Nouvelle démonstration du théorème selon lequel toute fonction algébrique rationnelle entière d'une seule variable peut être décomposée en facteurs réels du premier et du second degré.

Que Carl Friedrich Gauss a présentée,
Afin d'obtenir les plus grands honneurs en philosophie,
à la célèbre faculté des philosophes
De l'Académie Julia Carolina.

À C.G. Fleckheiser, Helmstedt, 1799.

1.

Toute équation algébrique déterminée peut être réduite sous la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + ... + M = 0,$$

où m est un nombre entier positif. Si nous désignons par X le premier membre de cette équation et si nous supposons que l'équation $X = 0$ est satisfaite par plusieurs valeurs différentes de x, par exemple en posant $x = \alpha, x = \beta, x = \gamma$, etc., alors la fonction X sera divisible par le produit des facteurs $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, etc. Inversement, lorsque le produit de plusieurs facteurs simples $x-\alpha, x-\beta, x-\gamma$, etc. est un diviseur de la fonction X, alors l'équation $X = 0$ sera satisfaite si ce x est posé égal à chacune des quantités α, β, γ, etc. Enfin, lorsque X est égal au produit de m facteurs simples de ce type (qui peuvent tous être différents, ou dont certains peuvent être identiques), alors d'autres facteurs simples en plus de ceux-ci ne peuvent diviser la fonction X. Pour cette raison, une équation de degré m ne peut pas avoir plus de m racines ; en même temps, il est bien clair qu'une équation de degré m peut avoir *moins* de m racines, même si X peut être décomposé en m facteurs simples : c'est-à-dire que si parmi ces facteurs certains sont identiques, alors le nombre de facteurs différents qui remplissent l'équation sera nécessairement plus petit que m. Pour des raisons de présentation, les mathématiciens préfèrent dire que dans ce cas aussi, l'équation a m racines, et qu'il peut avoir lieu que certaines d'entre elles s'avèrent égales.

2.

Ce qui a été exposé jusqu'ici est suffisamment prouvé dans les livres d'algèbre et ne contrevient en rien à la rigueur mathématique. Mais les analystes semblent avoir adopté trop vite et sans preuve préalable solide un théorème sur lequel repose presque toute la doctrine des équations : *qu'une telle fonction X peut toujours être décomposée en m facteurs simples ou, ce qui concorde parfaitement avec cela, que toute équation de degré m a effectivement m racines.* Mais comme on était parvenu assez souvent, avec les équations du second degré, à des cas qui ne sont pas conformes à ce théorème, les algébristes ont été obligés d'inventer une quantité imaginaire dont le carré soit -1 ; et ils ont alors reconnu que si les quantités de la forme $a + b\sqrt{-1}$ sont admises de la même manière que les quantités réelles, le théorème est vrai non seulement pour les équations du second degré mais aussi pour les équations cubiques et biquadratiques.

Mais il n'était nullement permis d'en déduire qu'en admettant des quantités de la forme $a+b\sqrt{-1}$, des équations de cinquième degré ou plus peuvent être satisfaites ou, comme on l'exprime souvent (bien que je recommande une expression moins ambigue), que les racines de toute équation peuvent être réduites à la forme $a + b\sqrt{-1}$. Ce théorème ne diffère en rien de celui énoncé dans le titre de cet ouvrage, et c'est l'intention de cette thèse d'en donner une démonstration rigoureuse.

Lorsque les analystes découvrirent qu'il existait une infinité d'équations qui n'ont pas d'autres racines que des quantités de la forme $a + b\sqrt{-1}$, ils qualifièrent cette espèce particulière de quantités d'imaginaires, de façon à les distinguer des quantités réelles, ces quantités supposées ont été étudiées et ont été introduites dans toute l'analyse, je ne discuterai pas ici de la raison qui a motivé cette utilisation des quantités imaginaires en analyse. Je libérerai ma démonstration de tout secours de quantités imaginaires, même si j'aurais pu me prévaloir de cette liberté dont usent tous ceux qui s'occupent d'analyse.

3.

Bien que les démonstrations de notre théorème, données dans la plupart des manuels élémentaires, soient si peu fiables et si peu conformes à la rigueur mathématique qu'elles ne méritent guère d'être mentionnées, je les évoquerai néanmoins brièvement pour ne rien omettre.

Démontrer qu'une équation X quelconque a bien m racines, $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + etc. + M = 0$, ou $X = 0$, "Pour ils entreprennent de prouver que X peut être décomposé en m facteurs simples. À cet effet, ils supposent m facteurs simples $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, etc., où α, β, γ, etc. sont encore inconnus, et posent leur produit égal à la fonction X. Ensuite, ils déduisent m équations de la comparaison des coefficients et affirment qu'à partir de celles-ci les quantités inconnues α, β, γ, etc. peuvent être déterminées, dans la mesure où leur nombre est également m. C'est-à-dire que $m-1$ inconnues peuvent être éliminées jusqu'à ce qu'apparaisse une équation qui, comme il semble approprié, ne contient qu'une seule inconnue."

Je ne parlerai pas de ce qu'on pourrait encore objecter à une telle augmentation. Je demande simplement comment nous pouvons être sûrs que cette dernière équation a une racine quelconque ? Ne serait-il pas possible que dans tout le domaine des nombres réels et imaginaires, il n'y ait aucune quantité qui satisfasse soit cette dernière équation, soit l'équation proposée ? De plus, les personnes expérimentées verront facilement que cette dernière équation doit nécessairement être entièrement identique à celle proposée, si seulement les calculs ont été effectués selon la règle. En d'autres termes, après avoir éliminé les quantités inconnues, α, β, γ, etc., une équation $\alpha^m + A\alpha^{m-1} + B\alpha^{m-2} + etc. + M = 0$ doit apparaître. En dire davantage sur un tel raisonnement n'est pas nécessaire.

Certains auteurs qui semblent avoir perçu la faiblesse de cette méthode posent pratiquement comme *un axiome* qu'une équation a effectivement des racines, sinon possibles, du moins impossibles. Ce qu'ils veulent entendre par quantités possibles et impossibles, ne semble pas du tout être exposé suffisamment clairement. Si les quantités possibles doivent désigner la même chose que les quantités réelles, les quantités impossibles la même chose que les quantités imaginaires, alors cet axiome ne peut en aucun cas être admis, mais a nécessairement besoin d'une démonstration. Il ne semble pourtant pas que les expressions doivent être acceptées dans ce sens, mais que le sens de l'axiome semble plutôt être celui-ci : "Bien que nous ne soyons pas encore certains qu'il existe nécessairement m quantités réelles ou imaginaires qui satisfassent à une équation donnée de degré m, nous le supposerons encore pour le moment ; car si par hasard il arrivait qu'autant de quantités réelles ou imaginaires ne puissent être trouvées, alors certainement l'échappatoire resterait ouverte pour que nous puissions dire que les autres sont impossibles". Si quelqu'un préfère utiliser cette phrase plutôt que de simplement dire que dans ce cas, l'équation ne pourrait pas avoir autant de racines, alors je n'ai pas d'objections : mais s'il utilise ces racines impossibles comme si elles étaient factuelles, et par exemple, s'il dit que la somme de toutes les racines de l'équation $x^m + Ax^{m-1} + etc. = 0$ est $-A$ bien que parmi celles-ci il y ait des racines impossibles, ce qui signifie en fait bien que certaines soient absentes), alors je ne peux pas du tout l'approuver. Car les racines impossibles, admises dans un tel sens, sont encore des racines, et alors cet axiome ne peut en aucune façon être admis sans preuve ; et il ne serait pas non plus déplacé de se demander s'il n'existerait pas des équations qui n'auraient même pas de racines impossibles. [1]

4.

Avant de passer en revue les démonstrations de notre théorème données par d'autres mathématiciens, et d'exposer ce qui, à mon avis, doit être critiqué dans chacune d'elles, je fais observer qu'il suffit

[1]Par quantité imaginaire, j'entends toujours ici une quantité de la forme $a+b\sqrt{-1}$, avec $b \neq 0$. Cette expression a toujours été employée dans ce sens par tous les mathématiciens de premier ordre et je crois qu'il ne faut pas écouter ceux qui voudraient appeler la quantité $a + b\sqrt{-1}$ imaginaire seulement dans le cas où $a = 0$, et impossible lorsque $a \neq 0$; car cette distinction n'est ni nécessaire ni d'aucune utilité. Si l'on doit conserver les quantités imaginaires dans l'analyse (ce qui parait pour plusieurs raisons plus sage que de les supprimer, une fois qu'elles soient assez solidement étayées), il faut nécessairement les considérer comme tout aussi possibles que les quantités réelles ; c'est pourquoi je voudrais rassembler les quantités réelles et les quantités imaginaires sous la dénomination commune de quantités possibles : par contre, j'appellerais impossible une quantité qui aurait à remplir des conditions qui ne pourraient même pas être remplies en admettant les imaginaires. Mais de cette façon, la phrase signifierait exactement la même chose que si elle disait qu'une telle quantité n'appartient pas au domaine des grandeurs. Je ne puis cependant pas du tout admettre de là la formation d'une nouvelle espèce de quantités.
Si quelqu'un disait qu'un triangle rectangle équilatéral rectiligne est impossible, personne ne le contesterait. Mais s'il entendait considérer un triangle aussi impossible comme une nouvelle espèce de triangles et lui appliquer d'autres qualités de triangles, quelqu'un s'abstiendrait-il de rire ? Ce serait jouer avec les mots, ou plutôt en abuser
(Note : voir à ce propos la démonstration du théorème de Morley par John Conway, qui utilise des triangles "virtuels". D. V.-C.).
En effet, même des mathématiciens de premier ordre ont parfois appliqué des faits qui présupposent la possibilité des quantités qu'ils considèrent à des quantités dont la possibilité était jusqu'alors douteuse. Je ne nierai pas que les licences de ce genre ne portent le plus souvent que sur la forme des calculs, comme un voile que la perspicacité d'un vrai mathématicien saura bientôt percer. Néanmoins, il semble plus sage et plus digne de la sublime science, célébrée à juste titre comme le modèle le plus parfait de clarté et de fiabilité, soit d'interdire entièrement ces libertés, soit du moins d'en user avec plus de parcimonie, et de ne les utiliser que là où des personnes moins expérimentées peuvent se rendre compte que la question aurait pu être traitée sans le secours de ces libertés, peut- être moins brièvement, mais avec la même rigueur.
Je ne nie pas non plus que ce que j'ai dit ici contre l'usage abusif des quantités impossibles puisse, dans une certaine mesure, être également dit contre les quantités imaginaires. Mais je réserve la justification de ces dernières, et en fait une explication plus complète de toute cette question, pour une autre occasion.

de montrer seulement ceci : Toute équation de quelque degré que ce soit

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + etc. + M = 0,$$

ou $X = 0$ (où les coefficients A, B, etc. sont des nombres réels) sera satisfaite au moins une fois par une valeur de x de la forme $a + b\sqrt{-1}$. Car il est bien connu qu'alors X est divisible par un facteur réel $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$, si b n'est pas 0, et par un facteur réel simple $x - a$ si $b = 0$. Dans l'un et l'autre cas, le quotient sera réel, et d'un degré inférieur à celui de X. Et comme, par le même raisonnement, ce quotient doit avoir un facteur réel du premier ou du second degré, il est clair qu'en continuant ce procédé, la fonction X se résoudra enfin en facteurs réels simples ou doubles ou en m facteurs simples si l'on préfère employer à la place des facteurs individuels doubles, deux facteurs simples imaginaires conjugués.

