(34) \quad \int \widehat{g}_q(u) (-\log |u_v|) du = \int'_{k_v^*} \frac{f_q(u^{-1})}{|1-u|} d^*u,$$

et comme nous venons de le voir, cette intégrale s'évanouit excepté pour un nombre fini de q , de telle manière que, par (14), on obtienne l'égalité (32).

Prouvons (33). Soient $\varepsilon_\Lambda(u) = (\log |u| - 2 \log' \Lambda)^+$, et,

$$(35) \quad \delta_q(\Lambda) = \int \widehat{g}_q(u) \varepsilon_\Lambda(u) du$$

le terme d'erreur. Nous allons démontrer le

Lemme 2. *Pour tout Λ , les séries $\sum_{O_S^*} |\delta_q(\Lambda)|$ convergent géométriquement sur le groupe commutatif fini engendré O_S^* .*

De plus, la somme $\sigma(\Lambda)$ est en $O(\Lambda^{-N})$ pour un N au moins.

Preuve. Soit d une métrique adéquate sur O_S^* (cf. (8)) telle que,

$$(36) \quad \text{Sup}_S |q_v| \geq \exp(d(q, 1)) \quad \forall q \in O_S^*$$

Soit $\xi \in \mathcal{S}(A_S)$ définie par $\xi(x) = f(x^{-1})|x^{-1}|$ pour tout $x \in A_S^*$ et étendue par la valeur 0 partout ailleurs. On a $g_q(x) = \xi(q^{-1}(1+x))$ pour tout $x \in A_S$, de telle sorte que $\widehat{g}_q(u) = \int g_q(x) \alpha(ux) dx = \alpha(-u) \widehat{\xi}(qu)$. Maintenant,

$$\delta_q(\Lambda) = \int \widehat{g}_q(u) \varepsilon_\Lambda(u) du = \int \widehat{\xi}(qu) \alpha(-u) \varepsilon_\Lambda(u) du = \int \widehat{\xi}(y) \alpha(-q^{-1}y) \varepsilon_\Lambda(y) dy,$$

puisque $\varepsilon_\Lambda(qu) = \varepsilon_\Lambda(u)$ pour tout u .

Ainsi, nous obtenons, en utilisant le symbole $\overline{F}\eta$ pour la transformée de Fourier inverse de η , l'égalité,

$$(37) \quad \delta_q(\Lambda) = \overline{F}(\varepsilon_\Lambda \widehat{\xi})(q^{-1}).$$

Soit $\alpha \in]0, 1/2[$ et considérons la norme,

$$(38) \quad \|\eta\| = \text{Sup}_{x \in A_S} |F(\eta)(x) \text{Sup}_S |x_v|^\alpha|.$$

Dans le but d'estimer (38), choisissons une fonction lisse ψ sur \mathbb{R} , égale à 1 dans un voisinage de 0, et avec support dans $[-1, 1]$, et introduisons les opérateurs de convolution,

$$(39) \quad (C_{\alpha, v} * \eta)(x) = \int_{k_v} \psi(|\varepsilon|) (\eta(x + \varepsilon) - \eta(x)) \frac{d\varepsilon}{|\varepsilon|^{1+\alpha}},$$

et les normes,

$$(40) \quad \|\eta\|_{(1, \alpha, v)} = \|C_{\alpha, v} * \eta\|_1,$$

où $\|\cdot\|_1$ est la L^1 -norme.

La transformée de Fourier k_v de la distribution $C_{\alpha, v}$ se comporte comme $|x_v|^\alpha$ pour $|x_v| \rightarrow \infty$. Ainsi, en utilisant $F(C_{\alpha, v} * \eta) = F(C_{\alpha, v}) F(\eta)$, et le contrôle de la norme supérieure $F(g)$ par la L^1 -norme de g , nous obtenons une inégalité de la forme,

$$(41) \quad \text{Sup}_{x \in A_S} |F(\eta)(x) \text{Sup}_S |x_v|^\alpha| \leq c_\alpha \sum_S \|\eta\|_{(1, \alpha, v)}.$$

Montrons maintenant que, pour tout $\eta \in \mathcal{S}(A_S)$, et $\alpha < 1/2$, on a,

$$(42) \quad \|\varepsilon_\Lambda \eta\|_{(1,\alpha,v)} = O(\Lambda^{-N}),$$

pour un certain N .

On a

$$|(\varepsilon_\Lambda(x + \varepsilon)\eta(x + \varepsilon) - \varepsilon_\Lambda(x)\eta(x)) - \varepsilon_\Lambda(x)(\eta(x + \varepsilon) - \eta(x))| \leq |(\varepsilon_\Lambda(x + \varepsilon) - \varepsilon_\Lambda(x))||\eta(x + \varepsilon)|.$$

De plus, en utilisant l'inégalité,

$$(43) \quad |a^+ - b^+| \leq |a - b|,$$

on voit que $|(\varepsilon_\Lambda(x + \varepsilon) - \varepsilon_\Lambda(x))| \leq |\log|x_v + \varepsilon| - \log|x_v||$, pour $\varepsilon \in k_v$.

Posons alors,

$$(44) \quad c'_\alpha = \int_{k_v} \log|1 + y| \frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}.$$

Ce nombre est fini pour toutes les places $v \in S$ dans la mesure où $\alpha < 1/2$, et on a,

$$(45) \quad \int_{k_v} \psi(|\varepsilon|)(|\log|x + \varepsilon| - \log|x||) \frac{d\varepsilon}{|\varepsilon|^{1+\alpha}} \leq c'_\alpha |x|^{-\alpha}.$$

Ainsi, on obtient l'inégalité,

$$(46) \quad |C_{\alpha,v} * \varepsilon_\Lambda \eta - \varepsilon_\Lambda(C_{\alpha,v} * \eta)|(x) \leq c'_\alpha |x_v|^{-\alpha} \text{Sup}_{\varepsilon \in k_v, |\varepsilon| \leq 1} |\eta(x + \varepsilon)|.$$

Puisque la fonction $|x_v|^{-\alpha}$ est localement intégrable, pour $\alpha < 1$, on a pour $\eta \in \mathcal{S}(A_S)$, et pour tout N ,

$$(47) \quad \int_{X_\Lambda} |x_v|^{-\alpha} \text{Sup}_{\varepsilon \in k_v, |\varepsilon| \leq 1} |\eta(x + \varepsilon)| dx = O(\Lambda^{-N}),$$

où $X_\Lambda = \{y + \varepsilon; |y| \geq \Lambda, \varepsilon \in k_v, |\varepsilon| \leq 1\}$.

De plus, on a pour un certain N ,

$$(48) \quad \|\varepsilon_\Lambda(C_{\alpha,v} * \eta)\|_1 = O(\Lambda^{-N}).$$

Ainsi, en utilisant (46), on obtient l'inégalité (42).

En prenant $\eta = \widehat{\xi}$ et en utilisant (41), on obtient des nombres δ_Λ , tels que $\delta_\Lambda = O(\Lambda^{-N})$ pour tout N et tels que,

$$(49) \quad |\overline{F}(\varepsilon_\Lambda \widehat{\xi}) \text{Sup}_S |x_v|^\alpha| \leq \delta_\Lambda \quad \forall x \in A_S \forall \Lambda.$$

En prenant $x = q \in O_S^*$, et en utilisant (36) et (37), on obtient,

$$(50) \quad |\delta_q(\Lambda)| \leq \delta_\Lambda \exp(-d(q, 1)) \quad \forall q \in O_S^*,$$

qui est l'inégalité souhaitée. ■

VIII. Formule de trace dans le cas global, et élimination de δ .

La principale difficulté amenée par le paramètre δ dans le Théorème 1 est que le calcul de la trace formelle de la section VI est indépendant de δ , et ainsi ne peut pas donner en général la valeur attendue pour la trace, du fait du théorème 1, puisque dans ce dernier, tout zéro critique ρ est compté avec une multiplicité égale au plus grand entier $n < \frac{1+\delta}{2}$, $n \leq$ la multiplicité de ρ comme zéro de L . En particulier, avec les fonctions L à zéros multiples, la δ -dépendance du côté spectral est non-triviale. Il est également clair que l'introduction du paramètre δ élimine artificiellement les zéros non-critiques de l'espace des fonctions $L_\delta^2(X)$.

Comme nous le verrons, tous ces problèmes sont éliminés par la coupure (cut-off). Cette dernière sera directement pratiquée sur l'espace de Hilbert $L^2(X)$ de telle manière que la seule valeur de δ qui sera utilisée est $\delta = 0$. Tous les zéros joueront un rôle du côté spectral de la formule de trace, mais, alors que les zéros critiques apparaîtront per-se, les zéros non-critiques apparaîtront en tant que résonances, et ils seront pris en compte dans la formule de trace à travers leur potentiel harmonique par rapport à la droite critique. Ainsi, le côté spectral est entièrement canonique et indépendant de δ , et en prouvant la positivité de la distribution de Weil, nous montrerons que cette égalité avec le côté géométrique, i.e. l'analogie globale du théorème 4, est équivalente à l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L à Grössencharakter.

Le groupe abélien A des adèles de k est son propre dual de Pontrjagin du fait de l'appariement

$$(1) \quad \langle a, b \rangle = \alpha(ab)$$

où $\alpha : A \rightarrow U(1)$ est un caractère non-trivial qui s'évanouit sur $k \subset A$. Noter qu'un tel caractère est *non canonique*, mais que n'importe quels deux tels caractères α et α' sont reliés par k^* ,

$$(2) \quad \alpha'(a) = \alpha(qa) \quad \forall a \in A.$$

Il suit de cela que les transformées de Fourier correspondantes sur A sont reliées par

$$(3) \quad \widehat{f}' = \widehat{f}_q.$$

C'est une raison de plus pour quotienter par des fonctions de la forme $f - f_q$, i.e. pour considérer l'espace-quotient X .

Fixons le caractère additif α comme ci-dessus, $\alpha = \prod \alpha_v$ et choisissons d une idèle différentielle,

$$(4) \quad \alpha(x) = \alpha_0(dx) \quad \forall x \in A,$$

où $\alpha_0 = \prod \alpha_{0,v}$ est le produit des caractères normalisés locaux (cf. [W1]). Soit S_0 l'ensemble fini des places auxquelles α_v est ramifié.

Nous nous concentrerons d'abord sur le cas de caractéristique positive, i.e. sur le cas des corps de fonctions, à la fois parce qu'il est techniquement plus simple, mais également parce qu'il permet de garder la trace de la signification géométrique de la construction (cf. section II).

De façon à comprendre comment réaliser, dans le cas global, la coupure (cut-off) $R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$ de la section VII, nous allons d'abord analyser la position relative de la paire de projections $\widehat{P}_\Lambda, P_\Lambda$ quand $\Lambda \rightarrow \infty$. Ainsi, appelons $S \supset S_0$ un ensemble fini de places de k , suffisamment grand pour que $\text{mod}(C_S) = \text{mod}(C_k) = q^{\mathbb{Z}}$ et tel que, pour tout domaine fondamental quelconque D pour l'action de O_S^* sur J_S , le produit $D \times \prod R_v^*$ soit un domaine fondamental pour l'action de k^* sur J_k .

\widehat{P}_Λ et P_Λ commutent toutes deux avec la décomposition de $L^2(X_S)$ comme sommes directes des sous-espaces, indexées par les caractères χ_0 de $C_{S,1}$,

$$(5) \quad L_{\chi_0}^2 = \{\xi \in L^2(X_S); \xi(a^{-1}x) = \chi_0(a) \xi(x), \forall x \in X_S, a \in C_{S,1}\}$$

qui correspondent aux projections $P_{\chi_0} = \int \overline{\chi_0}(a) U(a) d_1 a$, où $d_1 a$ est la mesure de Haar de masse totale 1 sur $C_{S,1}$.

Lemme 1. *Soit χ_0 un caractère de $C_{S,1}$, alors pour Λ suffisamment grand, \widehat{P}_Λ et P_Λ commutent sur l'espace de Hilbert $L_{\chi_0}^2$.*

Preuve. Soit \mathcal{U}_S l'image dans C_S du sous-groupe ouvert $\prod R_v^*$. C'est un sous-groupe d'indice fini l dans $C_{S,1}$. Fixons un caractère χ de \mathcal{U}_S et considérons la somme directe finie des espaces de Hilbert $L_{\chi_0}^2$ où χ_0 varie parmi les caractères de $C_{S,1}$ dont la restriction à \mathcal{U}_S est égale à χ ,

$$(6) \quad L^2(X_S)_\chi = \{\xi \in L^2(X_S); \xi(a^{-1}x) = \chi(a) \xi(x), \forall x \in X_S, a \in \mathcal{U}_S\}$$

La projection orthogonale correspondante est $U(h_\chi)$, où $h_\chi \in \mathcal{S}(C_S)$ est telle que,

$$(7) \quad \text{Supp}(h_\chi) = \mathcal{U}_S \quad h_\chi(x) = \lambda \overline{\chi}(x) \quad \forall x \in \mathcal{U}_S$$

et la constante $\lambda = l/\log q$, correspond à la normalisation standard de la mesure de Haar sur C_S . Choisissons comme dans la section VII, $f \in \mathcal{S}(J_S)$ avec un support $\prod R_v^*$ tel que $U(f) = U(h)$ et prenons $\xi \in \mathcal{S}(A_S)$ définie par $\xi(x) = f(x^{-1})|x^{-1}|$ pour tout $x \in A_S^*$ et étendue par la valeur 0 partout ailleurs.

Puisque ξ est localement constante, sa transformée de Fourier est de support compact et l'égalité (37) de la section VII montre que pour Λ suffisamment grand, on a l'égalité,

$$(8) \quad \text{Trace}(\widehat{P}_\Lambda P_\Lambda U(h_\chi)) = 2h_\chi(1) \log' \Lambda + \sum_{v \in S} \int_{k_v^*}' \frac{h_\chi(u^{-1})}{|1-u|} d^*u$$

Avec $\Lambda = q^N$, on a $2 \log' \Lambda = (2N+1) \log q$ de telle sorte que,

$$(9) \quad 2h_\chi(1) \log' \Lambda = (2N+1)l$$

Le caractère χ de $\prod R_v^*$ est un produit, $\chi = \prod \chi_v$ et si l'on utilise le caractère standard additif α_0 pour prendre la valeur principale, on a (cf. [W1] Appendice IV),

$$(10) \quad \int_{R_v^*}' \frac{\chi_v(u)}{|1-u|} d^*u = -f_v \log q_v$$

où f_v est l'ordre de ramification de χ_v . Nous obtenons ainsi,

$$(11) \quad \int_{k_v^*}' \frac{h_\chi(u^{-1})}{|1-u|} d^*u = -f_v \deg(v) l + l \frac{\log |d_v|}{\log q}$$

où $q_v = q^{\deg(v)}$, et puisque nous utilisons le caractère additif α_v , nous devons prendre en compte le décalage $\log |d_v| h_\chi(1)$ dans la valeur principale.

Maintenant, on a $|d| = \prod |d_v| = q^{2-2g}$, où g est le genre de la courbe. Ainsi, nous obtenons,

$$(12) \quad \text{Trace}(\widehat{P}_\Lambda P_\Lambda U(h_\chi)) = (2N+1)l - fl + (2-2g)l$$

où $f = \sum_S f_v \deg(v)$ est l'ordre de ramification de χ , i.e. le degré de son conducteur.

Soit $B_\Lambda = \text{Im}(P_\Lambda) \cap \text{Im}(\widehat{P}_\Lambda)$ l'intersection des images par les projections P_Λ et \widehat{P}_Λ , et B_Λ^χ l'intersection avec $L^2(X_S)_\chi$. Nous allons exhiber pour tout caractère χ de \mathcal{U}_S un vecteur $\eta_\chi \in L^2(X_S)_\chi$ tel que,

$$(13) \quad U(g)(\eta_\chi) \in B_\Lambda \quad \forall g \in C_S, |g| \leq \Lambda, |g^{-1}| \leq q^{2-2g-f} \Lambda,$$

alors que les vecteurs $U(g)(\eta_\chi)$ sont linéairement indépendants pour $g \in D_S$, où D_S est le quotient de C_S par le sous-groupe ouvert \mathcal{U}_S .

Avec $\Lambda = q^N$ comme ci-dessus, le nombre d'éléments g de D_S tels que $|g| \leq \Lambda, |g^{-1}| \leq q^{2-2g-f} \Lambda$ est précisément égal à $(2N+1)l - fl + (2-2g)l$, ce qui autorise à conclure que les projections \widehat{P}_Λ et P_Λ commutent dans $L^2(X_S)_\chi$ et que le sous-espace B_Λ^χ est l'extension linéaire des vecteurs $U(g)(\eta_\chi)$.