5.

La première démonstration du théorème est due au célèbre mathématicien d'Alembert, dans *Recherches sur le calcul intégral, Histoire de l'Acad. de Berlin*, année 1746, p. 182 et suivantes. La même démonstration est exposée dans Bougainville, *Traité du calcul intégral*, à Paris année 1754, p. 47 et suivantes. Les principaux points de sa méthode sont les suivants :

Il démontre d'abord : Quelle que soit la fonction X d'une variable x qui puisse être nulle soit pour $x = 0$ soit pour $x = \infty$, et qui puisse obtenir une valeur réelle positive infiniment petite lorsque x est affectée d'une valeur réelle, cette fonction peut aussi obtenir une valeur négative infiniment petite pour une valeur de x qui est soit un nombre réel, soit de la forme imaginaire $p + q\sqrt{-1}$. Car désignons par Ω une valeur infiniment petite de X, et ω la valeur correspondante de x. Il affirme ensuite que peut être exprimé par une série à convergence rapide $a\Omega^\alpha + b\Omega^\beta + c\Omega^\gamma$ etc., où les exposants, α, β, γ, etc. sont des nombres rationnels continument croissants qui seront positifs au moins à une certaine distance du début de la série, et qui rendront les termes dans lesquels ils apparaissent infiniment petits. Si parmi tous ces exposants il n'en apparaît aucun qui soit une fraction de dénominateur pair, alors tous les termes de la série seront des nombres réels pour les valeurs positives aussi bien que négatives de Ω. Mais si parmi ces exposants se trouvent des fractions de dénominateur pair, les termes correspondants, pour des valeurs négatives de Ω seront de la forme $p+q\sqrt{-1}$. Comme la série converge rapidement, il suffit dans le premier cas de ne considérer que le premier terme (c'est-à-dire le plus grand) ; dans le second cas, il n'est pas nécessaire d'aller au-delà du terme qui produit le premier une partie imaginaire.

Par un raisonnement similaire, on peut montrer que si X peut obtenir une valeur réelle négative infiniment petite pour une valeur réelle de x, alors la fonction peut aussi obtenir une valeur réelle positive infiniment petite pour une valeur réelle de x ou pour un x imaginaire de la forme $p+q\sqrt{-1}$.

Il en conclut en second lieu qu'il existe également une valeur réelle finie de X dans le premier cas négative, dans le second cas positive, qui peut être produite par une valeur imaginaire de x de la forme $p + q\sqrt{-1}$.

Il s'ensuit que si X est une telle fonction de x qu'elle prend la valeur réelle V pour la valeur réelle v de x et obtient aussi une valeur réelle supérieure ou inférieure d'une quantité infiniment petite, pour une valeur réelle de x, alors cette même fonction peut aussi prendre une valeur réelle supérieure ou inférieure à V (resp.) d'une quantité infiniment petite, et même d'une quantité finie, en attribuant à x une valeur de la forme $p + q\sqrt{-1}$.

Ceci peut être déduit de ce qui précède sans difficulté si $V + Y$ est substitué à X et $v + y$ à x.

Enfin d'Alembert affirme : si l'on suppose que X peut parcourir tout l'intervalle compris entre deux valeurs réelles R, S (c'est-à-dire être égal tantôt à R, tantôt à S et à toutes les valeurs réelles comprises entre celles-ci) en attribuant toujours à x des valeurs de la forme $p + q\sqrt{-1}$, alors la fonction X peut de plus être augmentée ou diminuée (précisément selon que $S > R$ ou $S < R$) de toute quantité réelle finie avec x toujours de la forme $p + q\sqrt{-1}$.

Car si l'on se donne une quantité réelle U (S étant supposé compris entre U et R) à laquelle X ne puisse être égal par une telle valeur de x, il existera nécessairement un maximum de X (c'est-à-dire lorsque $S > R$, ou un minimum lorsque $S < R$), par exemple T, qu'il acquerra pour une valeur $p + q\sqrt{-1}$ de x, de sorte qu'on ne pourrait assigner à x aucune valeur de forme semblable qui rapprocherait encore la fonction X de U, même du plus petit écart. Or, dans une équation entre X et x, substituons partout à x la valeur $p + q\sqrt{-1}$, et posons d'abord la partie réelle égale à zéro, puis la partie qui fait intervenir le facteur $\sqrt{-1}$, laquelle est alors omise. Des deux équations ainsi produites, on peut en obtenir deux autres par élimination, dans l'une desquelles p, q et X et des constantes, interviennent tandis que l'autre, exempte de p, ne fait intervenir que q, X et des constantes. Ainsi, lorsque X parcourt toutes les valeurs réelles de R à T pour des valeurs réelles de p, q, alors, d'après ce qui précède, X peut se rapprocher de plus en plus de la valeur de U lorsque de telles valeurs que $p = \alpha + \gamma\sqrt{-1}, q = \beta + \delta\sqrt{-1}$ sont assignées respectivement à p et q. De là, cependant, on peut poser que $x = \alpha - \delta + (\gamma + \beta)\sqrt{-1}$, c'est-à-dire qu'il est encore de la forme $p + q\sqrt{-1}$, contrairement à l'hypothèse.

Ainsi, lorsqu'on suppose que X désigne une fonction de la forme $X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} +$ etc. $+M$, on perçoit sans difficulté que l'on peut attribuer à x des valeurs réelles telles que X puisse parcourir tout l'intervalle compris entre deux valeurs réelles. On peut donc obtenir pour x une valeur de la forme $p + q\sqrt{-1}$ de telle sorte que X puisse être égal à 0. CQFD [2]

6.

Les objections à la preuve de d'Alembert peuvent généralement être exprimées ainsi :

1. d'Alembert n'exprime aucun doute sur *l'existence* de valeurs de x auxquelles correspondent des valeurs données de X, mais suppose leur existence et étudie seulement la *forme* de ces valeurs.

[2] Il convient de remarquer que d'Alembert a appliqué des considérations géométriques dans l'exposition de sa démonstration et a considéré X comme l'abscisse et x comme l'ordonnée d'une courbe (selon l'usage de tous les mathématiciens de la première partie de ce siècle à qui la notion de fonctions était moins familière). Mais tout son raisonnement, si l'on considère seulement l'essentiel, repose non sur des principes géométriques mais sur des principes purement analytiques, et une courbe imaginaire et des ordonnées imaginaires sont des concepts assez difficiles et peuvent offenser un lecteur de notre temps. C'est pourquoi j'ai plutôt donné ici une forme de représentation purement analytique. J'ai ajouté cette note pour que celui qui comparerait la démonstration de d'Alembert avec cette exposition concise puisse vérifier que ce qui est essentiel est respecté sans changement.

Bien que cette objection soit en elle-même tout à fait grave, elle ne conceme ici cependant que la forme de l'expression, qui peut être facilement corrigée de telle manière que l'objection soit complètement démolie.

2. L'affirmation que l'on peut toujours exprimer ω par une série du genre de celle qu'il pose, est certainement fausse si X peut aussi désigner n'importe quelle fonction transcendante (comme d'Alembert l'admet dans plusieurs passages). Cela est manifeste par exemple si l'on pose

$$X = e^{1/x} \text{ soit } x = 1/\ln x.$$

Si nous limitons la démonstration au cas où X est une fonction algébrique de x (ce qui suffit pour la présente tâche), la proposition est valable dans tous les cas.

Au delà, d'Alembert n'apporte rien pour la vérification de son hypothèse. Bougainville stipule que X est une fonction algébrique de x et renvoie à l'invention de la série des parallélogrammes de Newton pour le développement de la série.

3. Il utilise les quantités infiniment petites avec plus de liberté que ne le permet la rigueur mathématique ou que ne le concèdera, du moins, un analyste scrupuleux de nos jours (où ces quantités ont à juste titre mauvaise réputation). Il n'a pas non plus expliqué assez clairement la transition d'une valeur infiniment petite de Ω à une valeur finie. Il semble conclure sa proposition selon laquelle Ω peut aussi atteindre une valeur finie, non pas tellement de la possibilité pour Ω d'avoir une valeur infiniment petite, mais plutôt du fait que, pour de très petites valeurs de Ω et à cause de la forte convergence de la série, elle se rapproche d'autant plus de la vraie valeur de ω que l'on prend plus de termes de la série. Ou bien, que l'équation qui montre la relation entre ω et Ω ou entre x et X sera satisfaite de manière d'autant plus exacte que l'on prend un plus grand nombre de termes dans la somme pour ω.

Outre que toute cette argumentation paraît trop vague pour qu'on puisse en tirer une conclusion rigoureuse, j'observe qu'il y a néanmoins des séries qui, quelque soit la petitesse de la valeur attribuée à la quantité pour laquelle les puissances progressent, divergent néanmoins toujours, pourvu qu'on les continue assez loin, pour qu'on puisse arriver à des termes plus grands qu'une quantité donnée quelconque [3] . Cela se produit lorsque les coefficients de la série forment une progression hypergéométrique, il faut donc nécessairement démontrer que dans le cas présent une telle série hypergéométrique ne peut pas apparaître.

Au reste, il me paraît que d'Alembert n'a pas convenablement recouru aux séries infinies et que celles-ci ne sont nullement propres à établir ce théorème fondamental de la théorie des équations.

[3] Je remarque ici en passant que parmi ces séries il y en a beaucoup qui, à première vue, semblent converger fortement, par exemple pour la plupart celles dont l'illustre Euler se sert dans la dernière partie de l'*Institutiones calculi differentialis* (Berlin 1755) chapitre VI, pour approcher au plus près la somme d'autres séries, p. 441-474 (les autres séries, p. 475-478, sont effectivement convergentes) ; chose que personne n'a jusqu'ici observée, autant que je sache. Il est donc grandement désirable qu'on expose clairement et rigoureusement pourquoi ces séries qui convergent d'abord très vite, puis, peu à peu, de plus en plus lentement et enfin divergent de plus en plus, peuvent néanmoins fournir une somme très voisine de la somme cherchée si l'on ne prend pas trop de termes, et dans quelle mesure on peut être assuré d'avoir une somme aussi exacte que possible ?

4. De l'hypothèse que X peut prendre la valeur S mais ne peut pas prendre la valeur U , il ne s'ensuit pas qu'il y ait nécessairement entre S et U une valeur T que X puisse atteindre mais non dépasser. Il existe ici encore un autre cas : il pourrait arriver qu'il y ait entre S et U une limite dont X puisse se rapprocher autant qu'on le voudra, mais qu'elle n'atteigne jamais. Des arguments fournis par d'Alembert il résulte seulement que X peut dépasser d'une quantité finie toute valeur qu'elle atteindrait. Par exemple, lorsque X devient égale à S, elle peut encore être augmentée d'une quantité finie Ω, puis un nouvel incrément Ω' peut être ajouté, puis un autre ajout Ω'', etc. De sorte que, quel que soit le nombre d'incréments ayant déjà été cumulés, aucun ne peut être considéré comme le dernier, il peut toujours arriver un nouvel incrément.

Mais aussi grand que soit le *nombre* des incréments possibles, il n'est restreint par aucune limite : il peut néanmoins arriver que les incréments, $\Omega, \Omega', \Omega''$, etc. diminuent continuellement mais que la somme $S + \Omega + \Omega' + \Omega''$ n'atteigne jamais une limite quelconque et ce, quel que soit le nombre de termes considérés.

Bien que ce cas ne puisse se produire lorsque X désigne une fonction algébrique intégrale de x, sans preuve que ce cas ne puisse se produire, le développement doit être considéré comme incomplet. En fait, lorsque X est une fonction transcendante ou une "fonction algébrique" (fonction algébrique rationnelle), ce cas peut se produire, par exemple il se produit toujours lorsqu'à une valeur de X correspond une valeur infiniment grande de x. Le développement de d'Alembert ne peut donc, semble-t-il, être ramené à des principes indubitables sans de grandes digressions, et dans certains cas, même, il ne peut pas être rcorrigé du tout.

Pour ces raisons, je ne puis considérer la démonstration de d'Alembert comme satisfaisante. Malgré cela, il me semble que la substance véritable de la démonstration en question n'est nullement altérée par toutes ces objections. Et je crois que sur la même base (quoique d'une manière bien différente et au moins avec plus de circonspection), on peut construire une démonstration rigoureuse de notre théorème, et non seulement cela, mais on peut en tirer tout ce qu'on peut demander à une théorie des équations *transcendantes.*

Je traiterai peut-être plus longuement de cette question très importante à une autre occasion (se reporter à ce propos à ce qui précède le paragraphe 24.

7.

Après d'Alembert, l'illustre Euler publia ses recherches sur ce sujet, *Recherches sur les racines imaginaires des équations, Hist. de l'Acad. de Berlin*, Année 1749, p. 223 et suivantes. Euler en livra un double développement. Un résumé du premier suit ici.

Premièrement, Euler entreprend de démontrer que si m désigne une puissance de 2, alors la fonction $x^{2m} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3}+$ etc.$+M = X$ (où le coefficient du second terme [en x^{2m-1}] est égal à 0) est toujours résolue en deux facteurs réels, dans lesquels x est élevé jusqu'à la puissance m. À cette fin, il suppose deux facteurs

$$x^m - ux^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \beta x^{m-3} + \text{etc. et}$$

$$x^m + ux^{m-1} + \lambda x^{m-2} + \mu x^{m-3} + \text{etc..}$$

où les coefficients $u, \alpha, \beta, \lambda, \mu$, etc., sont inconnus et il pose le produit de ces facteurs égal à la fonction X.

La comparaison des coefficients fournit alors $2m-1$ équations et il ne reste qu'à démontrer clairement que l'on peut attribuer des valeurs réelles aux inconnues (qui sont également en nombre $2m-1$) $u, \alpha, \beta, \text{etc.}, \lambda, \mu$, etc., telles qu'elles satisfassent à ces équations. De plus, Euler affirme que si dans un premier temps u est considéré comme connu, de sorte que le nombre d'inconnues est égal à un de moins que le nombre d'équations, on peut, en combinant les méthodes algébriques connues, déterminer rationnellement et sans aucun extraction de racine : $\alpha, \beta, \text{etc.}, \lambda, \mu$, etc., à partir de u et des coefficients B, C, etc., et il en résulte même des valeurs réelles si u est réel. En outre, tous les coefficients α, β, etc., λ, μ, etc. pourront être éliminés, de sorte qu'il en résulte une équation $U = 0$, où U sera une fonction entière de u seulement, et des coefficients connus. Résoudre cette dernière équation par la simple méthode d'élimination serait un travail énorme lorsque l'équation proposée $X = 0$ est de degré assez élevé ; et impossible pour un degré indéterminé (même référence à Euler, p. 239). Mais il suffit ici de connaître une propriété de cette équation, à savoir que le dernier terme de U (dans lequel u n'intervient pas) est nécessairement négatif, d'où il résulte bien que l'équation a au moins une racine réelle, donc que u et par conséquent aussi α, β, etc., λ, μ, etc. peuvent être déterminés comme des nombres réels d'au moins une manière. Cette propriété peut en effet être démontrée par les considérations suivantes : si l'on suppose que $x^m - ux^{m-1} + \alpha x^{m-2} +$ etc. est un facteur de la fonction X, alors u sera nécessairement la somme des m racines de l'équation $X = 0$ et il pourra avoir autant de valeurs que le nombre m peut être choisi de différentes manières parmi les $2m$ racines de $X = 0$ ou, d'après les principes du calcul combinatoire $\dfrac{2m.2m-1.2m-2.\ldots.m+1}{1.2.3.\ldots.m}$ valeurs. Ce nombre est toujours le double d'un nombre impair (j'omets la démonstration qui n'est pas difficile) ; si on pose ce nombre égal à $2k$, alors sa moitié k sera impaire. L'équation $U = 0$ sera en effet de degré $2k$. Mais comme dans l'équation $X = 0$ il n'y a pas de second terme, la somme de toutes les $2m$ racines sera nulle. Par conséquent, il est clair que si la somme des m racines est $+p$, alors la somme des racines restantes doit être $-p$, i.e. si p fait partie des valeurs de u, alors la valeur $-p$ en fera partie aussi. E. conclut donc que U est le produit de k facteurs doubles de la forme $u^2 - p^2, u^2 - q^2, u^2 - r^2$, etc., où $+p, -p, +q, -q$ etc. désignent toutes les $2k$ racines de l'équation $U = 0$. À cause du nombre impair de ces doubles facteurs, le dernier terme de U sera donc le carré du produit pqr etc., affecté du signe négatif. Mais ce produit pqr etc. peut toujours être calculé par des opérations rationnelles à partir des coefficients B, C, etc. et est donc nécessairement un nombre réel. Par conséquent, son carré précédé d'un signe négatif sera certainement une quantité négative. CQFD

Comme ces deux facteurs réels de X sont de degré m, et que m est une puissance de 2, chacun d'eux peut de la même manière être décomposé en deux facteurs réels de degré $\frac{1}{2}.m$. Comme par division répétée du nombre m par deux, on finit nécessairement par arriver à un terme du second degré, il est manifeste qu'en continuant l'opération, la fonction X finira par être décomposée en facteurs réels du second degré.

Mais si l'on propose que la fonction soit telle que son second terme ne manque pas, par exemple $x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2}+$ etc. $+M$, où $2m$ est toujours une puissance de 2, alors cette fonction sera transformée par la substitution $x = y - A/2m$ en une fonction semblable sans second terme. Il s'ensuit donc facilement qu'une telle fonction est aussi décomposable en facteurs réels du second degré.

Enfin, proposons une fonction de degré n où le nombre n n'est pas une puissance binaire. Nous pouvons alors poser la puissance binaire $2m$ supérieure à n la plus proche, et multiplier la fonction proposée par $2m - n$ facteurs réels simples quelconques. Il résulte sans difficulté de la résolvabilité du produit en facteurs réels du second degré, que la fonction proposée peut aussi être résolue en facteurs du premier ou du second degré.

8.

Contre cette preuve s'élèvent les objections suivantes :

1. La règle d'après laquelle E. conclut que $2m - 2$ inconnues, α, β, etc., λ, μ, etc. peuvent être calculées à partir de $2m - 1$ équations par des opérations rationnelles, n'est nullement vraie en général, mais souffre assez souvent une exception. Si quelqu'un considère par exemple dans l'article 3 une des inconnues comme connue et essaie ensuite d'exprimer les autres quantités inconnues à partir de celle-ci et des coefficients donnés au moyen d'opérations rationnelles, il découvrira vite que c'est impossible. Aucune des inconnues ne peut être déterminée autrement que par une équation de degré $m - 1$. ela doit nécessairement résulter de ce qui a été dit précédemment, comme on peut le voir ici immédiatement. Néanmoins, on pourrait très bien se demander si, dans le cas présent, pour certaines valeurs de m, la situation ne pourrait pas être telle que les inconnues, α, β, etc., λ, μ, etc., ne puissent être déterminées à partir de u, B, C, etc. autrement que par une équation d'un degré peut-être supérieur à $2m$? Pour le cas particulier où l'équation $X = 0$ est du quatrième degré, E. a calculé les valeurs rationnelles des coefficients à partir de u et des coefficients donnés. Il faudrait au moins une analyse plus approfondie pour savoir si cela peut effectivement être fait dans toutes les équations supérieures.

Il semble en outre utile d'étudier plus en profondeur et de manière plus générale les formules qui expriment,α, β, etc., λ, μ, rationnellement en fonction de u, B, C, etc. par des opérations rationnelles. J'ai l'intention de traiter plus en détail cette question et d'autres qui appartiennent à la théorie de l'élimination (cette question n'a pas été épuisée) à une autre occasion.

2. Même si l'on avait prouvé que l'on pouvait trouver des formules pour des équations de quelque degré que ce soit, avec lesquelles ces quantités, α, β, etc., λ, μ, etc. puissent être calculées à partir de u, B, C, etc. par des opérations rationnelles, cependant ces formules pourraient devenir *indéterminées* pour certaines valeurs bien définies des coefficients u, B, C, etc. De cette manière, non seulement il pourrait être impossible de calculer les quantités inconnues à partir de u, B, C. etc. par des opérations rationnelles, mais dans certains cas il pourrait en effet n'y avoir aucune valeur réelle de α, β, etc., λ, μ, etc. correspondant à une valeur réelle de u. Pour la confirmation de ceci, je renvoie le lecteur, par souci de concision, à la dissertation même de E., où à la page

236, l'équation du quatrième degré est longuement développée. Chacun verra immédiatement que les formules pour les coefficients α, β, etc.λ, μ, etc., deviennent indéterminées lorsque l'on suppose $C = 0$ et $u = 0$. Alors les valeurs de ces coefficients ne peuvent être obtenues sans extractions de racines, et ce ne sont même pas des nombres réels lorsque la quantité $B^2 - 4D$ est négative. Certes, dans ce cas, u a encore d'autres valeurs réelles auxquelles peuvent répondre des valeurs réelles de α, β, etc., λ, μ, etc., comme on le voit facilement. Il est cependant à craindre que pour des équations plus élevées la solution de cette difficulté (que E. n'aborde pas du tout) ne donne lieu à un travail beaucoup plus pénible. Cette question ne doit certainement pas être passée sous silence dans une démonstration rigoureuse.

3. E. suppose tacitement que l'équation $X = 0$ a $2m$ racines et que leur somme est nulle parce que X n'a pas de second terme. Ce que je pense de cette licence (que tous les auteurs utilisent pour cet argument), je l'ai exposé clairement dans l'article 3 ci-dessus. L'hypothèse que la somme de toutes les racines d'une équation est égale au premier coefficient, affecté d'un signe opposé, ne semble pas applicable aux autres équations, mais seulement à celles qui ont des racines. Mais comme par cette démonstration, il faut montrer que l'équation $X = 0$ a effectivement des racines, il ne semble pas du tout permis de supposer leur existence. Sans doute, ceux qui n'ont pas encore pénétré le caractère fallacieux de ce paralogisme répondront qu'il ne s'agit pas ici de prouver que *l'équation* $X = 0$ *peut être satisfaite* (car c'est le sens de l'expression "elle a des racines"), *mais simplement que l'équation peut être satisfaite par des valeurs de* x *de la forme* $a + b\sqrt{-1}$. *Ils admettent en effet la première affirmation comme un axiome.* Cependant, on ne peut concevoir d'autres formes pour les quantités autres que les nombres réels et imaginaires $a + b\sqrt{-1}$. Il n'apparaît donc pas avec suffisamment de clarté en quoi ce qu'il faut démontrer diffère de ce qui est supposé comme un axiome.