Construisons maintenant les vecteurs $\eta_\chi \in L^2(X_S)_\chi$. Avec les notations de [W1] Proposition VII.13, soit,

$$(14) \quad \eta_\chi = \prod_S \phi_v$$

la fonction standard associée à $\chi = \prod \chi_v$ de telle sorte que v , ϕ_v non-ramifiée soit la fonction caractéristique de R_v , alors que pour v ramifiée, elle s'évanouisse en dehors de R_v^* et coïncide avec $\bar{\chi}_v$ sur R_v^* . Par construction, le support de η_χ est contenu dans $R = \prod R_v$, de telle façon que l'on a $U(g)(\eta_\chi) \in \text{Im}(P_\Lambda)$ si $|g| \leq \Lambda$. De façon similaire, par [W1] Proposition VII.13, on obtient que $U(g)(\eta_\chi) \in \text{Im}(\widehat{P}_\Lambda)$ dès que $|g^{-1}| \leq q^{2-2g-f} \Lambda$. Cela montre que η_χ satisfait (13) et il reste à montrer que les vecteurs $U(g)(\eta_\chi)$ sont linéairement indépendants pour $g \in D_S$.

Commençons par une relation non-triviale de la forme,

$$(15) \quad \left\| \sum \lambda_g U(g)(\eta_\chi) \right\| = 0$$

où la norme est prise dans $L^2(X_S)$, (cf. VII.5). Posons alors $\xi_\chi = \prod_S \phi_v \otimes 1_R$ où $R = \prod_{v \notin S} R_v$. Assumons d'abord que $\chi \neq 1$. Alors ξ_χ donne un élément de $L_\delta^2(X)_0$ qui est cyclique pour la représentation U de C_k dans la somme directe des sous-espaces $L_{\delta, \chi_0}^2(X)_0$ où χ_0 varie parmi les caractères de $C_{k,1}$ dont la restriction à \mathcal{U} est égale à χ .

Maintenant, (15) implique que dans $L^2_\delta(X)_0$, on a $\sum \lambda_g U(g)(\xi_\chi) = 0$. Par la cyclicité de ξ_χ , on obtient $\sum \lambda_g U(g) = 0$ sur tout $L^2_{\delta, \chi_0}(X)_0$ ce qui donne une contradiction (cf. Appendice I, Lemme 3).

La preuve que $\chi = 1$ est similaire mais nécessite plus d'attention car $1_R \notin \mathcal{S}_0(A)$. ■

On peut alors écrire le Théorème 4 dans le cas de la caractéristique positive par le

Corollaire 2. *Soit Q_Λ la projection orthogonale sur le sous-espace de $L^2(X_S)$ fibré par les $f \in \mathcal{S}(A_S)$ qui s'évanouissent aussi bien que leur transformée de Fourier pour $|x| > \Lambda$. Posons que $h \in \mathcal{S}(C_S)$ est à support compact. Alors, quand $\Lambda \rightarrow \infty$, on a*

$$\text{Trace}(Q_\Lambda U(h)) = 2h(1) \log' \Lambda + \sum_{v \in S} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1)$$

où $2 \log' \Lambda = \int_{\lambda \in C_S, |\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^* \lambda$, et les autres notations sont les mêmes que celles du Théorème VII.4.

En fait, la preuve du lemme 1 montre que les sous-espaces B_Λ se stabilisent très rapidement, de telle manière que l'application naturelle $\xi \rightarrow \xi \otimes 1_R$ de $L^2(X_S)$ dans $L^2(X'_S)$ pour $S \subset S'$ envoie B_Λ^S sur $B_\Lambda^{S'}$.

On obtient alors du corollaire 2 une formulation globale, indépendante de S , de la coupure (cut-off), et de la formule de trace. Soit $L^2(X)$ l'espace de Hilbert $L^2_\delta(X)$ de la section III pour la valeur triviale $\delta = 0$ qui, bien sûr, élimine le terme déplaisant du produit intérieur, et soit Q_Λ la projection orthogonale sur le sous-espace B_Λ de $L^2(X)$ fibré par $f \in \mathcal{S}(A)$ qui s'évanouissent comme leur transformée de Fourier pour $|x| > \Lambda$. Comme on l'a mentionné précédemment, la preuve du lemme 1 montre que pour S et Λ suffisamment grands (et pour un caractère fixé χ), l'application naturelle $\xi \rightarrow \xi \otimes 1_R$ de $L^2(X_S)_\chi$ dans $L^2(X)_\chi$ envoie B_Λ^S sur B_Λ .

Il est alors naturel de s'attendre à ce que l'analogie globale suivant de la formule de trace du corollaire 2 soit vraiment vérifié, i.e. que quand $\Lambda \rightarrow \infty$, on ait,

$$(16) \quad \text{Trace}(Q_\Lambda U(h)) = 2h(1) \log' \Lambda + \sum_v \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1)$$

où $2 \log' \Lambda = \int_{\lambda \in C_k, |\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^* \lambda$, et les autres notations sont celles du Théorème VII.4.

Nous pouvons prouver directement que (16) est vérifiée quand h est supporté par $C_{k,1}$ mais nous ne pouvons prouver (16) directement pour un h arbitraire (même si le côté droit de la formule ne contient qu'un nombre fini de termes non-nuls puisque $h \in \mathcal{S}(C_k)$ est à support compact). Ce que nous allons cependant montrer, c'est que la formule de trace (16) implique la positivité de la distribution de Weil, et ainsi la validité de RH pour k . Rappelons-nous que nous sommes encore en caractéristique positive et qu'alors RH est un théorème de A. Weil. Il sera alors important de vérifier l'équivalence effective entre la validité de RH et la formule (16). Cela se fait par le,

Théorème 5. Soit k un corps global de caractéristique positive et Q_Λ la projection orthogonale sur le sous-espace de $L^2(X)$ fibré par les $f \in \mathcal{S}(A)$ tels que $f(x)$ et $\widehat{f}(x)$ s'évanouissent pour $|x| > \Lambda$. Soit $h \in \mathcal{S}(C_k)$ à support compact. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes,

a) Quand $\Lambda \rightarrow \infty$, on a

$$\text{Trace}(Q_\Lambda U(h)) = 2h(1) \log' \Lambda + \sum_v \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1)$$

b) Toutes les fonctions L à Grössencharakter sur k satisfont l'hypothèse de Riemann.

Preuve. Pour prouver que a) implique b), nous allons prouver (en assumant a)) la positivité de la distribution de Weil (cf. Appendice II),

$$(17) \quad \Delta = \log |d^{-1}| \delta_1 + D - \sum_v D_v.$$

D'abord, le théorème III.1 est appliqué pour $\delta = 0$. L'application E ,

$$(18) \quad E(f)(g) = |g|^{1/2} \sum_{q \in k^*} f(qg) \quad \forall g \in C_k,$$

définit une isométrie surjective de $L^2(X)_0$ dans $L^2(C_k)$ de telle sorte que,

$$(19) \quad EU(a) = |a|^{1/2} V(a) E,$$

où la représentation régulière gauche V de C_k sur $L^2(C_k)$ est donnée par,

$$(20) \quad (V(a)\xi)(g) = \xi(a^{-1}g) \quad \forall g, a \in C_k.$$

Soit S_Λ le sous-espace de $L^2(C_k)$ donné par,

$$(21) \quad S_\Lambda = \{\xi \in L^2(C_k); \xi(g) = 0, \forall g, |g| \notin [\Lambda^{-1}, \Lambda]\}.$$

Nous noterons par la même lettre la projection orthogonale correspondante.

Soit $B_{\Lambda,0}$ le sous-espace de $L^2(X)_0$ fibré par les $f \in \mathcal{S}(A)_0$ de telle façon que $f(x)$ et $\widehat{f}(x)$ s'évanouissent pour $|x| > \Lambda$ et soit $Q_{\Lambda,0}$ la projection orthogonale correspondante. Soit $f \in \mathcal{S}(A)_0$ telle que $f(x)$ et $\widehat{f}(x)$ s'évanouissent pour $|x| > \Lambda$, alors $E(f)(g)$ s'évanouit pour $|g| > \Lambda$, et l'égalité (Appendice I)

$$(22) \quad E(f)(g) = E(\widehat{f})\left(\frac{1}{g}\right) \quad f \in \mathcal{S}(A)_0,$$

montre que $E(f)(g)$ s'évanouit pour $|g| < \Lambda^{-1}$.

Cela montre que $E(B_{\Lambda,0}) \subset S_\Lambda$, de telle manière que si l'on prend $Q'_{\Lambda,0} = EQ_{\Lambda,0}E^{-1}$, on obtient l'inégalité,

$$(23) \quad Q'_{\Lambda,0} \leq S_\Lambda$$

et que pour un Λ donné, la distribution suivante sur C_k est de type positif,

$$(24) \quad \Delta_\Lambda(f) = \text{Trace}((S_\Lambda - Q'_{\Lambda,0})V(f)),$$

i.e. on a,

$$(25) \quad \Delta_\Lambda(f * f^*) \geq 0,$$

où $f^*(g) = \bar{f}(g^{-1})$ pour tout $g \in C_k$.

Prenons alors $f(g) = |g|^{-1/2} h(g^{-1})$, de telle façon que par (19), on ait $EU(h) = V(\tilde{f})E$ où $\tilde{f}(g) = f(g^{-1})$ pour tout $g \in C_k$. Par le lemme 3 de l'Appendice II, on a,

$$(26) \quad \sum_v D_v(f) - \log |d^{-1}| = \sum_v \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u.$$

On a $\text{Trace}(S_\Lambda V(f)) = 2f(1) \log' \Lambda$. Aussi, en utilisant a), on voit que la limite de Δ_Λ quand $\Lambda \rightarrow \infty$ est la distribution de Weil Δ (cf.(17)). Le terme D dans la dernière équation provient de la nuance entre les sous-espaces B_Λ et $B_{\Lambda,0}$. Cela montre, en utilisant (24), que la distribution Δ est de type positif de telle façon que b) est vérifiée (cf. [W3]).

Montrons maintenant que b) implique a). Nous allons calculer à partir des zéros des fonctions L , et indépendamment d'une quelconque hypothèse, la limite des distributions Δ_Λ quand $\Lambda \rightarrow \infty$.

Nous choisissons (de manière non canonique) un isomorphisme

$$(27) \quad C_k \simeq C_{k,1} \times N.$$

où $N = \text{image } | \cdot | \subset \mathbb{R}_+^*$, $N \simeq \mathbb{Z}$ est le sous-groupe $q^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_+^*$.

Pour $\rho \in \mathbb{C}$, soit $d\mu_\rho(z)$ la mesure harmonique de ρ par rapport à la ligne $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. C'est une mesure de probabilité sur la ligne $i\mathbb{R}$ et elle coïncide avec la masse de Dirac de ρ quand ρ est sur la ligne.

L'implication b) \Rightarrow a) découle immédiatement des formules explicites (Appendice II) et du lemme suivant,

Lemme 3. *La limite des distributions Δ_Λ quand $\Lambda \rightarrow \infty$ est donnée par,*

$$\Delta_\infty(f) = \sum_{\substack{L(\tilde{\chi}, \frac{1}{2} + \rho) = 0 \\ \rho \in B/N^\perp}} N(\tilde{\chi}, \frac{1}{2} + \rho) \int_{z \in i\mathbb{R}} \hat{f}(\tilde{\chi}, z) d\mu_\rho(z)$$

où B est la bande ouverte $B = \{\rho \in \mathbb{C}; \text{Re}(\rho) \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[\}$, $N(\tilde{\chi}, \frac{1}{2} + \rho)$ est la multiplicité du zéro, $d\mu_\rho(z)$ est la mesure harmonique de ρ par rapport à la ligne $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, et la transformée de Fourier \hat{f} de f est définie par,

$$\hat{f}(\tilde{\chi}, \rho) = \int_{C_k} f(u) \tilde{\chi}(u) |u|^\rho d^*u.$$

Preuve. Soit $\Lambda = q^N$. La preuve du Lemme 1 donne la borne inférieure $(2N + 1) - f + (2 - 2g)$ pour la dimension de $B_{\Lambda, \chi}$ en fonction de l'ordre de la ramification f du caractère χ de $C_{k,1}$, pour lequel nous supposons d'abord que $\chi \neq 1$.

Nous avons vu plus haut que $E(B_{\Lambda, \chi}) \subset S_{\Lambda, \chi}$ alors que la dimension de $S_{\Lambda, \chi}$ est $2N + 1$.

Maintenant, par le Lemme 3 de l'Appendice I, tout élément $\xi \in E(B_{\Lambda, \chi})$ satisfait les conditions,

$$(28) \quad \int \xi(x) \chi(x) |x|^\rho d^*x = 0 \quad \forall \rho \in B/N^\perp, L\left(\chi, \frac{1}{2} + \rho\right) = 0.$$

Cela donne $2g - 2 + f$ conditions linéairement indépendantes (pour N suffisamment grand), en utilisant le Théorème VII.6 de [W1], et cela montre que ces conditions caractérisent le sous-espace $E(B_{\Lambda, \chi})$ de $S_{\Lambda, \chi}$.

Cela réduit la preuve du lemme au simple calcul suivant : soit F un ensemble fini (contenant d'éventuelles multiplicités) de \mathbb{C}^* et E_N le sous-espace de $S_N = \{\xi \in l^2(\mathbb{Z}); \xi(n) = 0 \forall n > N\}$ défini par les conditions $\sum \xi(n) z^n = 0 \forall z \in F$. On doit alors calculer la limite quand $N \rightarrow \infty$ de $\text{Trace}((S_N - E_N)V(f))$ où V est la représentation régulière de \mathbb{Z} (de telle manière que $V(f) = \sum f_k V^k$ où V est le décalage, $V(\xi)_n = \xi_{n-1}$).

On vérifie alors que les vecteurs unités $\eta_z \in S_N$, $z \in F$, $\eta_z(n) = \bar{z}^n (|z^{2N+1}| - |z^{-(2N+1)}|)^{-\frac{1}{2}} (|z| - |z^{-1}|)^{\frac{1}{2}} \forall n \in [-N, N]$, sont asymptotiquement orthogonaux et étendent $(S_N - E_N)$ (quand F présente des multiplicités, on doit faire très attention). La conclusion découle alors de,

$$(29) \quad \text{Lim}_{N \rightarrow \infty} \langle V(f)\eta_z, \eta_z \rangle = \int_{|u|=1} P_z(u) \widehat{f}(u) du,$$

où $P_z(u)$ est le noyau de Poisson, et \widehat{f} la transformée de Fourier de f . ■

On devrait comparer ce lemme avec le Corollaire 2 du Théorème III.1. Dans ce dernier, seuls les zéros critiques entrent en jeu et avec une multiplicité contrôlée par δ . Dans le lemme ci-dessus, tous les zéros apparaissent avec leur multiplicité complète, mais alors que les zéros critiques apparaissent per-se, les zéros non-critiques jouent le rôle de résonances, comme dans la théorie de Fermi.

Expliquons maintenant comment les résultats ci-dessus s'étendent aux corps de nombres k . Nous avons d'abord besoin d'analyser, comme ci-dessus, la position relative des projections P_Λ et \widehat{P}_Λ . Rappelons à la lectrice la géométrie bien connue des paires de projecteurs. Rappelons qu'une paire de projections orthogonales P_i dans l'espace de Hilbert est la même chose qu'une représentation unitaire du groupe diédral $\Gamma = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$. Aux générateurs U_i de Γ correspondent des opérateurs $2P_i - 1$.

Le groupe Γ est le produit semi-direct du sous-groupe engendré par $U = U_1 U_2$, par le groupe $\mathbb{Z}/2$, agissant sur $U \mapsto U^{-1}$. Ses représentations unitaires irréductibles sont paramétrées par un angle $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, les projections orthogonales correspondantes P_i étant associées aux sous-espaces de dimension 1 de la forme $y = 0$ et $y = x \tan(\theta)$ dans le plan euclidien x, y . En particulier, ces représentations sont au plus de dimension 2. Une représentation unitaire générale est caractérisée

par l'opérateur Θ dont la valeur est l'angle θ ci-dessus dans le cas irréductible. Il est uniquement défini par l'égalité,

$$(30) \quad \text{Sin}(\Theta) = |P_1 - P_2|,$$

et commute avec P_i .

La première difficulté évidente est que, quand v est une place archimédienne, il n'existe pas de fonction non-nulle sur k_v qui s'évanouisse ainsi que sa transformée de Fourier pour $|x| > \Lambda$. Cela serait un obstacle difficile, s'il n'y avait eu le travail de Landau, Pollak et Slepian ([LPS]) au début des années soixante, motivés par des problèmes d'ingénierie électrique, qui les a amenés à surpasser leur problème en montrant que même si les projections P_Λ et \widehat{P}_Λ ne commutent pas exactement même pour Λ grand, leur angle se comporte suffisamment bien pour que le sous-espace B_Λ fasse sens.

Pour des raisons de simplicité, nous prendrons $k = \mathbb{Q}$, de telle façon que la seule place infinie soit réelle. Soit P_Λ la projection orthogonale sur le sous-espace,

$$(31) \quad P_\Lambda = \{\xi \in L^2(\mathbb{R}); \xi(x) = 0, \forall x, |x| > \Lambda\}.$$

et $\widehat{P}_\Lambda = FP_\Lambda F^{-1}$ où F est la transformée de Fourier associée au caractère de base $\alpha(x) = e^{-2\pi i x}$. Ce que les auteurs ci-dessus ont fait a consisté à analyser la position relative des projections P_Λ , \widehat{P}_Λ pour $\Lambda \rightarrow \infty$ de manière à pouvoir rendre compte de l'existence de signaux évidents (tels qu'un morceau de musique enregistrée par exemple) qui sont de support fini à la fois selon la variable temporelle, et selon la variable duale fréquence.

L'observation-clé de ([LPS]) est que l'opérateur différentiel de second ordre sur \mathbb{R} commute effectivement avec les projections P_Λ , \widehat{P}_Λ ,

$$(32) \quad H_\Lambda \psi(x) = -\partial((\Lambda^2 - x^2) \partial) \psi(x) + (2\pi \Lambda x)^2 \psi(x),$$

où ∂ est la différenciation ordinaire en une variable.

Exactement comme le générateur $x \partial$ d'échelle commute avec la projection orthogonale sur l'espace des fonctions à support positif, l'opérateur $\partial((\Lambda^2 - x^2) \partial)$ commute avec P_Λ . De plus, H_Λ commute avec la transformée de Fourier F , et la commutativité de H_Λ avec \widehat{P}_Λ en découle alors.

Si on le recolle à des fonctions à support dans $[-\Lambda, \Lambda]$, l'opérateur H_Λ a un spectre simple discret, et a été étudié longtemps avant le travail de [LPS]. Il apparaît dans la factorisation de l'équation de Helmholtz $\Delta \psi + k^2 \psi = 0$ dans l'un des peu nombreux systèmes de coordonnées séparables dans l'espace euclidien de dimension 3, qu'on appelle le système des coordonnées sphéroïdales. Ses valeurs propres $\chi_n(\Lambda)$, $n \geq 0$ sont simples, positives, et de l'ordre de n^2 pour $n \rightarrow \infty$. Les fonctions propres correspondantes sont appelées les fonctions d'ondes sphéroïdales et comme $P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$ commute avec H_Λ , ce sont les fonctions propres de $P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$. On connaît beaucoup de choses sur ces fonctions, en particulier, on peut les prendre à valeurs réelles, et elles sont mêmes paires pour n pair et impaires pour n impair. Le résultat-clé de [LPS] est que les valeurs propres correspondantes λ_n de l'opérateur $P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$ décroissent très lentement de $\lambda_0 \simeq 1$ jusqu'à la valeur $n \simeq 4\Lambda^2$ de l'index n , elles décroissent ainsi de $\simeq 1$ à $\simeq 0$ dans un intervalle de longueur $\simeq \log \Lambda$ et restent alors proches

de 0. Bien sûr, cela donne les valeurs propres de Θ , cela fournit l'analogie du sous-espace B_Λ du lemme 1, comme le fibré linéaire des ψ_n , $n \leq 4\Lambda^2$, et cela fournit la justification du comptage dans le cas semi-classique des nombres d'états de la mécanique quantique qui sont localisés sur l'intervalle $[-\Lambda, \Lambda]$ ainsi que leur transformée de Fourier comme l'aire du carré correspondant dans l'espace des phases.

Nous savons maintenant quel est le sous-espace B_Λ pour la seule place ∞ , et pour l'obtenir pour un ensemble de places arbitraire (contenant la place infinie), nous avons juste à utiliser la même règle que dans le cas des corps de fonctions, i.e. nous considérons l'application,

$$(33) \quad \psi \mapsto \psi \otimes 1_R,$$

qui suffit si on souhaite ne gérer que la fonction zêta de Riemann. Noter aussi que dans ce cas, nous nous restreignons aux fonctions paires sur \mathbb{R} . Cela donne l'analogie du Lemme 1, Théorème 5, et du Lemme 3.

Pour terminer cette section, nous allons revenir à notre motivation initiale de la section I et montrer comment la formule pour le nombre de zéros

$$(34) \quad N(E) \sim (E/2\pi)(\log E/2\pi - 1) + 7/8 + o(1) + N_{osc}(E)$$

apparaît à partir de notre interprétation spectrale.

Faisons d'abord un calcul dans le cas semi-classique du nombre d'états de la mécanique quantique à un degré de liberté et qui remplissent la condition suivante,

$$(35) \quad |q| \leq \Lambda, |p| \leq \Lambda, |H| \leq E,$$

où $H = qp$ est l'hamiltonien engendrant le groupe des transformations d'échelle,

$$(36) \quad (U(\lambda)\xi)(x) = \xi(\lambda^{-1}x) \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*, x \in \mathbb{R}, \xi \in L^2(\mathbb{R}),$$

comme dans notre cadre général.

Pour nous conformer à notre analyse de la section III, nous devons nous restreindre aux fonctions paires de manière à exclure la région $pq \leq 0$ du plan semi-classique (p, q) .

Maintenant, la région qui respecte la condition ci-dessus est égale à $D = D_+ \cup (-D_+)$ où,

$$(37) \quad D_+ = \{(p, q) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, p \leq \Lambda, q \leq \Lambda, pq \leq E\},$$

Calculons l'aire de D_+ de la forme symplectique canonique,

$$(38) \quad \omega = \frac{1}{2\pi} dp \wedge dq.$$

Par construction, D_+ est l'union d'un rectangle ayant pour côtés E/Λ , Λ avec la portion sous la courbe, de $q = E/\Lambda$ à $q = \Lambda$, de l'hyperbole $pq = E$. Ainsi,

$$(39) \quad \int_{D_+} \omega = \frac{1}{2\pi} E/\Lambda \times \Lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{E/\Lambda}^{\Lambda} \frac{E dq}{q} = \frac{E}{2\pi} + \frac{2E}{2\pi} \log \Lambda - \frac{E}{2\pi} \log E.$$

Maintenant, le calcul ci-dessus correspond à la normalisation standard de la transformée de Fourier avec le caractère de base de \mathbb{R} donné par

$$(40) \quad \alpha(x) = \exp(ix).$$

Mais nous devons nous conformer à la normalisation naturelle à la place infinie,

$$(41) \quad \alpha_0(x) = \exp(-2\pi ix).$$

Nous devons ainsi effectuer la transformation,

$$(41) \quad P = p/2\pi, \quad Q = q.$$

La forme symplectique est maintenant $dP \wedge dQ$ et le domaine,

$$(42) \quad D' = \{(P, Q); |Q| \leq \Lambda, |P| \leq \Lambda, |PQ| \leq E/2\pi\}.$$

Le calcul est similaire et amène au résultat suivant,

$$(43) \quad \int_{D'_+} \omega = \frac{2E}{2\pi} \log \Lambda - \frac{E}{2\pi} \left(\frac{\log E}{2\pi - 1} \right).$$

Dans cette formule, on voit que le terme principal $\langle N(E) \rangle$, qui apparaît avec un signe *moins*, montre que le nombre d'états mécaniques quantiques correspondant à D' est inférieur à $\frac{4E}{2\pi} \log \Lambda$ par la première approximation du nombre de zéros de zêta dont la partie imaginaire est inférieure à E en valeur absolue (on a juste à multiplier par 2 l'égalité (43) puisque $D' = D'_+ \cup (-D'_+)$).

Maintenant $\frac{1}{2\pi} (2E)(2 \log \Lambda)$ est le nombre d'états quantiques de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*x)$ qui sont localisés dans \mathbb{R}_+^* entre Λ^{-1} et Λ , ainsi que localisés dans le groupe dual \mathbb{R} (pour l'appariement $\langle \lambda, t \rangle = \lambda^{it}$) entre $-E$ et E . Ainsi, on voit clairement que la première approximation de $N(E)$ apparaît comme le manque de surjectivité de l'application qui associe aux états quantiques ξ appartenant à D' la fonction sur \mathbb{R}_+^* ,

$$(44) \quad E(\xi)(x) = |x|^{1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi(nx)$$

où l'on assume les conditions supplémentaires $\xi(0) = \int \xi(x) dx = 0$.

Une analyse plus précise, qui est juste ce que fait la formule de trace, amènera les termes additionnels $7/8 + o(1) + N_{osc}(E)$. La discussion ci-dessus fournit la construction explicite d'une grande matrice dont le spectre approche les zéros de zêta lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$.

Il est assez remarquable que les valeurs propres de l'opérateur angle Θ dont nous avons discuté ci-dessus, jouent également un rôle-clé dans la théorie des matrices aléatoires unitaires. Pour être plus précis, soit $E(n, s)$ la grande probabilité limite N qu'il y ait exactement n valeurs propres d'une matrice hermitienne de taille $N \times N$ dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{\sqrt{2N}}t, \frac{\pi}{\sqrt{2N}}t]$, $t = s/2$. Clairement, $\sum_n E(n, s) = 1$. Soit P_t comme ci-dessus l'opérateur de multiplication par $1_{[-t, t]}$ - la fonction caractéristique de l'intervalle $[-t, t]$ dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. En général (cf. [Me]), $E(n, s)$ est le produit de $(-1)^n$ par le n -ième coefficient de l'expansion de Taylor en $z = 1$ de $\zeta_s(z) = \prod_1^\infty (1 - z\lambda_j(s))$,

où $\lambda_j(s)$ sont les valeurs propres de l'opérateur $\widehat{P}_\pi P_t$ (ici, on note $\widehat{P}_\lambda = \mathcal{F}P_\lambda\mathcal{F}^{-1}$, et \mathcal{F} la transformée de Fourier, $\mathcal{F}\xi(u) = \int e^{ixu}\xi(x)dx$. Noter également que les valeurs propres de $\widehat{P}_a P_b$ dépendent seulement du produit ab de manière à ce que les relations avec les valeurs propres de Θ soient bien claires).

Remarques générales.

a) Il y a une forte analogie entre la construction de l'espace de Hilbert $L^2(X)$ dans la section III, et la construction de l'espace physique ([S] théorème 2.1) dans la théorie quantique des champs constructive, dans le cas des théories de jauge. Dans les deux cas, l'action du groupe d'invariance (le groupe $k^* = GL_1(k)$ dans notre cas, le groupe de jauge dans le cas des théories de jauge) est balayé par la véritable définition du produit intérieur. Comparer les commentaires après III (9) avec ([S]) en haut de la page 17.

b) Pour les corps globaux de caractéristique 0, le groupe des classes d'idèles a un composant connexe non évident de l'identité et ce groupe connexe n'a jusque-là pas reçu d'interprétation par la théorie de Galois (cf. [W4]). L'apparition de facteurs de type III dans [BC] indique que la classification des facteurs hyperfinis de type III [C] devrait être vue comme une restriction de la théorie des corps de classes locaux pour les places archimédiennes, et fournir l'interprétation manquante de la composante connexe de l'identité du groupe des classes d'idèles. En particulier, les facteurs hyperfinis de type III sont classifiés par des sous-groupes fermés (virtuels) de \mathbb{R}_+ (cf. [C]) et ils apparaissent tous comme des extensions "non-ramifiées" de l'hyperfacteur de type III₁.

c) Notre construction de l'espace d'Hilbert-Polya présente quelque ressemblance avec [Z] et en fait, il faudrait clarifier cette relation, ainsi que la relation de l'espace des classes d'adèles avec le site arithmétique de Deninger [D]. Noter que la division de A par k^* élimine la structure linéaire de A et qu'elle transforme drastiquement les formules pour les espaces de fonctions, en remplaçant les produits par des sommes (cf. théorème 4 de la section VII). Il devrait être clair à la lecture que l'action du groupe des classes d'idèles sur l'espace des classes d'adèles est l'analogue (à travers le dictionnaire habituel de la théorie des corps de classes) de l'action du Frobenius sur la courbe (pour être plus précis, on a besoin de diviser d'abord l'espace des classes d'adèles par l'action du sous-groupe maximal du groupe des classes d'idèles).

d) Il y a une ressemblance superficielle entre la manière dont $N(E)$ apparaît dans le dernier calcul de la section VIII et la discussion dans [BK], directement inspirée de [Co]. Il est amusant de noter que le calcul de [BK] coïncide vraiment, les deux rectangles sont éliminés sans raison, ce qui change adéquatement le signe du terme dans E . Ce que [BK] n'a pas pris en compte, c'est l'interprétation spectrale de [Co] comme un *spectre d'absorption* plutôt que comme un spectre d'émission.

e) Il y a une ressemblance encore plus superficielle entre ce travail et celui de D. Goldfeld [G] ; dans ce dernier, la distribution de Weil est utilisée pour définir un produit intérieur correspondant à un espace de fonctions sur le groupe des classes d'idèles. La positivité du produit intérieur est bien-sûr équivalente à la positivité de la distribution de Weil (et par le résultat de Weil à RH) mais

cela ne donne aucun indice sur la manière de prouver cette positivité, et aucune explication n'est fournie (exceptée pour une jolie observation aux places archimédiennes) sur ce qu'est la distribution de Weil, puisqu'elle est introduite à la main dans la formule pour le produit intérieur.

f) Le cadre proposé ci-dessus s'étend naturellement du cas de $GL(1)$ au cas $GL(n)$ pour lequel l'espace des classes d'adèles est remplacé par le quotient de $M_n(A)$ par l'action à droite de $GL_n(k)$. Le travail préliminaire de C. Soulé montre que l'analogie du théorème III.1 reste valide, la prochaine étape étant de trouver l'analogie de la formule de trace de Lefschetz dans ce contexte.

g) J'ai appris de P. Sarnak et E. Bombieri que Paul Cohen a considéré l'espace des classes d'adèles en connexion avec RH, mais n'ai obtenu aucun détail des idées non publiées de celui-ci.

Tous les résultats du présent article ont été annoncés à la conférence au sujet de l'hypothèse de Riemann de septembre 1998 au Schrödinger Institute de Vienne et ont été publiés dans un preprint du Schrödinger Institute. Nous sommes reconnaissant à l'Institut Américain de Mathématiques d'avoir sponsorisé cette conférence.

Appendices

Appendice I. Preuve du théorème 1.

Dans cet appendice, nous donnons la preuve du théorème 1. Rappelons au préalable les résultats de Tate et Iwasawa à trouver dans [W2]

fonctions L et distributions homogènes sur A

En général, pour un corps local non archimédien K , nous utilisons les notations R pour le sous-anneau compact maximal, P pour l'idéal maximal de R , π pour un générateur de l'idéal P (i.e. $P = \pi R$).

Soit k un corps global et A l'anneau des adèles de k . C'est le produit restreint des corps locaux k_v indexé par l'ensemble des places v de k , par rapport aux sous-anneaux compacts maximaux R_v . Similairement, l'espace de Bruhat-Schwartz $\mathcal{S}(A)$ est le produit tensoriel restreint des espaces locaux de $\mathcal{S}(k_v)$, par rapport aux vecteurs 1_{R_v} .

Aux fonctions L sur k sont associés des Grössencharaktere, i.e. des caractères du groupe des classes d'idèles,

$$(1) \quad C_k = J_k/k^* .$$

Soit \mathcal{X} un caractère du groupe des classes d'idèles, nous considérons \mathcal{X} comme un caractère de J_k qui vaut 1 sur k^* . Puisqu'il peut être écrit comme un produit,

$$(2) \quad \mathcal{X}(j) = \prod \mathcal{X}_v(j_v) \quad j = (j_v) \in J_k .$$

En considérant la restriction de \mathcal{X} au sous-groupe compact

$$(3) \quad G_0 = \prod R_v^* \times 1 \subset J_k ,$$

il découle que pour tout v fini sauf pour un nombre fini d'entre elles, on a

$$(4) \quad \mathcal{X}_v/R_v^* = 1.$$

On dit que \mathcal{X} est non-ramifié en v quand cela a lieu.

Alors $\mathcal{X}_v(x)$ dépend seulement du module $|x|$, puisque

$$(5) \quad k_v^*/R_v^* = \text{mod}(k_v).$$

Ainsi \mathcal{X}_v est déterminé par

$$(6) \quad \mathcal{X}_v(\pi_v)$$

qui ne dépend pas du choix de $\pi_v \pmod{R_v^*}$.

Soit \mathcal{X} un quasi-caractère de C_k , il est de la forme,

$$(7) \quad \mathcal{X}(x) = \mathcal{X}_0(x) |x|^s$$

où $s \in \mathbb{C}$ et \mathcal{X}_0 est un caractère de C_k . La partie réelle σ de s est uniquement déterminée par

$$(8) \quad |\mathcal{X}(x)| = |x|^\sigma.$$

Soit P l'ensemble fini des places finies auxquelles \mathcal{X}_0 est ramifié. La L -fonction $L(\mathcal{X}_0, s)$ est définie pour $\sigma = \text{Re}(s) > 1$ par

$$(9) \quad L(\mathcal{X}_0, s) = \left(\prod_{\substack{v \text{ fini} \\ v \notin P}} (1 - \mathcal{X}_{0,v}(\pi_v) q_v^{-s})^{-1} \right) = \left(\prod_{\substack{v \text{ fini} \\ v \notin P}} (1 - \mathcal{X}_v(\pi_v))^{-1} \right)$$

où

$$(10) \quad |\pi_v| = q_v^{-1}.$$

Rappelons (cf. [W2]) comment $L(\mathcal{X}_0, s)$ apparaît comme un facteur de normalisation pour les distributions homogènes sur A .