Si l'on pouvait imaginer encore d'autres formes de grandeurs, par exemple de la forme F, F', F'', etc., on ne serait pas obligé d'admettre sans preuve qu'une équation quelconque soit satisfaite par une valeur de x réelle ou de la forme $a + b\sqrt{-1}$ ou de la forme F, ou F', etc. C'est pourquoi cet axiome ne peut avoir d'autre sens que celui-ci : toute équation peut être satisfaite par une valeur réelle de l'inconnue, *ou* par une valeur imaginaire de la forme $a+b\sqrt{-1}$, *ou* peut-être par une valeur d'une forme jusqu'ici inconnue, *ou* par une valeur qui n'est contenue dans aucune forme quelconque. Mais comment les quantités de cette espère, dont on ne peut avoir aucune idée, véritable ombre d'une ombre, pourraient-elles être additionnées ou divisées ? Ceci n'est certainement pas compréhensible avec cette clarté qu'exige toujours la science [4].

Je ne veux cependant pas, par ces objections, rendre suspectes les conclusions que E. a tirées de son hypothèse. Je suis plutôt certain qu'elles peuvent être réalisées d'une manière qui n'est ni difficile ni très différente de celle d'Euler, de sorte qu'il ne subsistera pas le moindre scrupule.

Je retiens que cette forme de raisonnement peut être d'une grande utilisé autant qu'on voudra pour la *découverte* de nouveaux théorèmes, mais qu'elle paraît cependant moins apte pour une

[4] Tout cela sera expliqué en détail dans une autre étude, qui est déjà en cours d'impression et qui traite d'un sujet très différent, mais néanmoins analogue. Là, j'aurais pu me prévaloir d'une licence semblable, avec le même droit que se donnent tous les analystes dans la résolution des équations. Les démonstrations de plusieurs affirmations auraient pu être données en quelques mots à l'aide de telles fictions. Sans elles, elles se sont révélées très difficiles et ont exigé l'art le plus subtil. Mais j'ai préféré m'abstenir entièrement de ces fictions, et j'espère que cela me donnera plus de satisfaction que d'avoir suivi la méthode des analystes.

démonstration devant le public.

E. n'apporte rien du tout à la démonstration de l'assertion que le produit $pqr \ldots$ etc. peut être déterminé à partir des coefficients de X par des opérations rationnelles. Tout ce qu'il explique à ce sujet, pour l'équation du quatrième degré, est ceci (où a, b, c, d sont les racines de l'équation proposée $x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$) :

"On m'objectera sans doute que j'ai supposé ici que la quantité pqr était un nombre réel et que son carré $p^2q^2r^2$ était positif. Mais cela peut être douteux, puisque si les racines a, b, c pouvaient être des nombres imaginaires, il pourrait alors arriver que le carré de pqr, qui en est composé, devienne négatif. À cela je réponds que ce cas ne peut jamais arriver. Car si quelques-unes des racines a, b, c, d sont des nombres imaginaires, nous savons néanmoins qu'il faut avoir $a + b + c + d = 0$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = B$, $abc + abd + acd + bcd = -C$ (Euler a, par erreur, noté C au lieu de $-C$, c'est pourquoi il déclare plus tard également $pqr = C$, de manière incorrecte.), $abcd = D$, les quantités B, C, D étant des nombres réels. Mais comme $p = a + b, q = a + c, r = a + d$, leur produit $pqr = (a+b)(a+c)(a+d)$ est déterminable, comme nous l'avons vu, à partir des quantités B, C, D et sera par conséquent un nombre réel, tout comme on a effectivement que $pqr = -C$ et $p^2q^2r^2 = C^2$. On voit tout aussi bien que dans les équations supérieures les mêmes circonstances doivent se produire et qu'on ne peut pas me faire d'objections de ce côté-là."

La condition que le produit pqr puisse être déterminé de B, C, etc. par des opérations rationnelles, Euler ne l'a ajoutée nulle part, mais semble l'avoir eue à l'esprit depuis le début, car sans elle la démonstration ne pourrait avoir aucune force. Or, il est certainement vrai que dans les équations du quatrième degré, on développe le produit $(a + b)(a + c)(a + d)$, on obtient $a^2(a + b + c + d) + abc + abd + acd + bcd = -C$. Cependant il ne semble pas suffisamment clair comment ce produit peut être calculé à partir des coefficients, par des opérations rationnelles, dans toutes les équations de degré supérieur.

Le célèbre de Foncenex, qui le premier a remarqué cela (voir *Miscell. phil. Math. Soc. Taurin.* Tome I, p. 117.), soutient avec raison que le procédé perd toute force sans une démonstration rigoureuse de cette hypothèse. Il admet qu'une telle démonstration lui paraît tout à fait difficile et raconte la voie qu'il a essayée mais en vain [5]

Or cette question se règle sans difficulté par la méthode suivante (dont je ne puis ici que donner un résumé) : bien que dans les équations du quatrième degré il ne soit pas suffisamment clair que le produit $(a+b)(a+c)(a+d)$ soit déterminable par les coefficients B, C, D, on perçoit cependant facilement que ce produit est aussi égal à $(b + a)(b + c)(b + d)$, ainsi qu'à $(c + a)(c + b)(c + d)$, et enfin à $(d + a)(d + b)(d + c)$ [6].

Par conséquent, le produit pqr sera égal au quart de la somme $(a + b)(a + c)(a + d) + (b + a)(b + c)(b + d) + (c + a)(c + b)(c + d)$ qui, lorsqu'elle sera élaborée, sera une fonction intégrale rationnelle

[5] Dans cet exposé une erreur semble s'être glissée. À la p.118, 1.5, au lieu de la lettre p ("on choisissait seulement celles où intervient p etc.") il faut lire nécessairement "une même racine quelconque de l'équation proposée", ou quelque chose de semblable, car autrement cela n'aurait aucun sens.

[6] *Note du traducteur : car* $a + b + c + d = 0$.

des racines a, b, c, d de telle sorte que toutes les racines entrent dans le même rapport comme on peut le voir sans difficulté. De telles fonctions peut en effet toujours être exprimé par les coefficients de l'équation dont les racines sont a, b, c, d.

La même chose se produit aussi quand le produit pqr est ramené à cette forme : $\frac{1}{2}(a+b-c-d).\frac{1}{2}(a+c-b-d).\frac{1}{2}(a+d-b-c)$, et il est facile de voir d'avance que dans ce produit, une fois développé, a, b, c, d interviennent de la même manière. En même temps, les mathématiciens expérimentés en déduiront comment cette méthode peut être appliquée aux équations de degré supérieur. Je réserve pour une autre occasion l'exposition complète de cette démonstration, que je ne présente pas par souci de brièveté, ainsi qu'une étude plus complète sur des applications semblables aux fonctions de plusieurs variables.

Je remarque en outre qu'outre ces quatre objections, il y a encore d'autres points critiques à relever dans la démonstration d'Euler, que je passerai cependant sous silence, afin de ne pas passer pour un censeur trop sévère. La démonstration, telle qu'Euler l'a exposée, ne peut en aucune façon être considérée comme complète.

Après cette démonstration, Euler montre encore par une autre voie, un théorème pour les équations dont le degré n'est pas une puissance binaire afin de réduire leur résolution à celle des équations dont le degré est une puissance binaire : mais comme cette dernière méthode est également sujette à toutes les objections (sauf pour la puissance de 2 qu'est la puissance quatrième) que la première démonstration générale, il n'est pas nécessaire de l'expliquer ici de façon plus développée.

9.

Dans le même traité, Euler s'est efforcé de démontrer notre théorème d'une autre manière encore (p. 163), dont la substance est contenue dans ce qui suit : Pour une équation donnée $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2}+$ etc.$= 0$, il n'a en effet pas été possible jusqu'à présent de trouver une expression analytique de ses racines lorsque $n > 4$. Mais il paraît néanmoins certain (comme l'affirme Euler) qu'une telle expression ne peut contenir que des opérations arithmétiques et des extractions de racines, qui seront d'autant plus compliquées que n sera grand.

Si cela est admis, Euler montre fort élégamment que, si compliqués que soient les radicaux entre eux, la valeur de la formule sera toujours représentée sous la forme $M + N\sqrt{-1}$, où M, N sont des quantités réelles.

Contre ce raisonnement, on peut objecter qu'après tant de travaux de si grands mathématiciens, il reste bien peu d'espoir de parvenir jamais à une solution générale des équations algébriques. Il paraît de plus en plus probable qu'une telle solution est entièrement impossible et contradictoire. Il ne faut pas du tout considérer cela comme un paradoxe, car *ce qu'on appelle communément la solution d'une équation n'est en réalité rien d'autre que sa réduction à des équations pures* (équations binaires). Car la solution des équations pures n'est pas ici enseignée, mais présupposée ; et si vous exprimez les racines d'une équation $x^m = H$ par $\sqrt[m]{H}$, vous ne l'avez en aucune façon résolue, et vous n'avez pas fait plus que si vous aviez imaginé un symbole pour désigner la racine d'une équation $x^n + Ax^{n-1}+$ etc.$= 0$ et que vous aviez posé la racine comme égale à ce symbole.

Il est vrai que les équations pures (binaires) se distinguent nettement de toutes les autres en raison de la facilité avec laquelle on peut trouver leurs racines par approximations et en raison de la belle relation que les racines entretiennent entre elles.

Il n'y a donc rien à reprocher aux analystes qui ont désigné leurs racines par un symbole spécial. Mais de ce que ce symbole soit élevé à la dignité d'être intégré à l'ensemble des *expressions analytiques*, tout comme les symboles arithmétiques d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et de puissance, il ne s'ensuit pas du tout que la racine d'une équation quelconque puisse être exprimée par ces expressions, à moins qu'il ne soit tacitement présupposé, sans raison suffisante, que la solution d'une équation quelconque puisse se réduire à la solution d'équations pures. Il n'est peut-être pas si difficile de démontrer en toute rigueur l'impossibilité déjà pour le cinquième degré ; je rendrai compte plus en détail de mes recherches sur cette question dans un autre endroit. Il suffit ici de dire que la possibilité qu'il existe une solution générale des équations, prise dans ce sens, est jusqu'ici très douteuse, et qu'une démonstration dont toute la force dépend entièrement de cette supposition n'a, dans l'état actuel de la question, aucun poids.

10.

Plus tard, le célébre de Foncenex remarqua le défaut de la première démonstration d'Euler (ci-dessus, article 8, quatrième objection) mais il ne parvint pas à le supprimer. Il essaya donc encore une autre méthode et la publia dans son célèbre traité p. 120 [7]. Elle consiste en ce qui suit.

Soit une équation $Z = 0$ où Z désigne une fonction de degré m de la variable z. Si m est un nombre impair, il est bien connu que cette équation a une racine réelle ; si au contraire m est pair, Foncenex s'efforce de démontrer que l'équation a au moins une racine de la forme $p+q\sqrt{-1}$, de la manière suivante. Soit $m = 2^n.i$ où i désigne un nombre impair, et supposons que z^2+uz+M soit un diviseur de la fonction Z.