D'abord, soit K un corps local et \mathcal{X} un quasi-caractère de K^* ,

$$(11) \quad \mathcal{X}(x) = \mathcal{X}_0(x) |x|^s, \quad \mathcal{X}_0 : K^* \rightarrow U(1).$$

Une distribution D sur K est homogène de poids \mathcal{X} ssi on a

$$(12) \quad \langle f^a, D \rangle = \mathcal{X}(a)^{-1} \langle f, D \rangle$$

pour toutes les fonctions test f et pour tout a dans K^* , où par définition

$$(13) \quad f^a(x) = f(ax)$$

Quand $\sigma = \text{Re}(s) > 0$, il existe, moyennant normalisation seulement, une distribution homogène de poids \mathcal{X} sur K (cf. [W2]). Elle est donnée par l'intégrale absolument convergente,

$$(14) \quad \int_{K^*} f(x) \mathcal{X}(x) d^*x = \Delta_{\mathcal{X}}(f)$$

En particulier, soit K non-archimédien, alors, pour n'importe quelle fonction localement constante supportée de façon compacte f par K , on a,

$$(15) \quad f(x) - f(\pi^{-1}x) = 0 \quad \forall x, |x| \leq \delta.$$

Ainsi, pour tout $s \in \mathbb{C}$, l'intégrale

$$(16) \quad \int_{K^*} (f(x) - f(\pi^{-1}x)) |x|^s d^*x = \Delta'_s(f)$$

avec comme mesure de Haar multiplicative d^*x , normalisée par

$$(17) \quad \langle 1_{R^*}, d^*x \rangle = 1$$

définit une distribution sur K avec les propriétés,

$$(18) \quad \langle 1_R, \Delta'_s \rangle = 1,$$

$$(19) \quad \langle f^a, \Delta'_s \rangle = |a|^{-s} \langle f, \Delta'_s \rangle,$$

et

$$(20) \quad \Delta'_s = (1 - q^{-s}) \Delta_s,$$

où $|\pi| = q^{-1}$.

(Vérifions (18)...(20). Avec $f = 1_R$, on a $f(\pi^{-1}x) = 1$ ssi $\pi^{-1}x \in R$ i.e. $x \in \pi R = P$. Ainsi, $\Delta'_s(1_R) = \int_{R^*} d^*x = 1$. Vérifions (20), on a $\int f(\pi^{-1}x) |x|^s d^*x = \int f(y) |\pi|^s |y|^s d^*y = |\pi|^s \Delta_s(f)$. Mais $|\pi| < 1$, $|\pi| = \frac{1}{q}$. Noter alors que pour $s = 1$ et $f = 1_R$, on obtient $\int_{R^*} dx = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \int_R dx$).

Soit alors \mathcal{X} un quasi-caractère de C_k et écrivons comme ci-dessus

$$(21) \quad \mathcal{X} = \Pi \mathcal{X}_v, \quad \mathcal{X}(x) = \mathcal{X}_0(x) |x|^s$$

où $s \in \mathbb{C}$ et \mathcal{X}_0 est un caractère.

Soit P l'ensemble fini des places finies où P se ramifie.

Pour toute place $v \notin P$, soit $\Delta'_v(s)$ l'unique distribution homogène de poids \mathcal{X}_v normalisée par

$$(22) \quad \langle \Delta'_v(s), 1_{R_v} \rangle = 1.$$

Pour tout $v \in P$ ou pour toute place infinie, soit, pour $\sigma = \text{Re}(s) > 0$, Δ'_v donnée par (14) homogène de poids \mathcal{X}_v mais non normalisée. Alors le produit tensoriel infini,

$$(23) \quad \Delta'_s = \Pi \Delta'_v(s)$$

prend sens comme une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(A)$ et est homogène de poids \mathcal{X} .

Cette solution n'est pas égale à 0 puisque $\Delta'_v \neq 0$ pour tout $v \in P$ ainsi que pour n'importe quelle place infinie. Elle est finie par construction sur l'espace $\mathcal{S}(A)$ des fonctions test comme produit tensoriel infini

$$(24) \quad \mathcal{S}(A) = \otimes (\mathcal{S}(k_v), 1_{R_v}).$$

Lemme 1. (cf. [W2]) Pour $\sigma = \text{Re}(s) > 1$, les intégrales suivantes convergent absolument

$$\int f(x) \mathcal{X}_0(x) |x|^s d^*x = \Delta_s(f) \quad \forall f \in \mathcal{S}(A)$$

et $\Delta_s(f) = L(\mathcal{X}_0, s) \Delta'_s(f)$.

Preuve. Pour obtenir la convergence absolue, on peut supposer que $f = 1_R$ et $\mathcal{X}_0 = 1$. Alors, on doit contrôler un produit infini de termes locaux, donnés localement pour la mesure de Haar d^*x sur k_v^* tels que $\int_{R^*} d^*x = 1$, par

$$(25) \quad \int_{R \cap k_v^*} |x|^s d^*x \quad (s \text{ réel})$$

qui est égal à $1 + q_v^{-s} + q_v^{-2s} + \dots = (1 - q_v^{-s})^{-1}$. Ainsi, la convergence de $\sigma > 1$ est la même que celle de la fonction zêta.

Pour prouver la seconde égalité, on a seulement besoin de considérer le produit tensoriel infini pour les places finies $v \notin P$. Alors, par (20), on a $\Delta'_v = (1 - q_v^{-\alpha v}) \Delta_v$ où

$$(26) \quad q_v^{-\alpha v} = \mathcal{X}_v(\pi) = \mathcal{X}_{0,v}(\pi) q_v^{-s}$$

avec $|\pi| = q_v^{-1}$.

$$\text{Ainsi, on obtient } \Delta_s = \left(\prod_{\substack{v \text{ fini} \\ v \notin P}} (1 - \mathcal{X}_{0,v}(\pi) q_v^{-s})^{-1} \right) \Delta'_s = L(\mathcal{X}_0, s) \Delta'_s. \blacksquare$$

Par construction, Δ'_s fait sens à chaque fois que $\sigma > 0$ et est une fonction holomorphe de s (pour f fixée). Revoyons brièvement (cf. [W2]) comment étendre la définition de Δ_s .

Nous définissons comme ci-dessus k comme un corps global, nous fixons un caractère trivial non-additif α de A , trivial sur k ,

$$(27) \quad \alpha(x + y) = \alpha(x) \alpha(y) \in U(1), \quad \alpha(q) = 1, q \in k.$$

Nous identifions alors le dual du groupe additif localement compact A avec A lui-même par l'appariement,

$$(28) \quad \langle x, y \rangle = \alpha(xy).$$

On montre (cf.[W1]) que le treillis $k \subset A$, i.e. le sous-groupe additif cocompact discret k , est son propre dual,

$$(29) \quad \langle x, q \rangle = 1 \quad \forall q \in k \quad \Leftrightarrow \quad x \in k.$$

Puisque A est le produit restreint des corps locaux k_v , on peut écrire α comme un produit infini,

$$(30) \quad \alpha = \prod \alpha_v$$

où pour presque tout v , on a $\alpha_v = 1$ sur R_v . Rappelons la définition de l'espace $\mathcal{S}(A)_0$,

$$(31) \quad \mathcal{S}(A)_0 = \{f \in \mathcal{S}(A) ; f(0) = 0, \int f dx = 0\}$$

Lemme 2. Soit $f \in \mathcal{S}(A)_0$, alors les séries

$$E(f)(g) = |g|^{1/2} \sum_{q \in k^*} f(qg) \quad \forall g \in C_k$$

convergent absolument et on a

$$\forall n, \exists c, \quad |E(f)(g)| \leq c e^{-n|\log|g||} \quad \forall g \in C_k$$

et $E(\widehat{f})(g) = E(f)(g^{-1})$.

Preuve. Rappelons d'abord la définition formelle ([Br]) de l'espace de Bruhat-Schwartz $\mathcal{S}(G)$ pour un groupe abélien arbitraire localement compact G . On considère toutes les paires de sous-groupes G_1, G_2 de G telles que G_1 est engendré par un voisinage compact de 0 dans G , tandis que G_2 est un sous-groupe compact de G_1 tel que le groupe-quotient est élémentaire, i.e. est de la forme $\mathbb{R}^a \mathbb{T}^b \mathbb{Z}^c F$ pour F un groupe fini. Par définition, l'espace de Schwartz, $\mathcal{S}(G)$ est la limite inductive des espaces de Schwartz $\mathcal{S}(G_1/G_2)$, où ces derniers sont définis comme habituellement en terme de décroissance rapide de leurs dérivées. Puisque G_1 est ouvert dans G , tout élément de $\mathcal{S}(G_1/G_2)$ étendu par la valeur 0 en dehors de G_1 définit une fonction continue sur G . Par construction, $\mathcal{S}(G)$ est l'union des sous-espaces $\mathcal{S}(G_1/G_2)$ et il est muni de la limite topologique inductive.

Soit \widehat{G} le dual de Pontrjagin de G , alors la transformée de Fourier, qui dépend de la normalisation de la mesure de Haar sur G , fournit un isomorphisme de $\mathcal{S}(G)$ dans $\mathcal{S}(\widehat{G})$.

Soit Γ un treillis dans le groupe abélien localement compact G . Alors, toute fonction $f \in \mathcal{S}(G)$ est admissible pour l'appariement G, Γ au sens de [W1], et la formule de sommation de Poisson (cf. [W1]) est l'égalité,

$$(32) \quad \text{Covol}(\Gamma) \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) = \sum_{\beta \in \Gamma^\perp} \widehat{f}(\beta)$$

où Γ^\perp est le dual du treillis Γ , et

$$(33) \quad \widehat{f}(\beta) = \int f(a) \beta(a) da.$$

Les deux côtés de l'égalité (32) dépendent de la normalisation de la mesure de Haar sur G .

Dans notre cas, on définit A comme le groupe additif des adèles sur k .

On normalise la mesure de Haar dx sur A par

$$(34) \quad \text{Covol}(k) = 1.$$

On prend alors $\Gamma = xk$, pour quelque $x \in A^{-1}$. On a

$$(35) \quad \text{Covol}(xk) = |x|$$

Le dual Γ^\perp du treillis xk , pour x inversible dans A , est le treillis $\Gamma^\perp = x^{-1}k$. Alors, la formule de Poisson (32) se lit, pour tout $f \in \mathcal{S}(A)$,

$$(36) \quad |x| \sum_{q \in k} f(xq) = \sum_{q \in k} \widehat{f}(x^{-1}q).$$

Ce que nous pouvons réécrire en,

$$(37) \quad |x| \sum_{k^*} f(xq) = \sum_{k^*} \widehat{f}(x^{-1}q) + \delta$$

$$\delta = -|x| f(0) + \int f(y) dy.$$

Nous pouvons alors réécrire (37) comme l'égalité, valide pour tout $f \in \mathcal{S}(A)_0$

$$(38) \quad E(f)(x) = E(\widehat{f})\left(\frac{1}{x}\right) \quad f \in \mathcal{S}(A)_0.$$

Il reste à contrôler la croissance de $E(f)(x)$ sur C_k , mais par (38), il suffit de comprendre ce qui se passe pour $|x|$ grand.

Nous traitons seulement le cas des corps de nombres, le cas général est similaire. Soit $A = A_f \times A_\infty$ la décomposition de l'anneau des adèles correspondant aux places finies et infinies, ainsi $A_\infty = \prod_{S_\infty} k_v$ où S_∞ est l'ensemble des places infinies.

Tout élément de $\mathcal{S}(A)$ est une combinaison linéaire finie de fonctions test de la forme,

$$(39) \quad f = f_0 \otimes f_1$$

où $f_0 \in \mathcal{S}(A_f)$, $f_1 \in \mathcal{S}(A_\infty)$ (cf. [W5] 39), ainsi, cela suffit à contrôler la croissance de $E(f)(x)$ pour une telle f et $|x|$ grand.

Soit $J_{k,1} = \{x \in J_k; |x| = 1\}$ le groupe des idèles de module 1, puisque $J_{k,1}/k^*$ est compact (cf. [W1]), nous allons prendre un ensemble compact K_1 de $J_{k,1}$ dont l'image dans $J_{k,1}/k^*$ est ce groupe compact.

Soit μ l'immersion diagonale :

$$(40) \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{\mu} (\lambda, \dots, \lambda) \in \prod_{S_\infty} k_v^*$$

qui fournit l'isomorphisme

$$(41) \quad J_k = J_{k,1} \times \text{Im } \mu.$$

On a $f_0 \in \mathcal{S}(A_f)$, puisque (cf. [W5]), $f_0 \in C_c(A_f)$ et on pose $K_0 = \text{Support } f_0$. Puisque K_0 est compact, on peut trouver un sous-ensemble fini P de l'ensemble des places finies et $C < \infty$ tel que :

$$(42) \quad y \in K = (K_f)^{-1}K_0 \Rightarrow |y_v| \leq 1, v \notin P, \quad |y_v| \leq C, \quad \forall v.$$

où K_f est la projection de K_1 sur A_f .

Définissons Ω comme le sous-groupe ouvert compact de A_f déterminé par

$$(43) \quad |a_v| \leq 1, v \notin P, \quad |a_v| \leq C, \quad \forall v.$$

Par construction, $E(f)(x)$ dépend seulement de la classe de x dans J_k/k^* . Ainsi, pour contrôler le comportement de $E(f)(x)$ pour $|x| \rightarrow \infty$, on peut prendre $x = (x_f, x_\infty) \in K_1$ et considérer $E(f)(\lambda x)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*, \lambda \rightarrow \infty$. Maintenant, soit $q = (q_f, q_\infty) \in k$, alors,

$$(44) \quad f(q \lambda x) = f_0(q_f x_f) f_1(q_\infty \lambda x_\infty)$$

et cela s'évanouit, à moins que $q_f x_f \in K_0$, i.e. à moins que $q_f \in K$. Mais alors, par (42), on a $q_f \in \Omega$. Soit Γ le treillis sur $\prod_{S_\infty} k_v$ déterminé par

$$(45) \quad \Gamma = \{q_\infty; q \in k, q_f \in \Omega, \}$$

La taille de $E(f)(\lambda x)$ est ainsi contrôlée (jusqu'à la racine carrée de $|\lambda x|$) par

$$(46) \quad C \sum_{n \in \Gamma^*} |f_1(\lambda x_\infty n)|$$

où x_∞ varie sur la projection K_∞ de K_1 sur $\prod_{S_\infty} k_v^*$.

Puisque $f_1 \in \mathcal{S}(A_\infty)$, cela montre que $E(f)(x)$ décroît plus vite que n'importe quelle puissance de $|x|$ pour $|x| \rightarrow \infty$.

Nous avons montré que $E(f)$ décroît rapidement par rapport à $|x|$, pour $|x| \rightarrow \infty$. En utilisant (38) et la stabilité de $\mathcal{S}(A)_0$ sous Fourier, nous voyons qu'il décroît aussi rapidement par rapport à $|\log |x||$ quand $|\log |x|| \rightarrow \infty$.

Nous obtenons alors,

Lemme 3. (cf. [W2]) *Pour $\sigma = \text{Re}(s) > 0$, et n'importe quel caractère \mathcal{X}_0 de C_k , on a*

$$\int E(f)(x) \mathcal{X}_0(x) |x|^{s-1/2} d^*x = cL(\mathcal{X}_0, s) \Delta'_s(f) \quad \forall f \in \mathcal{S}(A)_0$$

où la constante non nulle c dépend de la normalisation de la mesure de Haar d^*x sur C_k .

Preuve. Pour $\sigma = \text{Re}(s) > 1$, l'égalité découle du lemme 1, mais puisque les deux côtés sont analytiques dans s , cela est vérifié en général.

Comme dans le lemme 1, nous continuerons d'utiliser la notation $\Delta_s(f)$ pour $\sigma = \text{Re}(s) > 0$.

Unités approchées dans les espaces de Sobolev $L_\delta^2(C_k)$

On considère d'abord, pour $\delta > 1$, l'espace de Hilbert $L_\delta^2(\mathbb{R})$ de fonctions $\xi(u)$, $u \in \mathbb{R}$ de norme carrée donnée par

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}} |\xi(u)|^2 (1 + u^2)^{\delta/2} du.$$

Posons $\rho(u) = (1 + u^2)^{\delta/2}$. Il est comparable à $(1 + |u|)^\delta$ et en particulier,

$$(2) \quad \frac{\rho(u+a)}{\rho(u)} \leq c \rho(a) \quad \forall u \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$$

avec $c = 2^{\delta/2}$.

Soit alors $V(v)$ l'opérateur de translation,

$$(3) \quad (V(v)\xi)(u) = \xi(u-v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

on a $\int_{\mathbb{R}} |\xi(u-v)|^2 \rho(u) du = \int_{\mathbb{R}} |\xi(u)|^2 \rho(u+v) du$ de telle manière que par (2), il est inférieur à $c \int_{\mathbb{R}} |\xi(u)|^2 \rho(u) \rho(v) du = c \rho(v) \|\xi\|^2$,

$$(4) \quad \|V(v)\| \leq (c \rho(v))^{1/2}.$$

Cela montre que $V(f) = \int f(v) V(v) dv$ a du sens dès que

$$(5) \quad \int |f(v)| \rho(v)^{1/2} dv < \infty.$$

Cela est vérifié pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Lemme 4. *Il existe une unité approchée $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, telle que \widehat{f}_n est à support compact, $\|V(f_n)\| \leq C, \forall n$, et*

$$V(f_n) \rightarrow 1 \text{ fortement dans } L^2_\delta(\mathbb{R}).$$

Preuve. Soit f une fonction, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dont la transformée de Fourier \widehat{f} est à support compact, et telle que $\int f dx = 1$ (i.e. $\widehat{f}(0) = 1$). Alors soit

$$(6), \quad f_n(v) = n f(nv) \quad n = 1, 2, \dots$$

on a $\int |f_n(v)| \rho(v)^{1/2} dv = \int |f(u)| \rho(\frac{u}{n})^{1/2} du \leq \int |f(u)| \rho(u)^{1/2} du$. Ainsi $\|V(f_n)\|$ est uniformément bornée.

Nous pouvons supposer que \widehat{f} est égale à 1 sur $[-1, 1]$, alors \widehat{f}_n est égale à 1 sur $[-n, n]$ et $V(f_n)\xi = \xi$ pour n'importe quel ξ avec $\text{Supp } \widehat{\xi} \subset [-n, n]$. Par uniformité, on obtient que $V(f_n) \rightarrow 1$ fortement.

■

Identifions maintenant le dual $(L^2_\delta)^*$ de l'espace de Hilbert L^2_δ avec $L^2_{-\delta}$ au moyen de l'appariement,

$$(7) \quad \langle \xi, \eta \rangle_0 = \int_{\mathbb{R}} \xi(u) \eta(u) du.$$

Puisque L^2_δ est un espace de Hilbert, il est son propre dual en utilisant l'appariement,

$$(8) \quad \langle \xi, \eta_1 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \xi(u) \eta_1(u) (1 + u^2)^{\delta/2} du.$$

Si l'on pose $\eta(u) = \eta_1(u)(1 + u^2)^{\delta/2}$, alors

$$\int |\eta_1(u)|^2 (1 + u^2)^{\delta/2} du = \int |\eta(u)|^2 (1 + u^2)^{-\delta/2} du$$

qui est la norme carrée naturelle pour $L_{-\delta}^2$.

Étant donné un groupe quasi-compact tel que C_k avec comme module,

$$(9) \quad | \cdot | : C_k \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

on choisit d^*g la mesure de Haar sur C_k normalisée par

$$(10) \quad \int_{|g| \in [1, \Lambda]} d^*g \sim \log \Lambda \quad \Lambda \rightarrow \infty$$

et on pose $L_\delta^2(C_k)$ définie comme la norme de,

$$(11) \quad \int_{C_k} |\xi(g)|^2 (1 + \log |g|^2)^{\delta/2} d^*g.$$

C'est, quand le module de k est \mathbb{R}_+^* , une somme directe d'espaces (1), étiquetée par les caractères \mathcal{X}_0 du groupe compact

$$(12) \quad C_{k,1} = \text{Ker mod}.$$

L'appariement entre $L_\delta^2(C_k)$ et $L_{-\delta}^2(C_k)$ est donné par

$$(13) \quad \langle \xi, \eta \rangle = \int \xi(g) \eta(g) d^*g.$$

La représentation naturelle V de C_k par les translations est donnée par

$$(14) \quad (V(a)\xi)(g) = \xi(a^{-1}g) \quad \forall g, a \in C_k.$$

Elle est unitaire, mais par (4), on a,

$$(15) \quad \|V(g)\| = 0 \text{ si } |\log |g||^{\delta/2}, \text{ si } |\log |g|| \rightarrow \infty.$$

Finalement, on a, en utilisant le lemme 4 et la décomposition $C_k = C_{k,1} \times N$,

Lemme 5. *Il existe une unité approchée $f_n \in \mathcal{S}(C_k)$, telle que \widehat{f}_n est à support compact, $\|V(f_n)\| \leq C, \forall n$, et*

$$V(f_n) \rightarrow 1 \text{ fortement dans } L_\delta^2(C_k).$$

Preuve du théorème III.1

On considère d'abord le sous-espace de codimension 2 de $\mathcal{S}(A)$ donné par

$$(1) \quad f(0) = 0, \int f dx = 0.$$

On munit ce sous-espace $\mathcal{S}(A)_0$ du produit intérieur,

$$(2) \quad \int_{C_k} |E(f)(x)|^2 (1 + \log |x|^2)^{\delta/2} d^*x.$$

Soit U la représentation de C_k sur $\mathcal{S}(A)$ donnée par

$$(3) \quad (U(a)\xi)(x) = \xi(a^{-1}x) \quad \forall a \in C_k, x \in A.$$

Soit $L_\delta^2(X)_0$ la complétion séparée de $\mathcal{S}(A)_0$ pour le produit intérieur donné par (2). L'application linéaire $E : \mathcal{S}(A)_0 \rightarrow L_\delta^2(C_k)$ satisfait

$$(4) \quad \|E(f)\|_\delta^2 = \|f\|_\delta^2$$

par construction. Aussi, elle s'étend à une isométrie, toujours notée E ,

$$(5) \quad E : L_\delta^2(X)_0 \hookrightarrow L_\delta^2(C_k).$$

On a

$$\begin{aligned} E(U(a)f)(g) &= |g|^{1/2} \sum_{k^*} (U(a)f)(qg) = |g|^{1/2} \sum_{k^*} f(a^{-1}qg) \\ &= |g|^{1/2} \sum_{k^*} f(qa^{-1}g) = |a|^{1/2} |a^{-1}g|^{1/2} \sum_{k^*} f(qa^{-1}g) = |a|^{1/2} (V(a)E(f))(g) \end{aligned}$$

$$(6) \quad EU(a) = |a|^{1/2} V(a)E.$$

L'égalité (6) montre que la représentation naturelle U de C_k sur $L_\delta^2(X)_0$ correspond par l'isométrie E à la restriction de $|a|^{1/2} V(a)$ au sous-espace invariant donné par l'image de E .

Pour comprendre $\text{Im } E$, on considère son orthogonal dans l'espace dual $L_{-\delta}^2(C_k)$.

Le sous-groupe compact

$$(7) \quad C_{k,1} = \{g \in C_k; |g| = 1\}$$

agit par la représentation V qui est unitaire quand elle est restreinte à $C_{k,1}$. Ainsi, on peut décomposer $L_\delta^2(C_k)$ et son dual $L_{-\delta}^2(C_k)$, en la somme directe de sous-espaces,

$$(8) \quad L_{\delta, \mathcal{X}_0}^2 = \{\xi \in L_\delta^2(C_k); \xi(a^{-1}g) = \mathcal{X}_0(a)\xi(g) \quad \forall g \in C_k, a \in C_{k,1}\}$$

et,

$$(9) \quad L_{-\delta, \mathcal{X}_0}^2 = \{\xi \in L_{-\delta}^2(C_k); \xi(ag) = \mathcal{X}_0(a)\xi(g) \quad \forall g \in C_k, a \in C_{k,1}\}$$

qui correspondent aux projections $P_{\mathcal{X}_0} = \int \overline{\mathcal{X}_0}(a) V(a) d_1 a$ pour L_δ^2 et $P_{\mathcal{X}_0}^t = \int \overline{\mathcal{X}_0}(a) V(a)^t d_1 a$ pour l'espace dual $L_{-\delta}^2$.

Dans (9), nous utilisons la formule

$$(10) \quad (V(g)^t \eta)(x) = \eta(gx)$$

qui découle de la définition de la transposée, $\langle V(g)\xi, \eta \rangle = \langle \xi, V(g)^t \eta \rangle$ en utilisant

$$\int \xi(g^{-1}x) \eta(x) d^*x = \int \xi(y) \eta(gy) d^*y$$

Dans ces formules, on utilise seulement le caractère \mathcal{X}_0 comme un caractère du sous-groupe compact $C_{k,1}$ de C_k . Maintenant, choisissons, non canoniquement, une extension $\tilde{\mathcal{X}}_0$ de \mathcal{X}_0 comme caractère de C_k

$$(11) \quad \tilde{\mathcal{X}}_0(g) = \mathcal{X}_0(g) \quad \forall g \in C_{k,1}.$$

Ce choix n'est pas unique mais deux telles extensions diffèrent par un caractère qui est principal, i.e. de la forme : $g \rightarrow |g|^{is_0}$, $s_0 \in \mathbb{R}$.

Fixons une factorisation $C_k = C_{k,1} \times \mathbb{R}_+^*$, et définissons $\tilde{\mathcal{X}}_0$ comme étant égal à 1 sur \mathbb{R}_+^* .

Nous écrivons alors n'importe quel élément de $L_{-\delta, \mathcal{X}_0}^2(C_k)$ sous la forme

$$(12) \quad g \in C_k \rightarrow \eta(g) = \tilde{\mathcal{X}}_0(g) \psi(|g|)$$

où

$$(13) \quad \int |\psi(|g|)|^2 (1 + (\log |g|)^2)^{-\delta/2} d^*g < \infty$$

Ce vecteur est dans l'orthogonal de $\text{Im } E$ ssi

$$(14) \quad \int E(f)(x) \tilde{\mathcal{X}}_0(x) \psi(|x|) d^*x = 0 \quad \forall f \in \mathcal{S}(A)_0.$$

Nous procédons d'abord de manière formelle et écrivons $\psi(|x|) = \int \hat{\psi}(t) |x|^{it} dt$ de manière à ce que le côté gauche de (14) devienne

$$(15) \quad \int \int E(f)(x) \tilde{\mathcal{X}}_0(x) |x|^{it} \hat{\psi}(t) d^*x dt = \int \Delta_{1/2+it}(f) \hat{\psi}(t) dt$$

(en utilisant les notations des lemmes 1 et 3).

Justifions cette manipulation formelle ; puisque nous travaillons avec l'orthogonal de l'espace invariant, nous pouvons assumer que

$$(16) \quad V^t(h) \eta = \eta,$$

pour un h tel que \hat{h} est à support compact. Nous pouvons effectivement utiliser le lemme 5 pour ne considérer que les vecteurs qui appartiennent à l'image de

$$V^t(h) = \int h(g) V(g)^t d^*g, \quad \hat{h} \text{ à support compact.}$$

Alors, en utilisant (16), la transformée de Fourier de la distribution tempérée ψ sur \mathbb{R}_+^* est à support compact dans \mathbb{R} .

Puisque $E(f)(x)$ est à décroissance rapide, l'égalité entre (14) et (15) découle de la définition de la transformée de Fourier de la distribution tempérée ψ sur \mathbb{R}_+^* .

Décrivons maintenant les fonctions test qui conviennent $f \in \mathcal{S}(A)_0$ de façon à tester la distribution,

$$(17) \quad \int \Delta_{\frac{1}{2}+it} \widehat{\psi}(t) dt$$

Nous traitons le cas en caractéristique 0, le cas général est similaire. Pour les places finies, nous prenons,

$$(18) \quad f_0 = \bigotimes_{v \notin P} 1_{R_v} \otimes f_{\mathcal{X}_0}$$

où $f_{\mathcal{X}_0}$ est le produit tensoriel sur les places ramifiées des fonctions nulles en dehors de R_v^* et en $\overline{\mathcal{X}}_{0,v}$ sur R_v^* . Il découle de la définition de Δ'_s que,

$$(19) \quad \langle \Delta'_s, f_0 \otimes f \rangle = \int f(x) \mathcal{X}_{0,\infty}(x) |x|^s d^*x$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(A_\infty)$.

De plus, si l'ensemble P des places ramifiées finies n'est pas vide, on a,

$$(20) \quad f_0(0) = 0, \quad \int_{A_f} f_0(x) dx = 0$$

de telle sorte que $f_0 \otimes f \in \mathcal{S}(A)_0 \quad \forall f \in \mathcal{S}(A_\infty)$.

Maintenant, soit ℓ le nombre de places infinies de k et considérons l'application $\rho : (\mathbb{R}_+^*)^\ell \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ donnée par

$$(21) \quad \rho(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = \lambda_1 \dots \lambda_\ell.$$

Dès que $\ell > 1$, cette application est non propre. Étant donnée une fonction lisse à support compact, $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, nous avons besoin de trouver $a \in C_c^\infty((\mathbb{R}_+^*)^\ell)$ telle que l'image directe de la mesure $a(x) d^*x$ est $b(y) d^*y$ où $d^*x = \prod d^*x_i$ est le produit des mesures de Haar multiplicatives.

On traite de manière équivalente un espace vectoriel de dimension finie E et une forme linéaire $L : E \rightarrow \mathbb{R}$. $b \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ est donné et on doit le relever. On peut écrire $E = \mathbb{R} \times E_1$ et le relèvement peut être pris comme $a = b \otimes b_1$ où $b_1 \in C_c^\infty(E_1)$, $\int b_1 dx = 1$.

Ainsi, nous pouvons dans (19) prendre une fonction f de la forme,

$$(22) \quad f(x) = g(x) \overline{\mathcal{X}}_{0,\infty}(x)$$

où la fonction $g \in C_c^\infty(A_\infty)$ dépend seulement de $(|x|_v)$, $v \in S_\infty$ et est lisse à support compact, disjointe de l'ensemble fermé

$$\left\{ x \in \prod_{v \in S_\infty} k_v; \exists v, x_v = 0 \right\}.$$

Ainsi, à toute fonction $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, nous pouvons assigner une fonction test $f = f_b$ telle que pour tout s ($\text{Re } s > 0$)

$$(23) \quad \langle \Delta'_s, f_0 \otimes f_b \rangle = \int_{\mathbb{R}_+^*} b(x) |x|^s d^*x.$$

Par le lemme 3, on obtient,

$$\begin{aligned} \left\langle \int \Delta_{\frac{1}{2}+it} \widehat{\psi}(t) dt, f_0 \otimes f_b \right\rangle &= \left\langle \int L(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2} + it) \Delta'_{\frac{1}{2}+it} \widehat{\psi}(t) dt, f_0 \otimes f_b \right\rangle \\ &= \int \int L(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2} + it) \widehat{\psi}(t) b(x) |x|^{\frac{1}{2}+it} d^*x dt. \end{aligned}$$

Ainsi, de (14) et (15), on conclut, en utilisant des fonctions test arbitraires b que la transformée de Fourier de la distribution $L(\mathcal{X}_0, 1/2 + it) \widehat{\psi}(t)$ s'évanouit vraiment,

$$(24) \quad L(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2} + it) \widehat{\psi}(t) = 0$$

Pour justifier l'égalité ci-dessus, nous avons besoin de contrôler la croissance de la fonction L en la variable t . On a,

$$(25) \quad |L(\frac{1}{2} + it)| = O(|t|^N).$$

En particulier, puisque $L(\frac{1}{2} + it)$ est une fonction analytique de t , nous voyons que c'est un multiplicateur de l'algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions de Schwartz en la variable t . Ainsi, le produit $L(\frac{1}{2} + it) \widehat{\psi}(t)$ est encore une distribution tempérée, ainsi que sa transformée de Fourier. Dire que cette dernière s'évanouit quand on la teste sur des fonctions arbitraires qui sont lisses à support compact implique qu'elle s'évanouisse.

L'argument ci-dessus utilise l'hypothèse $\mathcal{X}_0/C_{k,1} \neq 1$.

Dans le cas $\mathcal{X}_0/C_{k,1} = 1$, nous avons besoin d'imposer à la fonction test f utilisée dans (22) la condition $\int f dx = 0$ qui signifie que

$$(26) \quad \int b(x) |x| d^*x = 0.$$

Mais l'espace des fonctions $b(x) |x|^{1/2} \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ telles que (26) est vérifiée est toujours dense dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)$.

Pour comprendre l'équation (24), considérons une équation pour les distributions $\alpha(t)$ de la forme

$$(27) \quad \varphi(t) \alpha(t) = 0$$

où l'on travaille d'abord avec des distributions α sur S^1 et où l'on assume que $\varphi \in C^\infty(S^1)$ a un nombre fini de zéros $x_i \in Z(\varphi)$, d'ordre fini n_i . Soit J l'idéal de $C^\infty(S^1)$ engendré par φ . On a $\psi \in J \Leftrightarrow$ l'ordre de ψ en x_i est $\geq n_i$.

Ainsi, les distributions $\delta_{x_i}, \delta'_{x_i}, \dots, \delta_{x_i}^{(n_i-1)}$ forment une base de l'espace des solutions de (27).

Maintenant, $\widehat{\psi}(t)$ est, pour η orthogonal à $\text{Im}(E)$ et satisfaisant (16), une distribution à support compact, et $L(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2} + it) \widehat{\psi}(t) = 0$. Ainsi, par l'argument ci-dessus, nous obtenons que $\widehat{\psi}$ est une combinaison linéaire finie des distributions,

$$(28) \quad \delta_t^{(k)}, L\left(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2} + it\right) = 0, \quad k < \text{ordre du zéro}, \quad k < \frac{\delta - 1}{2}.$$

La condition $k < \text{ordre du zéro}$ est nécessaire et suffisante pour obtenir l'évanouissement sur l'image de E . La condition $k < \frac{\delta-1}{2}$ est nécessaire et suffisante pour assurer que ψ appartient à $L^2_{-\delta}$, i.e. que

$$(29) \quad \int (\log |x|)^{2k} (1 + |\log |x||^2)^{-\delta/2} d^*x < \infty$$

qui est $2k + \delta < -1$, i.e. $k < \frac{\delta-1}{2}$.