Alors les seules valeurs possibles de u seront les sommes des racines de l'équation $Z = 0$ prises deux à deux (avec des signes interchangés). Donc u aura $\dfrac{m.(m-1}{1.2} = m'$ valeurs et si u est supposé déterminé par une équation $U = 0$ (où U désigne une fonction entière de u et de coefficients connus dans Z), alors cette équation sera de degré m'. Il est assez facile de voir que m' sera un nombre de la forme $2^{n-1}.i'$, où i' est un nombre impair. Si m' n'est pas impair, supposons que $u^2 + u'u + M'$ soit à son tour un diviseur de U. Il est clair que par un raisonnement similaire u' est déterminé par une équation $U' = 0$, où U' est une fonction de u de degré $\dfrac{m'(m'-1)}{1.2}$. En posant $\dfrac{m'(m'-1)}{1.2} = m''$, alors m'' sera un nombre de la forme $2^{n-2}.i''$, où i'' désigne un nombre impair. Si m'' n'est toujours pas impair, considérons que $u'^2 + u''u' + M''$ est un diviseur de U' ; alors u'' sera déterminé par une équation $U'' = 0$. Si celle-ci est considérée comme étant de degré

[7] Dans le second tome de ces *Miscellaneorum* (Mélange), p. 337, se trouvent des éclaircissements sur cette question : cependant, ceux-ci ne concernent pas la recherche présente mais les logarithmes des quantités négatives.

m''', alors m''' sera un nombre de la forme $2^{n-3}.i'''$. Il est manifeste que dans la suite d'équations $U = 0$, $U' = 0$, $U'' = 0$ etc., la n-ième équation sera de degré impair et aura donc une solution réelle.

Posons pour simplifier $n = 3$, de sorte que l'équation $U'' = 0$ a pour racine réelle u'', on voit sans peine que le même raisonnement est valable pour toute autre valeur de n. Par conséquent, dit Foncenex, le coefficient M'' peut être calculé rationnellement à partir de u'' et des coefficients de U' (qui seront des fonctions entières des coefficients de Z, comme on le voit facilement), soit à partir de u'' et des coefficients de Z, et est donc réel.

Il en résulte que la racine de l'équation $u'^2 + u''u' + M'' = 0$ sera contenue dans la forme $p + q\sqrt{-1}$ et ces racines satisfont évidemment l'équation $U' = 0$; c'est pourquoi toute valeur de u' sera sous la forme $p + q\sqrt{-1}$. En outre, le coefficient M' peut être calculé (de la même manière que précédemment) à partir de u' et des coefficients de Z et sera aussi de la forme $p + q\sqrt{-1}$. Par conséquent, les racines de l'équation $u^2 + u'u + M' = 0$ seront aussi de cette forme, et elles satisferont certainement l'équation $U = 0$ c'est-à-dire que cette équation aura une racine de la forme $p + q\sqrt{-1}$. Enfin, il résulte de cela de la même manière que M et certainement une racine de l'équation $z^2 + uz + M = 0$ sont également de cette forme, cette racine satisfera manifestement l'équation donnée $Z = 0$ Par conséquent, toute équation a au moins une racine de la forme $p+q\sqrt{-1}$.

11.

Les objections 1, 2, 3 que j'ai élevées contre la première démonstration d'Euler (article 8) ont la même force contre cette méthode, mais avec cette différence que la seconde objection, à laquelle la démonstration d'Euler n'était soumise que dans certains cas spéciaux, frappe la démonstration de Foncenex dans tous les cas. Car on peut démontrer tout d'abord que toutes les fois où l'on peut donner une formule qui exprime rationnellement le coefficient M' en fonction de u' et des coefficients dans Z, cette formule deviendra nécessairement indéterminée pour plusieurs valeurs de u'.

De même une formule qui exprime le coefficient M" par u' deviendra indéterminée pour plusieurs valeurs de u" etc. Ceci devient très clair quand on suppose par exemple une équation du quatrième degré. Posons donc m = 4 et les racines de l'équation $z = 0$ peuvent être $0, 0, 0, 0$. Il est alors clair que l'équation $U = 0$ sera du sixième degré avec des racines $(7 + 7).(7+).(7+)0.5(1 + 1) * 0.2(+)$, et $(+)$. L'équation $U = 0$ sera alors du quinzième degré et les valeurs de u' seront :

$$7 + 7 + 5, 27 + 7 + 7, 27 + +, 27 + 7+, 2 + ++, 20 + +, 2 + 7 + 7, 25 + +,$$

$$20 + 0 + 0,\ 27 + 0 + 0,\ 20 + 0 + 20 + 0 + 0 + 0 + 0,\ 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$$

Il faut déjà s'arrêter à cette équation, car elle est de degré impair, et elle aura bien la racine réelle $+ + +$ (qui sera égale au premier coefficient de Z de signe opposé et sera donc non seulement réelle mais rationnelle si les coefficients de Z sont rationnels). Mais on le voit sans difficulté : si l'on donne une formule qui exprime la valeur de M' par la valeur correspondante de u' par des opérations rationnelles, alors cette formule deviendra nécessairement indéterminée pour $u = + + C + C$. Car cette valeur sera trois fois la racine de UO et à elle correspondront trois valeurs de M', à savoir $(0+)(+0), (0+)(0+)$ et $(+)(+)$ qui peuvent toutes être irrationnelles. Mais il est évident que dans ce cas une formule rationnelle ne peut produire ni une valeur irrationnelle de M' ni trois valeurs différentes. De cet exemple on peut conclure suffisamment que la méthode de Foncenex n'est pas du tout satisfaisante : pour livrer une méthode complète à tous égards il faut plutôt approfondir beaucoup plus la théorie de l'élimination.

12.

Enfin, l'illustre LaGrange traite de notre théorème dans son ouvrage Sur la forme des racines imaginaires des équations, Nouv. Mem. de l'Acad. de Berlin 1772, p. 222 et suivantes. Ici ce grand mathématicien s'applique principalement à combler le défaut de la première démonstration d'Euler, et il a en effet examiné particulièrement ce qui constitue la troisième et la quatrième objection ci-dessus (article 8) si profondément qu'il ne reste plus rien à désirer, sinon que peut-être quelques doutes semblent subsister dans cette démonstration.

un ancien traité sur la théorie de l'élimination (sur laquelle repose totalement la présente enquête). Cependant, il n'a même pas abordé la première objection ; de plus, l'ensemble du traité est construit sur la supposition que toute équation de degré m a en effet m racines.

Après avoir étudié en détail les preuves publiées jusqu'à présent, j'espère qu'une nouvelle démonstration de ce théorème très important, fondée sur des fondements entièrement différents, ne sera pas mal accueillie par les experts. Je vais tout de suite expliquer cette démonstration.

13.

Lemme : Soit m un nombre entier positif quelconque. Alors la fonction $\sin mx + \sin(m1)$" est divisible par $xx - 2\cos /rx + rr$.

Preuve : Forme 1, la fonction est 0 et donc divisible par n'importe quel facteur. Forme = 2, le quotient est sin, $et pour toute valeur supérieure le quotient sera$ $+ \sin 2x + \sin 3mx * 4 +$ etc , $+ \sin(m1)2$, On confirme facilement que le produit de cette fonction multiplié par $xx - 2\cos rx + rr$ est égal à la fonction donnée.

14.

Lemme : Si la quantité r et l'angle sont déterminés de telle manière que les équations soient vraies $r * \cos m + Ar * \cos(m-1) + Br * 2\cos(m-2) + ... + Kir\cos 20 + Lr\cos + N = 0(1)r + Ar\sin(m-1)/7 + Er2\sin(m-2$.

alors la fonction $x + Ax + Bx - 2 + ...Kxx + Lx + MX$ sera divisible par le facteur du second degré $xx - 2\cos rx + rr$ si seulement $r\sin$ n'est pas 0. Mais si $r\sin r = 0$ alors cette fonction sera divisible par le facteur simple x-rcos /7.

Preuve : I. Comme dans l'article précédent, les quantités suivantes seront toutes divisibles par $xx - 2\cos x + ri$

$+\sin(m-1)+1$
$UnA\sin(m1)x + A\sin(m2)0\text{''}BKB\sin(m2)x + B\sin(m3)etc.K\sin 2rrxLLMetc. + K\sin + M\sin(-)r$

La somme de ces quantités sera donc aussi divisible par $xx-2\cos rx+rr$. Les premiers termes de ces quantités. donnent la somme $\sin rX$; les seconds termes additionnés donnent 0 à cause de (2) ; et en effet la somme des troisièmes termes s'annule aussi, comme on le voit facilement si l'on multiplie (1) par sin, $(2) par \cos etsil'onsoustraitl'undesproduitsdel'autre.Ils'ensuitdoncquelafonction \sin rX$ est divisible par $xx - 2\cos /7rx + 1r$ et de même la fonction X, tant que $r\sin$ n'est pas 0.

II. Mais si r $\sin = 0, alorssoitr = 0 soit \sin = 0. Danslepremiercas, M = 0 àcausede(1), etdoncXseradivisiblepa$
$1\cos 3 + 1 etgénéralement \cos n \cos\text{''}. Parconséquent, Xsera = 0 àcausede(1) lorsquexestdéfini =$
$r\cos, etparconséquentlafonctionXseradivisibleparx - \cos .QES$

15.

Le théorème remarquable est souvent démontré à l'aide de nombres imaginaires, cf. Euler, *Introduction à l 'analyse infinitésimale*, Tome I p. 110 ; je considère qu'il vaut la peine de montrer comment il peut être facilement obtenu sans les utiliser. Il est tout à fait évident que pour la démonstration de notre théorème, il suffit de montrer : *Soit X de la forme $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + Lx + M$ donnée, alors r et φ peuvent être déterminés de telle manière que les égalités (1) et (2) soient vraies.* Car il s'ensuit que X a un facteur réel du premier ou du second degré ; la division (par ce facteur) produit nécessairement un quotient réel de degré inférieur qui, pour la même raison, aura aussi un facteur du premier ou du second degré. En continuant cette opération, X sera enfin décomposé en facteurs réels du premier et du second degré. C'est donc le point principal des recherches suivantes que de prouver ce théorème.

16.

Considérons un plan infini fixe (le plan du tableau Fig. 1) et dans ce plan une droite fixe infinie GC passant par le point fixe C. Choisissons une longueur quelconque comme unité afin que tous les segments de droites puissent être mesurés par des nombres. En tout point P du plan dont la distance à C est r et tel que $\widehat{GCP} = \varphi$, érigeons le segment de droite perpendiculaire au plan du tableau et de longueur égale à l'expression

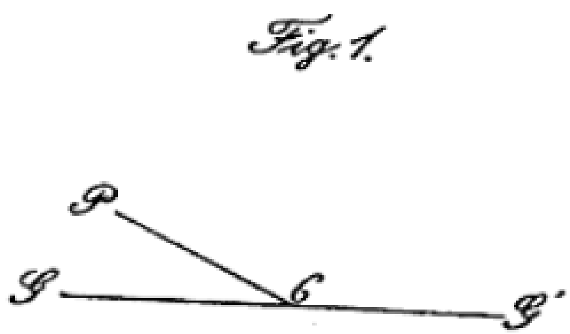
$$r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + \text{etc.} + Lr\sin\varphi,$$

que, pour plus de concision, je désignerai désormais par T. Je prendrai toujours une distance r positive, et pour les points qui tombent de l'autre côté de l'axe, l'angle φ devra être considéré comme augmenté de deux angles droits ou comme négatif (ce qui revient au même). Les extrémités de ces perpendiculaires seront situées au-dessus du plan pour les valeurs positives de T, au-dessous pour les valeurs négatives, et sur le plan lui-même si T s'annule ; et elles seront sur une surface courbe, continue et infinie dans toutes les directions, que, pour abréger, j'appellerai désormais la *première surface*.