Inversement, soit s un zéro de $L(\mathcal{X}_0, s)$ et $k > 0$ son ordre. Par le lemme 3 et par le fait que Δ'_s soit finie et analytique (pour $\text{Re } s > 0$), on obtient

$$(30) \quad \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^a \Delta_s(f) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{S}(A)_0, \quad a = 0, 1, \dots, k-1.$$

On peut alors différencier l'égalité du lemme 3 et obtenir,

$$(31) \quad \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^a \Delta_s(f) = \int_{C_k} E(f)(x) \mathcal{X}_0(x) |x|^{s-1/2} (\log |x|)^a d^*x.$$

Ainsi, η appartient à l'orthogonal de $\text{Im}(E)$ et satisfait (16) ssi c'est une combinaison linéaire de fonctions de la forme,

$$(32) \quad \eta_{t,a}(x) = \mathcal{X}_0(x) |x|^{it} (\log |x|)^a,$$

où,

$$(33) \quad L\left(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2} + it\right) = 0, \quad a < \text{ordre du zéro}, \quad a < \frac{\delta-1}{2}.$$

La restriction au sous-groupe \mathbb{R}_+^* de C_k de la transposée de W est ainsi donnée dans la base ci-dessus par :

$$(34) \quad W(\lambda)^t \eta_{t,a} = \sum_{b=0}^a C_a^b \lambda^{it} (\log \lambda)^b \eta_{t,a-b}.$$

L'opérateur de multiplication par une fonction à dérivées bornées est un opérateur borné dans n'importe quel espace de Sobolev ; ainsi, on peut vérifier directement, en utilisant la densité dans l'orthogonal de $\text{Im}(E)$ des vecteurs satisfaisant (16), que si $L(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2} + is) \neq 0$ alors is n'appartient pas au spectre de $D_{\mathcal{X}_0}^t$.

Cela détermine le spectre de l'opérateur $D_{\mathcal{X}_0}^t$ et par conséquent celui de son transposé $D_{\mathcal{X}_0}$ comme indiqué dans le Théorème 1 et cela termine la preuve du théorème 1.

Prouvons maintenant le corollaire. Fixons $h_0 \in \mathcal{S}(C_k)$ de telle façon que \widehat{h}_0 a son support compact contenu dans $\{\mathcal{X}_0\} \times \mathbb{R}$ et $\widehat{h}_0(\mathcal{X}_0, s) = 1$ pour s petit.

Prenons alors h_s donné par $h_s(g) = h_0(g) |g|^{is}$. La transformée de Fourier \widehat{h}_s est alors le translaté de \widehat{h}_0 , et on peut choisir h_0 de telle façon que,

$$(35) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{h}_n(\mathcal{X}_0, u) = 1, \quad u \in \mathbb{R}$$

Quand $|s| \rightarrow \infty$, la dimension de l'image de $W^t(h_s)$ est de l'ordre de $\log |s|$ comme l'est le nombre de zéros de la fonction L dans le translaté d'un intervalle donné (cf. [W3]).

Choisissons $h \in \mathcal{S}(C_k)$. On a $W^t(h) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} W^t(h * h_n)$.

Il suit de là, de la croissance polynomiale de la norme $W^t(g)$, que l'opérateur

$$(36) \quad \int h(g) W(g)^t d^*g$$

est de classe trace pour tout $h \in \mathcal{S}(C_k)$.

De plus, en utilisant la forme triangulaire donnée par (34), nous obtenons sa trace, et par conséquent la trace de son transposé $W(h)$ comme,

$$(37) \quad \text{Trace } W(h) = \sum_{\substack{L(\mathcal{X}, \frac{1}{2} + \rho) = 0 \\ \rho \in i\mathbb{R}}} \widehat{h}(\mathcal{X}, \rho)$$

où la multiplicité est comptée comme dans le Théorème 1 et où la transformée de Fourier \widehat{h} de h est définie par,

$$(38) \quad \widehat{h}(\mathcal{X}, \rho) = \int_{C_k} h(u) \widetilde{\mathcal{X}}(u) |u|^\rho d^*u.$$

Appendice II. Formules explicites.

Rappelons d'abord les formules explicites de Weil ([W3]). Soit k un corps global. On identifie le quotient $C_k/C_{k,1}$ avec l'image du module,

$$(1) \quad N = \{|g|; g \in C_k\} \subset \mathbb{R}_+^*.$$

On munit N de sa mesure de Haar normalisée d^*x . Étant donnée une fonction F sur N telle que, pour $b > \frac{1}{2}$,

$$(2) \quad |F(\nu)| = 0(\nu^b) \quad \nu \rightarrow 0, \quad |F(\nu)| = 0(\nu^{-b}), \quad \nu \rightarrow \infty,$$

on définit,

$$(3) \quad \Phi(s) = \int_N F(\nu) \nu^{1/2-s} d^*\nu.$$

Étant donné un Grössencharakter \mathcal{X} , i.e. un caractère de C_k , et quel que soit ρ dans la bande $0 < \text{Re}(\rho) < 1$, appelons $N(\mathcal{X}, \rho)$ l'ordre de $L(\mathcal{X}, s)$ en $s = \rho$. Soit,

$$(4) \quad S(\mathcal{X}, F) = \sum_{\rho} N(\mathcal{X}, \rho) \Phi(\rho)$$

où la somme est prise sur les ρ de la bande ouverte ci-dessus. On définit alors une distribution Δ sur C_k par,

$$(5) \quad \Delta = \log |d^{-1}| \delta_1 + D - \sum_v D_v,$$

où δ_1 est la masse de Dirac en $1 \in C_k$, où d est l'idèle différentielle de k de telle façon que $|d|^{-1}$ est au signe près le discriminant de k quand $\text{carac}(k) = 0$ et vaut q^{2g-2} quand k est un corps de fonctions sur une courbe de genre g avec ses coefficients dans le corps fini \mathbb{F}_q .

La distribution D est donnée par,

$$(6) \quad D(f) = \int_{C_k} f(w) (|w|^{1/2} + |w|^{-1/2}) d^*w$$

où la mesure de Haar d^*w est normalisée (cf. IIb). Les distributions D_v sont paramétrées par les places v de k et s'obtiennent comme suit. Pour chaque v , on considère l'homomorphisme propre naturel,

$$(7) \quad k_v^* \rightarrow C_k, \quad x \rightarrow \text{classe de } (1, \dots, x, 1 \dots)$$

du groupe multiplicatif du corps local k_v dans le groupe des classes d'idèles C_k .

On a alors,

$$(8) \quad D_v(f) = Pfw \int_{k_v^*} \frac{f(u)}{|1-u|} |u|^{1/2} d^*u$$

où la mesure de Haar d^*u est normalisée (cf. IIb), et où la valeur principale de Weil Pfw de l'intégrale s'obtient comme suit, pour un corps local $K = k_v$,

$$(9) \quad Pfw \int_{k_v^*} 1_{R_v^*} \frac{1}{|1-u|} d^*u = 0,$$

si le corps local k_v est non archimédien, et sinon :

$$(10) \quad Pfw \int_{k_v^*} \varphi(u) d^*u = PF_0 \int_{\mathbb{R}_+^*} \psi(\nu) d^*\nu,$$

où $\psi(\nu) = \int_{|u|=\nu} \varphi(u) d_\nu u$ est obtenu en intégrant φ sur les fibres, tandis que

$$(11) \quad PF_0 \int \psi(\nu) d^*\nu = 2 \log 2\pi c + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int (1 - f_0^{2t}) \psi(\nu) d^*\nu - 2c \log t \right),$$

où l'on suppose que $\psi - c f_1^{-1}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* , et

$$f_0(\nu) = \inf(\nu^{1/2}, \nu^{-1/2}) \quad \forall \nu \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_1 = f_0^{-1} - f_0.$$

La formule explicite de Weil est alors,

Théorème 1. ([W]) *Avec les notations ci-dessus, on a $S(\mathcal{X}, F) = \Delta(F(|w|)) \mathcal{X}(w)$.*

Nous allons maintenant travailler sur cette formule et en particulier, comparer les valeurs principales Pfw avec celles du théorème V.3.

Effectuons le changement de variables suivant,

$$(12) \quad |g|^{-1/2} h(g^{-1}) = F(|g|) \mathcal{X}_0(g),$$

et réécrivons l'égalité ci-dessus en fonction de h .

Par (3), on a,

$$(13) \quad \Phi\left(\frac{1}{2} + is\right) = \int_{C_k} F(|g|) |g|^{-is} d^*g,$$

Ainsi, en fonction de h ,

$$(14) \quad \int h(g) \mathcal{X}_1(g) |g|^{1/2+is} d^*g = \int F(|g^{-1}|) \mathcal{X}_0(g^{-1}) \mathcal{X}_1(g) |g|^{is} d^*g,$$

qui est égal à 0 si $\mathcal{X}_1/C_{k,1} \neq \mathcal{X}_0/C_{k,1}$ et pour $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_0$,

$$(15) \quad \int h(g) \mathcal{X}_0(g) |g|^{1/2+is} d^*g = \Phi\left(\frac{1}{2} + is\right).$$

Ainsi, avec nos notations, nous voyons que,

$$(16) \quad \text{Supp } \widehat{h} \subset \mathcal{X}_0 \times \mathbb{R}, \quad \widehat{h}(\mathcal{X}_0, \rho) = \Phi(\rho).$$

Et alors, nous pouvons écrire,

$$(17) \quad S(\mathcal{X}_0, F) = \sum_{\substack{L(\mathcal{X}, \rho)=0, \\ 0 < \text{Re } \rho < 1}} \widehat{h}(\mathcal{X}, \rho)$$

en utilisant une décomposition fixe $C_k = C_{k,1} \times N$.

Evaluons maintenant chaque terme dans (5).

Le premier devient $(\log |d^{-1}|) h(1)$. On a, en utilisant (6) et (12),

$$\begin{aligned} \langle D, F(|g|) \mathcal{X}_0(g) \rangle &= \int_{C_k} |g|^{-1/2} h(g^{-1}) (|g|^{1/2} + |g|^{-1/2}) d^*g \\ &= \int_{C_k} h(u) (1 + |u|) d^*u = \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1), \end{aligned}$$

où, pour le caractère trivial de $C_{k,1}$ on utilise la notation

$$(18) \quad \widehat{h}(z) = \widehat{h}(1, z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ainsi, les deux premiers termes de (5) donnent

$$(19) \quad (\log |d^{-1}|) h(1) + \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1).$$

Soit v une place de k , on a par (8) et (12),

$$\langle D_v, F(|g|) \mathcal{X}_0(g) \rangle = Pfw \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u.$$

Nous pouvons alors écrire la contribution des derniers termes de (5) comme,

$$(20) \quad - \sum_v Pfw \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u.$$

Ainsi, l'égalité de Weil peut être réécrite en,

$$(21) \quad \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{\substack{L(\mathcal{X}, \rho)=0, \\ 0 < \operatorname{Re} \rho < 1}} \widehat{h}(\mathcal{X}, \rho) = (\log |d|) h(1) + \sum_v Pfw \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u.$$

qui est vérifiée maintenant pour des combinaisons linéaires de fonctions h de la forme (12).

Ceci est suffisant pour conclure quand $h(1) = 0$.

Comparons maintenant les valeurs principales de Weil, avec celles dictées par le théorème V.3. Nous travaillons d'abord avec un corps local K et comparons (9), (10) avec notre prescription. Supposons d'abord K non archimédien. Soit α un caractère de K tel que,

$$(22) \quad \alpha/R = 1, \quad \alpha/\pi^{-1}R \neq 1.$$

Alors, pour la transformée de Fourier donnée par,

$$(23) \quad (Ff)(x) = \int f(y) \alpha(y) dy,$$

avec dy la mesure auto-duale de Haar, on a

$$(24) \quad F(1_R) = 1_R.$$

Lemme 2. *Avec le choix ci-dessus de α , on a*

$$\int' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u = Pfw \int \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u$$

avec les notations du théorème 3.

Preuve. Par construction, les deux côtés peuvent seulement différer par un multiple de $h(1)$. Rappelons du théorème 3 que le côté gauche est donné par

$$(25) \quad \left\langle L, \frac{h(u^{-1})}{|u|} \right\rangle,$$

où L est l'unique extension de $\rho^{-1} \frac{du}{|1-u|}$ dont la transformée de Fourier s'évanouit en 1, $\widehat{L}(1) = 0$. Ainsi, de (9), nous devons seulement vérifier que (25) s'évanouit pour $h = 1_{R^*}$, i.e. que

$$(26) \quad \langle L, 1_{R^*} \rangle = 0.$$

De façon équivalente, si l'on pose $Y = \{y \in K; |y-1| = 1\}$, on a juste à montrer, en utilisant Parseval, que,

$$(27) \quad \langle \log |u|, \widehat{1}_Y \rangle = 0.$$

On a $\widehat{1}_Y(x) = \int_Y \alpha(xy) dy = \alpha(x) \widehat{1}_{R^*}(x)$, et $1_{R^*} = 1_R - 1_P$, $\widehat{1}_{R^*} = 1_R - |\pi| 1_{\pi^{-1}R}$, ainsi, avec $q^{-1} = |\pi|$,

$$(28) \quad \widehat{1}_Y(x) = \alpha(x) \left(1_R - \frac{1}{q} 1_{\pi^{-1}R} \right) (x).$$

Nous devons maintenant calculer $\int \log |x| \widehat{1}_Y(x) dx = A + B$,

$$(29) \quad A = -\frac{1}{q} \int_{\pi^{-1}R^*} \alpha(x) (\log q) dx, \quad B = \left(1 - \frac{1}{q} \right) \int_R \log |x| dx.$$

Montrons que $A + B = 0$. On a $\int_R dx = 1$, et

$$\begin{aligned} A &= - \int_{R^*} \alpha(\pi^{-1}y) (\log q) dy = -\log q \left(\int_R \alpha(\pi^{-1}y) dy - \int_P dy \right) \\ &= \frac{1}{q} \log q, \text{ puisque } \int_R \alpha(\pi^{-1}y) dy = 0 \text{ lorsque } \alpha/\pi^{-1}R \neq 1. \end{aligned}$$

Pour calculer B , il convient de noter que $\int_{\pi^n R^*} dy = q^{-n} \left(1 - \frac{1}{q} \right)$ de telle manière que

$$B = \left(1 - \frac{1}{q} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-n \log q) q^{-n} = -q^{-1} \log q.$$

et $A + B = 0$. ■

Traisons maintenant le cas des corps archimédiens. On prend d'abord $K = \mathbb{R}$, et on normalise la transformée de Fourier comme,

$$(30) \quad (Ff)(x) = \int f(y) e^{-2\pi ixy} dy$$

de telle façon que la mesure de Haar dx soit auto-duale.

Avec les notations de (10), on a,

$$(31) \quad Pfw \int_{\mathbb{R}^*} f_0^3(|u|) \frac{|u|^{1/2}}{|1-u|} d^*u = \log \pi + \gamma$$

où γ est la constante d'Euler, $\gamma = -\Gamma'(1)$. Par conséquent, l'intégration sur les fibres donne $f_0^4 \times (1 - f_0^4)^{-1}$, et on obtient,

$$\begin{aligned} PF_0 \int_{\mathbb{R}_+^*} f_0^4 \times (1 - f_0^4)^{-1} d^*u &= \left(\log 2\pi + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} (1 - f_0^{2t}) f_0^4 (1 - f_0^4)^{-1} d^*u - \log t \right) \right) \\ &= \log 2\pi + \gamma - \log 2. \end{aligned}$$

Maintenant, soit $\varphi(u) = -\log |u|$, c'est une distribution tempérée sur \mathbb{R} et on a,

$$(32) \quad \langle \varphi, e^{-\pi u^2} \rangle = \frac{1}{2} \log \pi + \frac{\gamma}{2} + \log 2,$$

puisque'on obtient que $\frac{\partial}{\partial s} \int |u|^{-s} e^{-\pi u^2} du = \frac{\partial}{\partial s} \left(\pi^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \right)$ évalué en $s = 0$, en utilisant que $\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -\gamma - 2 \log 2$.

Alors, par la formule de Parseval, on a,

$$(33) \quad \langle \widehat{\varphi}, e^{-\pi x^2} \rangle = \frac{1}{2} \log \pi + \frac{\gamma}{2} + \log 2,$$

qui donne, pour toute fonction test f ,

$$(34) \quad \langle \widehat{\varphi}, f \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} f(x) d^*x + (\log \varepsilon) f(0) \right) + \lambda f(0)$$

où $\lambda = \log 2\pi + \gamma$. Dans le but d'obtenir (34), on utilise l'égalité,

$$(35) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} f(x) d^*x + (\log \varepsilon) f(0) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int f(x) |x|^\varepsilon d^*x - \frac{1}{\varepsilon} f(0) \right),$$

qui est vérifiée puisque les deux côtés s'évanouissent pour $f(x) = 1$ et pour $|x| \leq 1$, $f(x) = 0$ sinon.