De la même manière, on peut rapporter au même plan, au même centre et au même axe, une seconde surface dont la hauteur au-dessus de tout point du plan sera

$$r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + \text{etc.} + Lr.\cos\varphi + M,$$

expression que je désignerai toujours par U, pour simplifier. Cette surface, qui sera également continue et infinie dans toutes les directions, je la distinguerai de la première surface en la désignant par l'appellation de *seconde surface*.
Il est alors évident que toute la tâche consiste à montrer qu'il existe au moins un point qui se trouve simultanément dans le plan, sur la première surface et sur la seconde surface. Sur la Figure 1, il faut que P, T et U soient confondus.



17.

On voit aisément que la première surface se trouve en partie au-dessus et en partie au-dessous du plan ; car il est clair qu'à une distance au centre r suffisamment grande, les termes de T autres que le premier terme ne contribuent à rien par rapport à ce premier $r^m \sin m\varphi$; mais que T peut être rendu positif aussi bien que négatif selon la valeur choisie pour l'angle φ. Par conséquent, le plan fixe sera nécessairement coupé par la première surface. Cette intersection du plan avec la première surface, je l'appellerai la *première courbe*, et elle sera donc déterminée par l'équation $T = 0$. Pour la même raison, le plan sera intersectée par la seconde surface. L'intersection constitue une courbe déterminée par l'équation $U = 0$ que j'appellerai la *seconde courbe*. En particulier, chacune de ces courbes est constituée de plusieurs branches qui peuvent généralement être séparées, mais dont chacune sera une courbe continue.

En effet, la première courbe sera toujours celle qu'on appelle complexe, et l'axe GC doit être considéré comme faisant partie de cette courbe car quelle que soit la valeur donnée à r, T sera toujours nul toutes les fois que $\varphi = 0$ ou 180°. Mais il vaut mieux considérer comme une seule courbe la composée de toutes les branches passant par des points quelconques où $T = 0$ (selon l'usage généralement admis en mathématiques supérieures). Et de faire de même avec toutes les branches passant par des points quelconques où $U = 0$ À l'évidence, la tâche se réduit maintenant à démontrer qu'il existe dans notre plan au moins un point où une branche de la première courbe est coupée par une branche de la seconde courbe. Pour cela, il est impératif d'examiner de plus près la nature de ces courbes.

18.

Tout d'abord, je remarque que les deux courbes sont algébriques, et d'ordre m si on les rapporte à des coordonnées orthogonales. Si maintenant on suppose l'origine en C, les abscisses x prises dans la direction de G, et les ordonnées y correspondantes vers P, alors $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ et donc généralement pour tout n :

$$r^n \sin n\varphi = nx^{n-l}y - \frac{n\cdot n-1\cdot n-2}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3 + \frac{\cdot\ldots\cdot n-4}{1\cdot\ldots\cdot 5}x^{n-5}y^5 - \text{etc.},$$

$$r^n \cos n\varphi = x^{n-l}y - \frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2 + \frac{\cdot n-1\cdot n-2\cdot n-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}y^4 - \text{etc.}.$$

Ainsi T, comme U, seront constitués de plusieurs termes de la forme $ax^\alpha y^\beta$ où α et β désignent des nombres entiers positifs dont la somme est inférieure ou égale à m. De plus, on voit facilement que tous les termes de T contiennent un facteur y et que, par conséquent, la première courbe est au sens strict composée d'une droite (d'équation $y = 0$) et d'une courbe d'ordre $m - 1$, bien que cette distinction n'ait pas à être considérée ici.

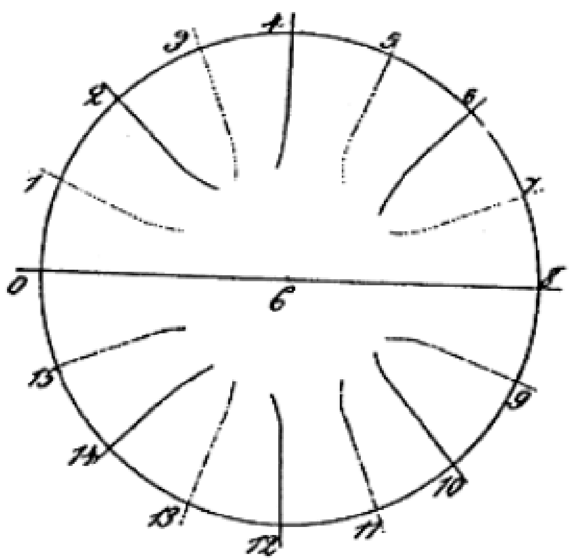
Il est plus important de chercher à savoir si la première courbe et la seconde ont des branches infinies, combien il y en a et où elles se trouvent.

À une distance infinie du point C, la première courbe dont l'équation est

$$\sin m\varphi + \frac{A}{r}\sin(m-1)\varphi + \frac{B}{r^2}\sin(m-2)\varphi\text{etc.} = 0,$$

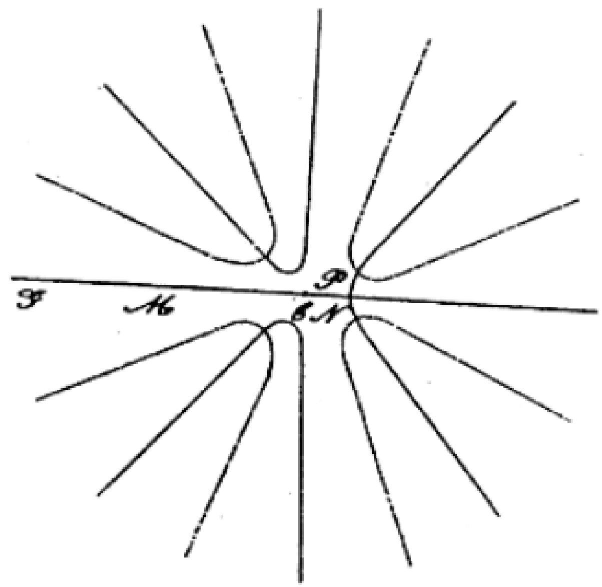
coïncidera avec la courbe dont l'équation est $\sin m\varphi = 0$. Celle-ci représente m droites se coupant au point C, dont la première est l'axe GCG', les autres étant inclinées par rapport à cet axe selon des angles $\frac{1}{m}180^\circ$, $\frac{2}{m}180^\circ$, $\frac{3}{m}180^\circ$, etc. Ainsi, la première courbe a $2m$ branches infinies qui diviseront la circonférence du cercle de rayon infini en $2m$ parties égales, de sorte que la circonférence sera coupée par la première branche où le cercle et l'axe se rencontrent, par la seconde branche à la distance angulaire de $\frac{1}{m}180^\circ$, par la troisième branche à la distance $\frac{2}{m}180^\circ$ etc. De même, la seconde courbe aura à distance infinie du centre une asymptote d'équation $\cos m\varphi = 0$. Cette asymptote est un composé de m droites qui se coupent au point C selon des angles égaux de telle manière que la première droite forme avec l'axe CG un angle de $\frac{1}{m}90^\circ$, la seconde un angle de $\dfrac{3}{m}90^o$, la troisième un angle de $\dfrac{5}{m}90^o$, etc. Par conséquent, la seconde courbe aura aussi $2m$ branches infinies, dont chacune occupera l'espace entre deux branches successives de la première courbe de telle sorte qu'elles coupent la circonférence d'un cercle de rayon infini en des points distants d'un point de vue angulaire de l'axe de $\dfrac{1}{m}90^o$, $\dfrac{3}{m}90^o$, $\dfrac{5}{m}90^o$, etc. De plus, il est clair que l'axe lui-même constitue toujours deux branches infinies de la première courbe, à savoir la première et la $(m+1)$-ième. D'une manière perceptuellement claire, cette position des branches est montrée sur la figure 2, construite pour le cas $m = 4$ où les branches de la seconde courbe sont pointillées pour les distinguer des branches de la première courbe ceci est également à noter dans la quatrième figure [8].

Fig. 2.



[8]La quatrième figure a été construite en supposant $X = x^4 - 2x^2 + 3x + 10$ grâce à laquelle les lecteurs moins familiers avec les investigations générales et abstraites peuvent alors examiner la position des deux courbes dans un cas concret. La longueur de CG est prise égale à 10 et $CN = 1.26255$.

Fig. 4.



Je montrerai dans les articles suivants comment développer ces conclusions sans l'aide de l'infini.

19.

Théorème. *Toutes choses étant égales par ailleurs, on peut tracer un cercle de centre C sur la circonférence duquel se trouvent $2m$ points pour lesquels $T = 0$ et autant de points pour lesquels $U = 0$ et de telle manière que chacun des seconds points se trouvera seul entre deux points de la première espèce.*

Si S la somme de tous les coefficients $A, B, \ldots, K, L, M$ est prise positivement et R et S sont tels que $R > S\sqrt(2)$ et $R > 1$ [9] alors j'affirme que ce qui a été énoncé dans le théorème se déroulera nécessairement pour un cercle de rayon R.

En d'autres termes, désignons pour abréger par (1) le point de la circonférence du cercle qui est à une distance angulaire de $\dfrac{1}{m}45^{\text{o}}$ du point de concours de la partie gauche de l'axe avec la circonférence [10], soit pour lequel $\varphi = \dfrac{1}{m}45^{\text{o}}$; de même désignons par (3) le point qui est à $\dfrac{3}{m}45^{\text{o}}$ de cette intersection, i.e. pour lequel $\varphi = \dfrac{3}{m}45^{\text{o}}$, par (5) le point tel que $\varphi = \dfrac{5}{m}45^{\text{o}}$, etc. jusqu'à $(8m-1)$ qui est à $\varphi = \left(8m - \dfrac{1}{m}\right)45^{\text{o}}$ vers la partie opposée), un total de $4m$ points sera obtenu

[9] Quand $S > \sqrt{\dfrac{1}{2}}$, la première condition inclut la seconde ; quand $S < \sqrt{\dfrac{1}{2}}$, la seconde inclut la première.

[10] Le point -1 du cercle unité ?

sur la circonférence, espacés régulièrement. Alors un point sera situé entre $(8m-1)$ et (1) pour lequel $T=0$, et des points similaires seront compris entre (3) et (5), entre (7) et (9), entre (11) et (13), etc., leur nombre étant égal à $2m$. Enfin, il n'existe aucun autre point que ces $4m$ points pour lequel T ou U est nul.

Preuve :

I. Au point (1), $m\varphi = 45^{\text{o}}$ et donc

$$T = R^{m-1}(R\sqrt{\frac{1}{2}} + A\sin(m-1)\varphi + \frac{B}{R}\sin(m-2) + etc. + \frac{L}{R^{m-2}}\sin\varphi).$$

Cependant, la somme $A\sin(m-1)\varphi + \dfrac{B}{R}\sin(m-2)\varphi +$ etc. ne peut certainement pas être supérieure à S et sera même nécessairement inférieure à $R\sqrt{\dfrac{1}{2}}$, d'où il découle que la valeur de T en ce point est nécessairement positive.

Plus important encore, T aura par conséquent une valeur positive tant que $m\varphi$ se situe entre 45^{o} et 135^{o}, c'est-à-dire que du point (1) au point (3), la valeur de T sera toujours positive. Pour la même raison T aura une valeur positive du point (9) jusqu'à (11), et plus généralement de tout point $(8k+1)$ jusqu'à $(8k+3)$ où k désigne un entier quelconque. De même, T aura partout des valeurs négatives entre (5) et (7), entre (13) et (15) etc. et généralement entre $(8k+5)$ et $(8k+7)$ et dans tous ces intervalles, il ne pourra être nul en aucun endroit. Mais parce qu'en (3) cette valeur est positive et qu'en (5) elle est négative, T sera nécessairement $= 0$ quelque part entre (3) et (5) ; et certainement aussi entre (7) et (9), entre (11) et (13) etc. jusqu'à et y compris dans l'intervalle entre $(8m-1)$ et (1), de sorte qu'au total $T=0$ en $2m$ points. C.Q.F.D.

II. Outre ces $2m$ points, il n'y en a pas d'autres qui possèdent cette propriété, comme on peut le voir ainsi : puisqu'il n'y en a pas entre (1) et (3), (5) et (7) etc., de tels points ne pourraient exister d'aucune autre manière sauf si dans un intervalle entre (3) et (5), ou entre (7) et (9) etc., il y en avait au moins deux. T aurait nécessairement un maximum ou un minimum dans le même intervalle et il faudrait que $\mathrm{d}T/\mathrm{d}\varphi = 0$.

Mais $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\varphi} = mR^{m-2}(R.\cos m\varphi + \dfrac{m-1}{m}.A\cos(m-1)\varphi + \text{etc.})$, et $\cos m\varphi$ est toujours négatif entre (3) et (5) et $|\cos m\varphi| > \sqrt{1/2}$ [11]. D'où il est facile de voir que dans tout cet intervalle $\mathrm{d}T/\mathrm{d}\varphi$ est une quantité négative, de même elle est positive partout entre (7) et (9), négative entre (11) et (13) etc., de sorte qu'elle ne peut être nulle dans aucun de ces intervalles, et donc cette supposition ne peut être maintenue. C'est pourquoi etc. CQFD.

De même, il est démontré que U a une valeur négative partout entre (3) et (5), (11) et (13) etc. et généralement entre $(8k+3)$ et $(8k+5)$ mais une valeur positive entre (7) et (9), (15) et (17) etc. et

[11] *(Note du traducteur)* : À l'époque de Gauss, $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ était généralement défini comme étant égal à $\pm 0,7071$, et pas comme seulement égal à $+0,7071$ comme c'est le cas aujourd'hui.

généralement entre $(8k+7)$ et $(8k+9)$. Il en résulte immédiatement que U doit s'annuler quelque part entre (1) et (3), entre (5) et (7) etc., c'est-à-dire en $2m$ points. De même, dans aucun de ces intervalles, on ne peut avoir '$\mathrm{d}U/\mathrm{d}\varphi = 0$ (ce qui est facilement démontré de la même manière que ci-dessus) : par conséquent, il n'y aura pas plus que ces $2m$ points où $U = 0$ sur la circonférence du cercle. CQFD.

De plus, la partie du théorème selon laquelle il n'existe pas plus de $2m$ points pour lesquels $T = 0$, ni plus de $2m$ points pour lesquels $U = 0$ peut également être prouvée par le fait que les équations $T = 0$, $U = 0$ décrivent des courbes d'ordre m qui ne peuvent être intersectées en plus de $2m$ points par un cercle vue comme une courbe d'ordre 2, comme cela est établi en Géométrie supérieure.

20.

Si l'on décrit un autre cercle autour du même centre avec un rayon supérieur à R et qu'on le divise de la même manière, alors sur ce cercle un point tombera aussi entre les points (3) et (5) et de même entre (7) et (9) etc. où $T = 0$. Et on voit facilement que moins le rayon de ce cercle diffère du rayon R, plus ces points particuliers entre (3) et (5) doivent être situés près les uns des autres sur les circonférences de ces deux cercles. La même chose se produira aussi lorsqu'on décrira un cercle avec un rayon un peu plus petit que R mais plus grand que $S\sqrt{2}$ et 1.

D'où l'on s'aperçoit sans difficulté que la circonférence du cercle tracé avec le rayon R est effectivement *coupée* par une branche de la première courbe en ce point entre (3) et (5) où $T = 0$ et il en est de même pour les autres points où $T = 0$ De la même manière, il est clair que la circonférence de ce cercle sera coupée par une branche de la seconde courbe en tous ces $2m$ points où $U = 0$ Ces conclusions peuvent aussi s'exprimer de la manière suivante :

Lorsqu'un cercle de la grandeur requise est tracé autour du centre C, alors $2m$ de branches de la première courbe et autant de branches de la seconde courbe y entreront, et en effet de telle manière que deux branches successives de la première courbe seront séparées par une branche de la seconde courbe en alternance. Voir la figure 2 où le cercle n'est cependant pas de grandeur infinie mais de grandeur finie.

Les numéros ajoutés aux branches individuelles ne doivent pas être confondus avec les numéros par lesquels j'ai désignés brièvement, dans cet article et les précédents, les intersections avec la circonférence.

21.

Déjà de cette position relative des branches entrant dans le cercle, on peut déduire de plusieurs manières qu'il doit nécessairement y avoir intersection d'une branche de la première courbe avec une branche de la seconde courbe à l'intérieur du cercle. Et je ne sais guère quelle méthode il faut choisir de préférence aux autres. La plus astucieuse semble être celle-ci : désignons par 0 (fig.

2) le point de la circonférence du cercle où celle-ci est coupée par la partie gauche de l'axe (axe qui est lui-même une des $2m$ branches de la première courbe) ; par 1, le point le plus proche où une branche de la seconde courbe pénètre dans la circonférence ; par 2, le point le plus proche de celui-là où la seconde branche de la première courbe entre dans la circonférence, et ainsi de suite jusqu'à $4m - 1$. De cette manière une branche de la première courbe entre dans le disque en tout point marqué par un nombre pair, tandis qu'une branche de la seconde courbe entre en tout point représenté par un nombre impair.

Mais selon la Géométrie supérieure, on trouve que toute courbe algébrique (ou les parties individuelles d'une telle courbe algébrique si elle est constituée de plusieurs parties) soit se retourne sur elle-même, soit s'étend jusqu'à l'infini.

En conséquence, une branche d'une courbe algébrique quelconque qui entre dans un espace limité, doit nécessairement sortir de cet espace quelque part [12]. De là on conclut facilement que tout point marqué par un nombre pair (ou pour abréger, tout *point pair*) doit être relié dans le cercle à un autre point pair par une branche de la première courbe, et de même tout point marqué par un nombre impair à un point semblable par une branche de la seconde courbe. Or, quoique cette connexion de deux de ces points puisse être très variée suivant la nature de la fonction X, de sorte qu'en général elle ne peut être clairement décrite, il est pourtant facile de prouver *qu'il existe toujours une intersection de la première courbe avec la seconde courbe, quelle que soit finalement cette intersection.*

22.

La preuve que cela se produit nécessairement semble pouvoir être donnée plus précisément de manière indirecte. Supposons que les jonctions des paires de points pairs et des paires de points impairs puissent être disposées de telle manière qu'il n'y ait aucune intersection entre une branche de la première courbe et une branche de la seconde courbe. Comme l'axe fait partie de la première courbe, le point 0 sera évidemment relié au point $2m$. Le point 1 ne peut donc être relié à aucun point situé au-dessous de l'axe, c'est-à-dire à aucun point marqué par un nombre supérieur à $2m$, car sinon la courbe qui les joindrait couperait nécessairement l'axe. C'est pourquoi si l'on suppose

[12] Il semble avoir été prouvé avec suffisamment de certitude qu'une courbe algébrique ne peut ni se rompre brusquement n'importe où (comme cela arrive par exemple avec la courbe transcendante dont l'équation est $y = \frac{1}{\ln x)}$ ni se perdre, pour ainsi dire, en un point quelconque après une infinité de tours (comme la spirale logarithmique). Autant que je sache, personne n'a émis de doute à ce sujet. Cependant, si quelqu'un me le demande, je me chargerai de donner une preuve qui ne soit sujette à aucun doute, à une autre occasion. Dans le cas présent, cela est vraiment manifeste : supposons qu'une branche, par exemple 2, ne sorte nulle part du cercle (figure 3). Vous pourriez alors entrer dans le cercle entre 0 et 2, puis faire le tour de toute cette branche (qui devrait se perdre à l'intérieur du cercle), et enfin sortir à nouveau du cercle entre 2 et 4 de telle sorte que, sur tout le trajet, elle n'ait pas croisé la première courbe. C'est là une absurdité évidente, car au point où vous entrez dans le cercle vous avez la première surface au-dessus de vous, et à la sortie au-dessous de vous. Il faut donc nécessairement que vous soyez quelque part tombé sur la première surface elle-même, c'est-à-dire sur un point de la première courbe. Cependant, de ce raisonnement fondé sur les principes de la géométrie de position, principes qui ne sont pas moins vrais que ceux de la géométrie de dimension, il résulte seulement ceci : si vous entrez dans le cercle par une branche quelconque de la première courbe, vous pouvez sortir du cercle en un autre endroit, tout en restant toujours sur la première courbe. Il ne s'ensuit pas, cependant, que tout votre parcours soit une courbe continue au sens où on l'entend en géométrie supérieure. Mais il suffit ici que le parcours soit une courbe continue au sens habituel, c'est-à-dire nulle part interrompu et partout continu.

que 1 est relié au point n, alors $n < 2m$.

Pour une raison analogue, si l'on établit que 2 est relié à n', alors $n' < n$, car sinon, la branche $2 \ldots n'$ couperait nécessairement la branche $1 \ldots n$. Pour la même raison, le point 3 sera relié à l'un des points compris entre 4 et n' ; et évidemment, lorsque 3, 4, 5, etc. sont considérés comme reliés respectivement à n'', n''', n'''' etc., alors n''' devra être entre 5 et n'', n'''' entre 6 et n''' etc. D'où il est certain qu'on finira par atteindre un point h relié au point $h+2$, et alors la branche qui entre dans le cercle au point $h+1$ coupera nécessairement la branche reliant les points h et $h+2$. Mais comme l'une de ces deux branches appartient à la première courbe, l'autre à la seconde courbe, il est donc manifeste que l'hypothèse est contredite et qu'en effet une intersection de la première courbe avec la seconde courbe existe nécessairement quelque part.

Lorsque ceci est combiné avec ce qui précède, on conclura de toutes les recherches présentées que le théorème suivant a été prouvé en toute rigueur : *toute fonction entière rationnelle algébrique d'une seule variable peut être résolue en facteurs réels du premier et du second degré.*

23.