Ainsi, de (34), on obtient,

$$(36) \quad \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{1}{|1-u|} d^*u = \lambda f(1) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|1-u| \geq \varepsilon} \frac{f(u)}{|1-u|} d^*u + (\log \varepsilon) f(1) \right).$$

En prenant $f(u) = |u|^{1/2} f_0^3(|u|)$, le côté droit de (36) donne $\lambda - \log 2 = \log \pi + \gamma$, et ainsi, nous pouvons conclure en utilisant (31) que, pour toute fonction test f ,

$$(37) \quad \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{1}{|1-u|} d^*u = Pfw \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{1}{|1-u|} d^*u.$$

Considérons finalement le cas $K = \mathbb{C}$. Nous choisissons le caractère de base α comme

$$(38) \quad \alpha(z) = \exp 2\pi i(z + \bar{z}),$$

la mesure de Haar auto-duale est $dz d\bar{z} = |dz \wedge d\bar{z}|$, et la fonction $f(z) = \exp -2\pi|z|^2$ est auto-duale.

La mesure de Haar multiplicative normalisée est :

$$(39) \quad d^*z = \frac{|dz \wedge d\bar{z}|}{2\pi|z|^2}.$$

Calculons la transformée de Fourier de la distribution

$$(40) \quad \varphi(z) = -\log |z|_{\mathbb{C}} = -2 \log |z|.$$

On a

$$(41) \quad \langle \varphi, \exp -2\pi|z|^2 \rangle = \log 2\pi + \gamma,$$

comme on le voit en utilisant $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\int e^{-2\pi|z|^2} |z|^{-2\varepsilon} |dz \wedge d\bar{z}| \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} ((2\pi)^\varepsilon \Gamma(1 - \varepsilon))$.

Ainsi, $\langle \widehat{\varphi}, \exp -2\pi|u|^2 \rangle = \log 2\pi + \gamma$ et l'on obtient,

$$(42) \quad \langle \widehat{\varphi}, f \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|u|_{\mathbb{C}} \geq \varepsilon} f(u) d^*u + \log \varepsilon f(0) \right) + \lambda' f(0)$$

où $\lambda' = 2(\log 2\pi + \gamma)$.

Pour voir cela, on utilise l'analogie de (35) pour $K = \mathbb{C}$, pour calculer le côté droit de (42) pour $f(z) = \exp -2\pi|z|^2$.

Ainsi, pour toute fonction test f , on a,

$$(43) \quad \int_{\mathbb{C}}' f(u) \frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u = \lambda' f(1) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|1-u|_{\mathbb{C}} \geq \varepsilon} \frac{f(u)}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u + (\log \varepsilon) f(1) \right).$$

Comparons cela à Pfw . Quand on intègre sur les fibres de $\mathbb{C}^* \xrightarrow{|\cdot|_{\mathbb{C}}} \mathbb{R}_+^*$ la fonction $|1-z|_{\mathbb{C}}^{-1}$, on obtient,

$$(44) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-e^{i\theta}z|^2} d\theta = \frac{1}{1-|z|^2} \text{ si } |z| < 1, \text{ et } \frac{1}{|z|^2-1} \text{ si } |z| > 1.$$

Ainsi, pour toute fonction test f sur \mathbb{R}_+^* , on a, par (10),

$$(45) \quad Pfw \int f(|u|_{\mathbb{C}}) \frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u = PF_0 \int f(\nu) \frac{1}{|1-\nu|} d^*\nu$$

avec les notations de (11). Avec $f_2(\nu) = \nu^{\frac{1}{2}} f_0(\nu)$, on obtient alors, en utilisant (11),

$$(46) \quad Pfw \int f_2(|u|_{\mathbb{C}}) \frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u = PF_0 \int f_0 f_1^{-1} d^*\nu = 2(\log 2\pi + \gamma).$$

Nous allons maintenant montrer que,

$$(47) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|1-u|_{\mathbb{C}} \geq \varepsilon} \frac{f_2(|u|_{\mathbb{C}})}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u + \log \varepsilon \right) = 0,$$

d'où il découlera que, en utilisant (43),

$$(48) \quad \int_{\mathbb{C}}' f(u) \frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u = Pfw \int f(u) \frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u.$$

Pour prouver (47), il suffit d'évaluer l'intégrale,

$$(49) \quad \int_{|z| \leq 1, |1-z| \geq \varepsilon} ((1-z)(1-\bar{z}))^{-1} |dz \wedge d\bar{z}| = j(\varepsilon)$$

et de montrer que $j(\varepsilon) = \alpha \log \varepsilon + o(1)$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$. Un énoncé similaire est alors vérifié

$$\int_{|z| \leq 1, |1-z^{-1}| \geq \varepsilon} ((1-z)(1-\bar{z}))^{-1} |dz \wedge d\bar{z}|.$$

On a $j(\varepsilon) = \int_D |dZ \wedge d\bar{Z}|$, où $Z = \log 1-z$ et le domaine D est contenu dans le rectangle,

$$(50) \quad \{Z = (x+iy); \log \varepsilon \leq x \leq \log 2, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2\} = R_\varepsilon$$

et borné par la courbe $x = \log 2 \cos y$ qui vient de l'équation du cercle $|z| = 1$ en coordonnées polaires centrées en $z = 1$. On obtient alors,

$$(51) \quad j(\varepsilon) = 4 \int_{\log \varepsilon}^{\log 2} \text{Arc cos}(e^x/2) dx,$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on a $j(\varepsilon) \sim 2\pi \log 1/\varepsilon$, qui est l'aire du rectangle suivant (selon la mesure $|dz \wedge d\bar{z}|$),

$$(52) \quad \{Z = (x + iy); \log \varepsilon \leq x \leq 0, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2\}$$

on a $|R_\varepsilon| - 2\pi \log 2 = 2\pi \log 1/\varepsilon$. Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, l'aire de $R_\varepsilon \setminus D$ converge vers

$$(53) \quad 4 \int_{-\infty}^{\log 2} \text{Arc sin}(e^x/2) dx = -4 \int_0^{\pi/2} \log \sin u du = 2\pi \log 2,$$

de telle façon que $j(\varepsilon) = 2\pi \log 1/\varepsilon + o(1)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ainsi, nous pouvons affirmer qu'avec le choix ci-dessus des caractères de base pour les corps locaux, on a, pour toute fonction test f ,

$$(54) \quad \int_K f(u) \frac{1}{|1-u|} d^*u = Pfw \int f(u) \frac{1}{|1-u|} d^*u.$$

Lemme 3. Soit K un corps local, α_0 un caractère normalisé comme ci-dessus et α , $\alpha(x) = \alpha_0(\lambda x)$ un caractère arbitraire de K . Soit f' définie comme dans le théorème V.3 relative à α , alors, pour toute fonction test f ,

$$\int_K f(u) \frac{1}{|1-u|} d^*u = \log |\lambda| f(1) + Pfw \int f(u) \frac{1}{|1-u|} d^*u.$$

Preuve. La nouvelle mesure de Haar auto-duale est

$$(55) \quad da = |\lambda|^{1/2} d_0 a$$

avec $d_0 a$ auto-duale pour α_0 .

De façon similaire, la nouvelle transformée de Fourier est donnée par

$$\widehat{f}(x) = \int \alpha(xy) f(y) dy = \int \alpha_0(\lambda xy) f(y) |\lambda|^{1/2} d_0 y,$$

ainsi

$$(56) \quad \widehat{f}(x) = |\lambda|^{1/2} \widehat{f^0}(\lambda x).$$

Soit alors $\varphi(u) = -\log |u|$. Sa transformée de Fourier comme distribution est donnée par,

$$(57) \quad \langle \widehat{\varphi}, f \rangle = \int (-\log |u|) \widehat{f}(u) du.$$

On a

$$\begin{aligned} \int (-\log |u|) \widehat{f}(u) du &= \int (-\log |u|) \widehat{f^0}(\lambda u) |\lambda| d_0 u \\ &= \int (-\log |v|) \widehat{f^0}(v) d_0 v + \int \log |\lambda| \widehat{f^0}(v) d_0 v \\ &= \int (-\log |v|) \widehat{f^0}(v) d_0 v + \log |\lambda| f(0). \end{aligned}$$

Ainsi, le lemme découle de (54). ■

Passons maintenant au cas global, rappelons que si α , $\alpha \neq 1$, est un caractère de A tel que $\alpha/k = 1$, il existe une idèle différentielle $d = (d_v)$ telle que (cf. [W1]),

$$(58) \quad \alpha_v(x) = \alpha_{0,v}(d_v x)$$

où $\alpha = \prod \alpha_v$ et où chaque caractère $\alpha_{0,v}$ est normalisé comme ci-dessus.

Nous pouvons alors réécrire la formule de Weil (théorème 1) comme,

Théorème 6. *Soit k un corps global, α un caractère non-trivial de A/k et $\alpha = \prod \alpha_v$ ses facteurs locaux.*

Soit $h \in \mathcal{S}(C_k)$ à support compact, alors

$$\widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{\substack{L(\mathcal{X}, \rho) = 0 \\ 0 < \operatorname{Re} \rho < 1}} \widehat{h}(\mathcal{X}, \rho) = \sum_v \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u$$

où la normalisation de \int' est donnée par α_v comme dans le théorème V.3, et $\widehat{h}(\mathcal{X}, z) = \int h(u) \mathcal{X}(u) |u|^z d^*u$.

Preuve. Cela découle de la formule (21), lemme 3 et de l'égalité $\log |d| = \sum_v \log |d_v|$. ■

Normalisation de la mesure de Haar sur le groupe modulé

Soit G un groupe abélien localement compact avec un morphisme propre,

$$(1) \quad g \rightarrow |g|, \quad G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

dont l'image est cocompacte dans \mathbb{R}_+^* .

Il existe une unique mesure de Haar d^*g sur G telle que

$$(2) \quad \int_{|g| \in [1, \Lambda]} d^*g \sim \log \Lambda \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow +\infty.$$

Soit $G_0 = \operatorname{Ker} \operatorname{mod} = \{g \in G; |g| = 1\}$. C'est un groupe compact par hypothèse, et l'on peut identifier G/G_0 avec l'image N du module. Déterminons la mesure d^*n sur $N \subset \mathbb{R}_+^*$ telle que (2) soit vérifiée pour

$$(3) \quad \int f d^*g = \int \left(\int f(n g_0) d g_0 \right) d^*n$$

où la mesure de Haar $d g_0$ est normalisée par

$$(4) \quad \int_{G_0} d g_0 = 1.$$

Soit ρ_Λ la fonction sur G définie par

$$(5) \quad \rho_\Lambda(g) = 0 \quad \text{si } |g| \notin [1, \Lambda], \quad \rho_\Lambda(g) = \frac{1}{\log \Lambda} \quad \text{si } g \in [1, \Lambda].$$

La normalisation (2) signifie que $\int \rho_\Lambda d^*g \rightarrow 1$ quand $\Lambda \rightarrow \infty$.

Posons d'abord $N = \mathbb{R}_+^*$; alors l'unique mesure satisfaisant (2) est

$$(6) \quad d^*\lambda = \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Posons alors $N = \mu^{\mathbb{Z}}$ pour un certain $\mu > 1$. Considérons la mesure

$$(7) \quad \int f d^*g = \alpha \sum f(\mu^n).$$

On prend $f = \rho_\Lambda$, alors, le côté droit est $\alpha \frac{N}{\log \Lambda}$ où N est le nombre de $\mu^n \in [1, \Lambda]$, i.e. $\sim \frac{\log \Lambda}{\log \mu}$. Cela montre que (2) est vérifiée ssi

$$(8) \quad \alpha = \log \mu.$$

Montrons plus généralement que si $H \subset G$ est un sous-groupe compact de G et si à la fois d^*g et d^*h sont normalisées par (2), on a

$$(9) \quad \int \left(\int f(hy) d^*h \right) d_0 y = \int f d^*g$$

où $d_0 y$ est la mesure de Haar de l'intégrale 1 sur G/H ,

$$(10) \quad \int_{G/H} d_0 y = 1.$$

Le côté gauche de (9) définit une mesure de Haar sur G et il est juste nécessaire de montrer qu'il satisfait (2).

On a $\|\rho_\Lambda(\cdot y) - \rho_\Lambda\|_1 \rightarrow 0$ quand $\Lambda \rightarrow \infty$, et

$$(11) \quad \int \rho_\Lambda(hy) d^*h \rightarrow 1 \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty$$

uniformément sur les ensembles compacts de $y \in G$, ainsi

$$(12) \quad \int \left(\int \rho_\Lambda(hy) d^*h \right) d_0 y \rightarrow 1 \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty.$$

Appendice III. Formules de trace d'une distribution.

Dans cet appendice, nous rappelons pour le confort de la lectrice le traitement des distributions indépendantes des coordonnées de [GS] et donnons des détails pour les conditions de transversalité.

Étant donné un espace vectoriel E sur \mathbb{R} , $\dim E = n$, une densité est une application, $\rho \in |E|$,

$$(1) \quad \rho : \wedge^n E \rightarrow \mathbb{C}$$

telle que $\rho(\lambda v) = |\lambda| \rho(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \wedge^n E$.

Étant donnée une fonction linéaire $T : E \rightarrow F$, soit $|T| : |F| \rightarrow |E|$ l'application linéaire correspondante, elle dépend de façon contravariante de T .

Étant donnée une variété M et $\rho \in C_c^\infty(M, |TM|)$ sur une intégrale canonique,

$$(2) \quad \int \rho \in \mathbb{C}.$$

Étant donné un fibré vectoriel L sur M , on définit les sections généralisées sur M comme l'espace dual de $C_c^\infty(M, L^* \otimes |TM|)$

$$(3) \quad C^{-\infty}(M, L) = \text{dual de } C_c^\infty(M, L^* \otimes |TM|)$$

où L^* est le fibré dual. On a une inclusion naturelle,

$$(4) \quad C^\infty(M, L) \subset C^{-\infty}(M, L)$$

étant donné l'appariement,

$$(5) \quad \sigma \in C^\infty(M, L), \quad s \in C_c^\infty(M, L^* \otimes |TM|) \rightarrow \int \langle s, \sigma \rangle$$

où $\langle s, \sigma \rangle$ est vu comme une densité, $\langle s, \sigma \rangle \in C_c^\infty(M, |TM|)$.

On a la notion similaire de section généralisée sur les supports compacts.

Étant donnée une application lisse $\varphi : X \rightarrow Y$, alors si φ est *propre*, elle a une application (contravariante) associée :

$$(6) \quad \varphi^* : C_c^\infty(Y, L) \rightarrow C_c^\infty(X, \varphi^*(L)), \quad (\varphi^* \xi)(x) = \xi(\varphi(x))$$

où $\varphi^*(L)$ est le pullback du fibré vectoriel L .

Ainsi, étant donnée une forme linéaire sur $C_c^\infty(X, \varphi^*(L))$, on a une forme linéaire (covariante) associée sur $C_c^\infty(Y, L)$. En particulier, avec L trivial, on voit que si on a une densité généralisée $\rho \in C^{-\infty}(X, |T|)$, on a un pushforward

$$(7) \quad \varphi_*(\rho) \in C^{-\infty}(Y, |T|)$$

avec $\langle \varphi_*(\rho), \xi \rangle = \langle \rho, \varphi^* \xi \rangle \quad \forall \xi \in C_c^\infty(X)$.

Ensuite, si φ est une fibration et $\rho \in C_c^\infty(X, |T|)$ est une densité, alors, on peut intégrer ρ le long des fibres ; la densité obtenue sur Y , $\varphi_*(\rho)$ est donnée comme dans (7) par

$$(8) \quad \langle \varphi_*(\rho), f \rangle = \langle \rho, \varphi^* f \rangle \quad \forall f \in C^\infty(Y)$$

mais l'important est que ce n'est pas seulement une section généralisée mais également une section lisse $\varphi_*(\rho) \in C_c^\infty(Y, |T|)$.

Il suit de cela que si $f \in C^{-\infty}(Y)$ est une fonction généralisée, alors on obtient une fonction généralisée $\varphi^*(f)$ sur X par,

$$(9) \quad \langle \varphi^*(f), \rho \rangle = \langle f, \varphi_*(\rho) \rangle \quad \forall \rho \in C_c^\infty(X, |T|).$$

En général, le pullback $\varphi^*(f)$ continue d'avoir du sens tant que la condition de transversalité tient,

$$(10) \quad d(\varphi^*(l)) \neq 0 \quad \forall l \in WF(f).$$

où $WF(f)$ est l'ensemble des fronts d'onde de f ([GS]). Le point suivant est la construction de la section généralisée d'un fibré vectoriel L sur une variété X associée à une sous-variété $Z \subset X$ et un symbole,

$$(11) \quad \sigma \in C^\infty(Z, L \otimes |N_Z^*|).$$

où N_Z est le fibré normal de Z . La construction est la même que celle de l'intégration habituelle sur un cycle. Étant donné $\xi \in C_c^\infty(X, L^* \otimes |T|)$, le produit $\sigma \xi / Z$ est une densité sur Z , puisque c'est une section de $|T_Z| = |T_X| \otimes |N_Z^*|$. On peut alors l'intégrer sur Z . Quand $Z = X$, on a $N_Z^* = \{0\}$ et $|N_Z^*|$ a une section canonique, de telle manière que le courant associé à σ est juste donné par (5). Quand $Z = \text{pt}$ est un point singulier $x \in X$, une section généralisée de L donnée par une distribution de Dirac en x nécessite non seulement un vecteur $\xi_x \in L_x$ mais également une densité duale, i.e. un volume multi-vectoriel $v \in |T_x^*|$.