De plus, de ces fondements, il n'est pas difficile de déduire des mêmes principes qu'il y aura non seulement une, mais au moins m intersections de la première courbe avec la seconde, quoiqu'il puisse aussi arriver que la première courbe soit coupée par plusieurs branches de la seconde courbe en un même point. Dans ce cas, la fonction X aura plusieurs facteurs égaux. Mais comme il peut suffire ici d'avoir démontré la nécessité d'une seule intersection, je ne m'étendrai pas davantage sur cette question pour être bref. Pour la même raison, je n'examinerai pas plus en détail ici d'autres propriétés de ces courbes, par exemple qu'une intersection se fait toujours selon des angles droits ; ou bien si plusieurs branches de l'une ou l'autre courbe se rencontrent au même point, alors il y aura autant de branches infinies de la première courbe que de la seconde courbe, et celles-ci seront placées alternativement et se couperont à des angles égaux, etc.

Enfin, je remarque qu'il n'est pas du tout impossible de rendre la démonstration précédente, que j'ai ici fondée sur des principes géométriques, sous une forme purement analytique. Mais je crois que la représentation que j'ai exposée ici est moins abstraite et se présente sous les yeux de façon beaucoup plus claire qu'on ne peut l'espérer dans une démonstration analytique.

Pour terminer, j'indiquerai brièvement encore une autre méthode de démonstration de notre théorème, qui, au premier coup d'œil, paraîtra tout à fait différente non seulement de la démonstration précédente, mais de toutes les autres démonstrations exposées en détail ci-dessus, et qui pourtant est, au sens strict, la même que celle de d'Alembert si l'on regarde attentivement sa nature. Je la confie aux spécialistes pour lesquels j'ai ajouté ce texte et à qui je recommande de comparer cette méthode avec l'autre et d'explorer le parallélisme entre les deux.

24.

Au-dessus du plan de la figure 4 par rapport à l'axe CG et à un point fixe C, je suppose la première et la seconde surface de la même manière que précédemment. Prenons un point quelconque sur une branche quelconque de la première courbe pour lequel $T = 0$, (par exemple un point M quelconque de l'axe) et pour lequel $U \neq 0$. Progressons de ce point sur la première courbe dans la direction dans laquelle la valeur absolue de U décroît. Si par hasard au point M la valeur absolue de U décroît dans les deux directions, alors la direction dans laquelle on progresse n'a pas d'importance ; je dirai ci-après ce qu'il faut faire si U augmente dans les deux directions. Il est évident que si l'on progresse toujours le long de la première courbe, on parviendra nécessairement en un point pour lequel $U = 0$ ou en un point tel que la valeur de U deviendra minimale, par exemple le point N. Dans le premier cas, nous avons trouvé ce que nous cherchions ; dans le second cas, cependant, on peut prouver qu'en ce point, plusieurs branches de la première courbe se coupent (et en fait un nombre pair de branches). La moitié d'entre elles sont disposées de telle manière que si l'on se détourne dans l'une quelconque de ces branches, la valeur de U continuera à décroître (je dois, par souci de concision, omettre la démonstration de ce théorème, qui est plus longue que difficile.) Sur cette branche, on pourra alors progresser à nouveau jusqu'à ce que U devienne nul (comme cela se produit dans la figure 4 en P). Lorsqu'on se détourne encore, on arrivera finalement nécessairement à un point pour lequel $U = 0$.

On peut émettre un doute contre cette démonstration. Il se peut que, si loin que l'on progresse et bien que la valeur de U puisse toujours diminuer, cette diminution puisse devenir toujours plus lente et que la valeur puisse ne jamais atteindre une limite, ce qui correspond à la quatrième objection de l'article 6. Mais il n'est pas difficile de fixer une limite telle que, dès qu'on la franchit, la valeur de U non seulement change nécessairement toujours plus vite, mais ne puisse plus *décroître* davantage, de sorte qu'avant même d'atteindre cette limite, la valeur de 0 a dû déjà être atteinte.

Je me réserve d'approfondir davantage, dans une autre occasion, cette matière et tout ce que je n'ai pu qu'effleurer dans cette épreuve.

J'ai découvert les principes sur lesquels s'appuie cette démonstration au début d'octobre 1797.

Fig. 1.

Fig. 2.

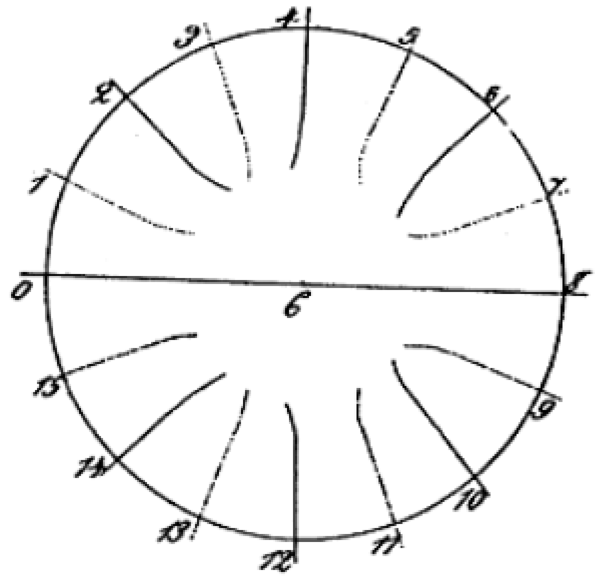


Fig. 4.

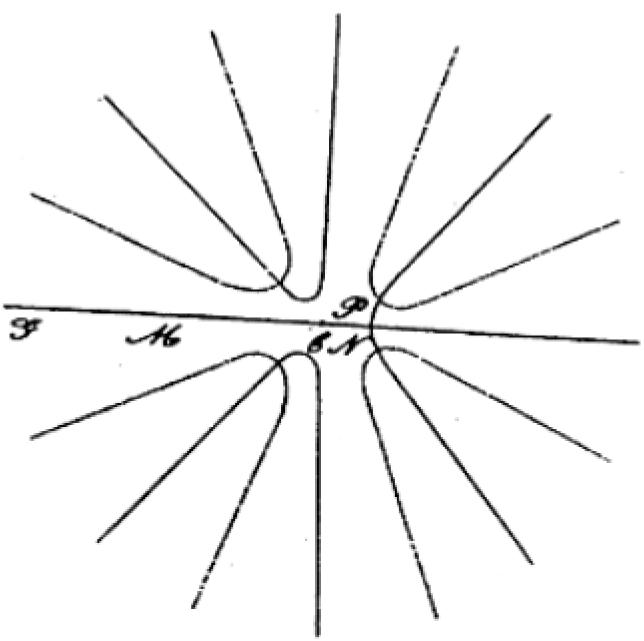
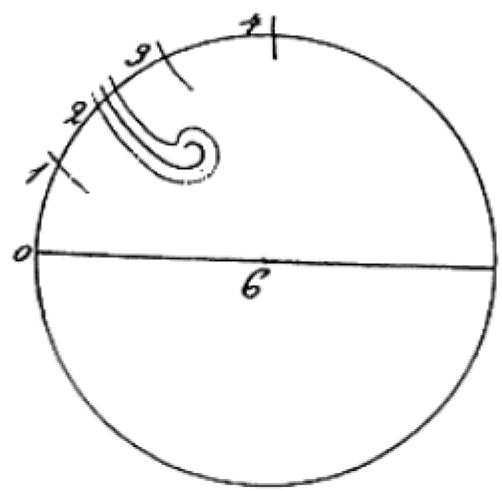


Fig. 3.



Avant-propos à la traduction de Ernest Fandreyer[13]

Il y a quelque chose qui ne va pas dans le titre "Nouvelle preuve du théorème...", comme le remarque Eric Temple Bell dans son article "*Le Prince des mathématiques*" (cf. dans *The World of Mathematics*, Vol. I de J. R. Newman) : il ne s'agit pas d'une nouvelle preuve mais de la première preuve de ce théorème. Toutes les "preuves" précédentes étaient erronées et donc non acceptables en tant que preuves.

Gauss a soumis ce travail remarquable à l'Université de Helmstedt, en Allemagne, comme thèse de doctorat et a obtenu son diplôme en 1799, à l'âge de 22 ans. Il a publié deux autres preuves, en latin comme cette première preuve, en 1816, et une quatrième preuve, en allemand, en 1850. La première preuve est l'une des réalisations monumentales de l'histoire des mathématiques. Des versions anglaises des deuxième et troisième preuves existent (par exemple, *A Sourcebook of Mathematics* de D.E. Smith contient une version anglaise de la partie essentielle de la deuxième preuve). Mais une recherche intensive et approfondie dans les bibliothèques universitaires des États-Unis et à la Bibliothèque du Congrès n'a pas permis de trouver une traduction anglaise de la première preuve (bien que cette preuve soit citée dans d'innombrables ouvrages sur l'algèbre, l'analyse et l'histoire des mathématiques). Si une version anglaise existe dans ce pays, elle n'est certainement pas facilement disponible. Pour remédier à cette lacune, cette traduction sera archivée et disponible sur Internet. Il est évident que le nombre de lecteurs sera toujours très faible. Mais c'est, après tout, le sort de beaucoup d'ouvrages que l'on trouve actuellement dans nos bibliothèques, et ce n'est pas une raison suffisante pour se passer entièrement d'une version anglaise de l'ouvrage célèbre de Gauss.

Cette traduction a suivi la règle : aussi précisément que possible, aussi librement que nécessaire [14]. Elle n'est donc pas dans le style de l'anglais du XXIe siècle, mais plutôt comme certains livres datant du début du XIXe siècle. Le lecteur qui veut se familiariser avec une œuvre importante d'un siècle antérieur appréciera probablement une traduction qui adhère au style de l'original. Pour cela, les longues phrases latines de Gauss ont été traduites en longues phrases anglaises, sauf lorsque cela était incompatible avec l'exigence de clarté. (Une phrase qui s'étend sur neuf lignes à l'écrit, comme par exemple dans l'article 9, peut difficilement être traduite en anglais intelligible sans la diviser en plusieurs phrases.) Dans la même veine, la ponctuation de l'original a été respectée lorsque cela était possible sans nuire à la clarté. Une représentation claire des idées de Gauss était, après tout, l'objectif primordial. Il faut cependant garder à l'esprit que ces idées ne sont pas si simples qu'une traduction, ou l'original d'ailleurs, en rendrait la lecture facile. Pourtant, bien que de nombreuses preuves modernes du théorème fondamental de l'algèbre existent, il semble utile de revenir à cette réalisation unique de Gauss. On espère que cette traduction facilitera une telle entreprise.

Traduit par : Ernest Fandreyer, M.S., Ed.D., Professeur émérite, Fitchburg State College (MA), Département de mathématiques

[13]La présente note est une transcription en Latex, suivie d'une traduction Google, reprise et améliorée autant que faire se peut à l'aide d'un petit livre en français aux éditions les bouquins Fusion (contenant également deux textes de Jonathan Tennenbaum et de Bruce Director), de la traduction en anglais de Ernest Fandreyer, téléchargeable ici https://www.quantresearch.org/Gauss_PhD_Dissertation.pdf, effectuée par Denise Vella-Chemla en octobre 2024.

[14]La traduction allemande du Dr W. Frahnert, de 1889, semble aller dans le sens inverse : aussi librement que possible, aussi précisément que nécessaire.

[peuvent être données de telles valeurs réelles qui peuvent satisfaire ces équations. Maintenant E. affirme : Si à f 1. On considère que non, O résultera où U sera une fonction intégrale de u et de coefficients connus seulement. Pour résoudre cette équation, O est d'un degré assez élevé et pour un degré indéterminé, il serait clairement impossible (comme E. lui-même le souligne)]