Maintenant, soit $\varphi : X \rightarrow Y$ avec Z une sous-variété de Y et σ comme dans (11).

Assumons que φ est transverse à Z , de telle sorte que pour tout $x \in X$ avec $y = \varphi(x) \in Z$, on ait

$$(12) \quad \varphi_*(T_x) + T_{\varphi(x)}(Z) = T_y Y.$$

Soit

$$(13) \quad \tau_x = \{X \in T_x, \varphi_*(X) \in T_y(Z)\}.$$

Alors, φ_* est un isomorphisme canonique,

$$(14) \quad \varphi_* : T_x(X) / \tau_x \simeq T_y(Y) / T_y(Z) = N_y(Z).$$

Et $\varphi^{-1}(Z)$ est une sous-variété de X de la même codimension que Z avec un isomorphisme naturel de fibrés normaux

$$(15) \quad N_{\varphi^{-1}(Z)} \simeq \varphi^* N_Z.$$

En particulier, si est donnée une δ -section généralisée d'un fibré L à support Z et un symbole $\sigma \in C^\infty(Z, L \otimes |N_Z^*|)$, on a le symbole correspondant sur $\varphi^{-1}(Z)$ qui est donné par

$$(16) \quad \varphi^* \sigma(x) = \sigma(\varphi(x)) \in (\varphi^* L)_x \otimes |N_x^*|$$

en utilisant l'isomorphisme (15) i.e. $N_x^* \simeq N_{\varphi(x)}^*$.

Maintenant, pour toute δ -section associée à Z, σ , l'ensemble des fronts d'onde est contenu dans le fibré conormal de la sous-variété Z , ce qui montre que si φ est transverse à Z , le pullback $\varphi^* \delta_{Z, \sigma}$

de la distribution sur Y associée à Z, σ fait sens, il est égal à $\delta_{\varphi^{-1}(Z), \varphi^*(\sigma)}$.

Formulons alors maintenant le théorème du noyau de Schwartz. On considère une application linéaire continue,

$$(17) \quad T : C_c^\infty(Y) \rightarrow C^{-\infty}(X),$$

l'énoncé du théorème peut s'écrire

$$(18) \quad (T\xi)(x) = \int k(x, y) \xi(y) dy$$

où $k(x, y) dy$ est une section généralisée,

$$(19) \quad k \in C^{-\infty}(X \times Y, \text{pr}_Y^*(|T|)).$$

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application lisse, et $T = f^*$ l'opérateur

$$(20) \quad (T\xi)(x) = \xi(f(x)) \quad \forall \xi \in C_c^\infty(Y).$$

Montrons que le k correspondant est la δ -section associée à la sous-variété de $X \times Y$ donnée par

$$(21) \quad \text{Graphe}(f) = \{(x, f(x)) ; x \in X\} = Z$$

et identifions son symbole, $\sigma \in C^\infty(Z, \text{pr}_Y^*(|T|) \otimes |N_Z^*|)$.

Étant donné $\xi \in T_x^*(X)$, $\eta \in T_y^*(Y)$, on a $(\xi, \eta) \in N_Z^*$ ssi il est orthogonal à (v, f_*v) pour tout $v \in T_x(X)$, i.e. $\langle v, \xi \rangle + \langle f_*v, \eta \rangle = 0$ de telle façon que

$$(22) \quad \xi = -f_*^t \eta.$$

Ainsi, on a un isomorphisme canonique $j : T_y^*(Y) \simeq N_Z^*$, $\eta \xrightarrow{j} (-f_*^t \eta, \eta)$. La transposée $(j^{-1})^t$ est donnée par $(j^{-1})^t(Y) = \text{classe de } (0, Y) \text{ dans } N_Z, \forall Y \in T_y(Y)$. Ainsi, on a le choix canonique pour le symbole σ ,

$$(23) \quad \sigma = |j^{-1}| \in C^\infty(Z, \text{pr}_Y^*(|T|) \otimes |N_Z^*|).$$

On note la δ -distribution correspondante par

$$(24) \quad k(x, y) dy = \delta(y - f(x)) dy.$$

On vérifie alors la formule,

$$(25) \quad \int \delta(y - f(x)) \xi(y) dy = \xi(f(x)) \quad \forall \xi \in C_c^\infty(Y).$$

Considérons maintenant une variété M avec un flot F_t

$$(26) \quad F_t(x) = \exp(tv) x \quad v \in C^\infty(M, T_M)$$

et l'application correspondante f ,

$$(27) \quad f : M \times \mathbb{R} \rightarrow M, \quad f(x, t) = F_t(x).$$

On applique les éléments ci-dessus avec $X = M \times \mathbb{R}$, $Y = M$. Le graphe de f est la sous-variété Z de $X \times Y$,

$$(28) \quad Z = \{(x, t, y) ; y = F_t(x)\}.$$

Si φ est l'application diagonale,

$$(29) \quad \varphi(x, t) = (x, t, x), \quad \varphi : M \times \mathbb{R} \rightarrow X \times Y$$

et le premier résultat est la transversalité $\varphi \pitchfork Z$.

Nous avons alors besoin de considérer (12) pour chaque (x, t) tel que $\varphi(x, t) \in Z$, i.e. tel que $x = F_t(x)$. On regarde l'image par φ_* de l'espace tangent $T_x M \times \mathbb{R}$ sur $M \times \mathbb{R}$ en (x, t) . On prend ∂_t le champ de vecteurs naturel sur \mathbb{R} . L'image de $(X, \lambda \partial_t)$ est $(X, \lambda \partial_t, X)$ pour $X \in T_x M, \lambda \in \mathbb{R}$. En divisant l'espace tangentiel de $M \times \mathbb{R} \times M$ par l'image de φ_* , on obtient un isomorphisme,

$$(30) \quad (X, \lambda \partial_t, Y) \rightarrow Y - X$$

avec $T_x M$. L'espace tangent à Z est $\{(X', \mu \partial_t, (F_t)_* X' + \mu v_{F_t(x)}); X' \in T_x M, \mu \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, la condition de transversalité signifie que tout élément de $T_x M$ est de la forme

$$(31) \quad (F_t)_* X - X + \mu v_x \quad X \in T_x M, \mu \in \mathbb{R}.$$

On a

$$(32) \quad (F_t)_* \mu v_x = \mu v_x$$

de telle manière que $(F_t)_*$ définit une application quotient, l'application inverse de Poincaré

$$(33) \quad P : T_x / \mathbb{R} v_x \rightarrow T_x / \mathbb{R} v_x = N_x$$

et la condition de transversalité (31) signifient exactement,

$$(34) \quad 1 - P \quad \text{est inversible.}$$

Faisons cette hypothèse et calculons le symbole σ de la distribution,

$$(35) \quad \tau = \varphi^*(\delta(y - F_t(x)) dy).$$

D'abord, comme ci-dessus, posons $W = \varphi^{-1}(Z) = \{(x, t) ; F_t(x) = x\}$. La codimension de $\varphi^{-1}(Z)$ dans $M \times \mathbb{R}$ est la même que la codimension de Z dans $M \times \mathbb{R} \times M$, et elle est donc égale à $\dim M$, ce qui montre que $\varphi^{-1}(Z)$ est de dimension 1. Si $(x, t) \in \varphi^{-1}(Z)$ alors $(F_s(x), t) \in \varphi^{-1}(Z)$. Ainsi, si l'on suppose que v ne s'évanouit pas en x , l'application,

$$(36) \quad (x, t) \xrightarrow{q} t$$

est localement constante sur la composante connexe de $\varphi^{-1}(Z)$ qui contient (x, t) .

Cela autorise à identifier l'espace transverse à $W = \varphi^{-1}(Z)$ comme le produit

$$(37) \quad N_{x,t}^W \simeq N_x \times \mathbb{R}$$

dans lequel à $(X, \lambda \partial_t) \in T_{x,t}(M \times \mathbb{R})$, on associe la paire (\tilde{X}, λ) donnée par la classe de X dans $N_x = T_x/\mathbb{R}v_x$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le symbole σ de la distribution (35) est une section lisse de $|N^{W*}|$ tensorisée par le pullback $\varphi^*(L)$ où $L = \text{pr}_Y^* |T_M|$, et on a

$$(38) \quad \varphi^*(L) \simeq |p^* T_M|$$

où

$$(39) \quad p(x, t) = x \quad \forall (x, t) \in M \times \mathbb{R}.$$

Pour calculer σ , on a besoin de l'isomorphisme,

$$(40) \quad N_{(x,t)}^W \xrightarrow{\varphi_*} T_{\varphi(x,t)}(M \times \mathbb{R} \times M)/T_{\varphi(x,t)}(Z) = N^Z.$$

L'application $\varphi_* : N_{x,t}^W \rightarrow N^Z$ est donnée par

$$(41) \quad \varphi_*(X, \lambda \partial_t) = (1 - (F_t)_*) X - \lambda v \quad X \in N_x, \lambda \in \mathbb{R}$$

et le symbole σ est juste

$$(42) \quad \sigma = |\varphi_*^{-1}| \in |p^* T_M| \otimes |N^{W*}|.$$

Cela fait sens puisque $\varphi_*^{-1} : p^* T_M \rightarrow N^W$.

Considérons maintenant la seconde projection,

$$(43) \quad q(x, t) = t \in \mathbb{R}$$

et calculons le pushforward $q_*(\tau)$ de la distribution τ .

Par construction, $\delta(y - F_t(x)) dy$ est une section généralisée de $\text{pr}_Y^* |T|$, de telle façon que τ est une section généralisée de $p^* |T| = \varphi^* \text{pr}_Y^* |T|$.

Ainsi, $q_*(\tau)$ est une fonction généralisée.

On regarde d'abord la contribution d'une orbite périodique, la partie correspondante de $\varphi^{-1}(Z)$ est de la forme,

$$(44) \quad \varphi^{-1}(Z) = V \times \Gamma \subset M \times \mathbb{R}$$

où Γ est un sous-groupe discret cocompact de \mathbb{R} , tandis que $V \subset M$ est une sous-variété compacte de M de dimension 1.

Pour calculer $q_*(\tau)$, on définit $h(t) |dt|$ comme une 1-densité sur \mathbb{R} et on la pullback par q comme la section sur $M \times \mathbb{R}$ du fibré $q^* |T|$,

$$(45) \quad \xi(x, t) = h(t) |dt|.$$

On a alors besoin de calculer $\int_{\varphi^{-1}(Z)} \xi \sigma$. On peut regarder la contribution de chaque composant : $V \times \{T\}$, $T \in \Gamma$.

On obtient

$$(46) \quad T^\# \frac{1}{|1 - P_T|} h(T).$$

où $T^\#$ est la longueur de l'orbite primitive, ou, de manière équivalente, le covolume de Γ dans \mathbb{R} pour la mesure de Haar $|dt|$. On peut alors écrire les contributions des orbites périodiques comme

$$(47) \quad \sum_{\gamma_p} \sum_{\Gamma} \text{Covol}(\Gamma) \frac{1}{|1 - P_T|} h(T).$$

où la fonction test h s'évanouit en 0.

Le prochain cas à considérer est celui où le champ de vecteurs v_x a un zéro isolé 0, $v_{x_0} = 0$. Dans ce cas, la condition de transversalité (31) devient

$$(48) \quad 1 - (F_t)_* \text{ inversible (en } x_0).$$

On a $F_t(x_0) = x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et maintenant, le composant pertinent de $\varphi^{-1}(Z)$ est $\{x_0\} \times \mathbb{R}$. L'espace transverse N^W est identifié à T_x et l'application $\varphi_* : N^W \simeq N^Z$ est donnée par :

$$(49) \quad \varphi_* = 1 - (F_t)_*.$$

Ainsi, le symbole σ est la fonction scalaire $|1 - (F_t)_*|^{-1}$. La section généralisée $q_* \varphi^*(\delta(y - F_t(x)) dy)$ est la fonction, $t \rightarrow |1 - (F_t)_*|^{-1}$. Nous pouvons alors écrire la contribution des zéros du flot comme,

$$(50) \quad \sum_{\text{zéros}} \int \frac{h(t)}{|1 - (F_t)_*|} dt$$

où h est une fonction test s'évanouissant en 0.

Nous pouvons alors rassembler les contributions (47) et (50) en

$$(51) \quad \sum_{\gamma} \int_{I_\gamma} \frac{h(u)}{|1 - (F_u)_*|} d^*u$$

où h est comme ci-dessus, I_γ est le groupe d'isotropie de l'orbite périodique γ , la mesure de Haar d^*u sur I_γ est normalisée de telle façon que le covolume I_γ soit égal à 1 et nous remplaçons à nouveau $(F_u)_*$ par sa restriction à l'espace transverse γ .

Bibliographie

- [AB] M.F. Atiyah et R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes: I, *Annals of Math*, **86** (1967), 374-407.
- [B] M. Berry, Riemann's zeta function: a model of quantum chaos, *Lecture Notes in Physics*, **263**, Springer (1986).
- [Bg] A. Beurling, A closure problem related to the Riemann zeta function, *Proc. Nat. Ac. Sci.* **41** (1955), 312-314.
- [B-C] J.-B. Bost et A. Connes, Hecke Algebras, Type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory, *Selecta Mathematica, New Series* **1**, No.3 (1995), 411-457.
- [BG] O. Bohigas et M. Giannoni, Chaotic motion and random matrix theories, *Lecture Notes in Physics*, **209** (1984), 1-99.
- [BK] M. Berry et J. Keating, $H = qp$ and the Riemann zeros, "Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder", edited by J.P. Keating, D.E. Khmelnitskii and I.V. Lerner (Plenum Press).
- [Br] F. Bruhat, Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p -adiques. *Bull. Soc. Math. france.* **89** (1961), 43-75.
- [C] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press (1994).
- [Co] A. Connes, Formule de trace en Géométrie non commutative et hypothèse de Riemann, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B* (1996)
- [D] C. Deninger, Local L -factors of motives and regularised determinants, *Invent. Math.*, **107** (1992), 135-150.
- [G] D. Goldfeld, A spectral interpretation of Weil's explicit formula, *Lecture Notes in Math.*, **1593**, Springer Verlag (1994), 135-152.
- [GS] V. Guillemin et S. Sternberg, Geometric asymptotics, *Math. Surveys*, **14**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1977)
- [Gu] V. Guillemin, Lectures on spectral theory of elliptic operators, *Duke Math. J.*, **44**, No.3 (1977), 485-517.
- [H] S. Haran, Riesz potentials and explicit sums in arithmetic, *Invent. Math.*, **101** (1990), 697-703.
- [J] B. Julia, Statistical theory of numbers, *Number Theory and Physics, Springer Proceedings in Physics*, **47** (1990).

- [K] M. Kac, Statistical Independence in Probability, *Analysis and Number Theory, Carus Math. Monographs* **18** (1959).
- [KS] N. Katz et P. Sarnak, Random matrices, Frobenius eigenvalues and Monodromy, (1996) , Book, to appear.
- [KS] N. Katz et P. Sarnak, Zeros of zeta functions, their spacings and spectral nature, (1997), to appear.
- [LPS1] D. Slepian et H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty I, *Bell Syst. Tech. J.* **40** (1961).
- [LPS2] H.J. Landau et H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty II, *Bell Syst. Tech. J.* **40** (1961).
- [LPS3] H.J. Landau et H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty III, *Bell Syst. Tech. J.* **41** (1962).
- [M] H. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, *Analytic Number Theory*, AMS (1973).
- [Me] M.L. Mehta, Random matrices, Academic Press,(1991).
- [O] A. Odlyzko, On the distribution of spacings between zeros of zeta functions, *Math. Comp.* **48** (1987), 273-308.
- [P] G. Pólya, Collected Papers, Cambridge, M.I.T. Press (1974).
- [Pat] S. Patterson, An introduction to the theory of the Riemann zeta function, *Cambridge Studies in advanced mathematics*, **14** Cambridge University Press (1988).
- [R] B. Riemann, *Mathematical Werke*, Dover, New York (1953).
- [S] E. Seiler, Gauge Theories as a problem of constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics, *Lecture Notes in Physics* **159** Springer (1982).
- [Se] A. Selberg, *Collected papers*, Springer (1989).
- [W1] A. Weil, Basic Number Theory, Springer, New York (1974).
- [W2] A. Weil, Fonctions zêta et distributions, *Séminaire Bourbaki*, **312**, (1966).
- [W3] A. Weil, Sur les formules explicites de la théorie des nombres, *Izv. Mat. Nauk.*, (Ser. Mat.) **36**, 3-18.
- [W4] A. Weil, Sur la théorie du corps de classes, *J. Math. Soc. Japan*, **3**, (1951).
- [W5] A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, *Acta Math.* , **111**, (1964).
- [Z] D. Zagier, Eisenstein series and the Riemannian zeta function, *Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic*, Tata, Bombay (1979), 275-301.