Une approche moderne du casse-tête des 15

Aaron F. Archer

1. Introduction. Dans les années 1870, le malicieux inventeur de casse-têtes Sam Loyd fit sensation aux États-Unis, en Grande-Bretagne et en Europe avec son désormais célèbre casse-tête des 15. Dans sa version originale, ce casse-tête se compose de quinze blocs carrés numérotés de 1 à 15, par ailleurs identiques, et d'un plateau carré suffisamment grand pour contenir 16 blocs. Les 15 blocs sont placés dans le plateau comme indiqué sur la figure 1, le coin inférieur droit étant laissé vide. Un mouvement autorisé consiste à glisser un bloc adjacent à l'espace vide dans cet espace. Ainsi, à partir de la position initiale, les blocs 12 ou 15 peuvent être glissés dans l'espace vide. Le but du jeu est d'effectuer une suite de mouvements autorisés pour échanger les positions des blocs 14 et 15 tout en remettant tous les autres blocs à leur position initiale.

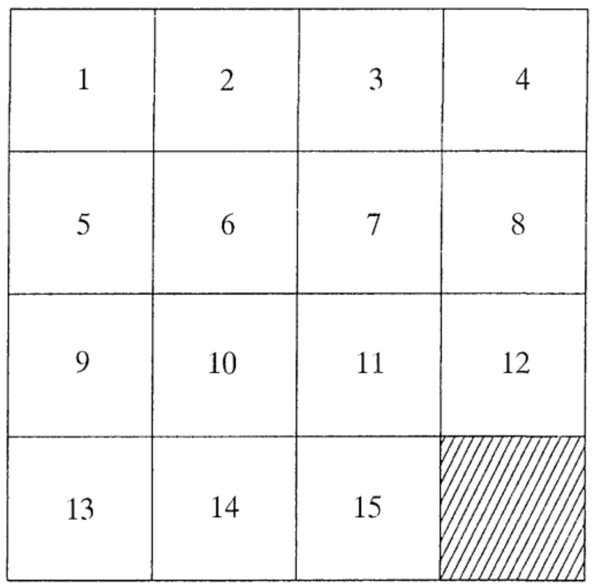

Figure 1. Position de départ du taquin. La case grisée est laissée vide.

Loyd écrit comment il a “rendu le monde entier fou” et que “le prix de 1000 $ offert pour la première solution correcte au problème n'a jamais été réclamé, bien que des milliers de personnes prétendent avoir accompli l'exploit”. Il poursuit :

> Les gens sont devenus fascinés par l'énigme et l'on raconte des histoires rocambolesques de commerçants qui ont négligé d'ouvrir leurs magasins ; d'un ecclésiastique distingué qui est resté sous un lampadaire toute une nuit d'hiver à essayer de se rappeler comment il avait accompli l'exploit... On dit que des pilotes ont fait s'écraser leurs avions et que des conducteurs de train ont fait passer leurs trains à toute vitesse devant les gares. Un célèbre rédacteur en chef de Baltimore raconte comment, parti déjeuner, il a été retrouvé par son équipe frénétique bien après minuit en train de faire rouler des petits morceaux de tarte sur une assiette ! [9]

Référence : Archer, A. F. (1999). A Modern Treatment of the 15 Puzzle. The American Mathematical Monthly, 106(9), 793–799.
Traduction : Denise Vella-Chemla, novembre 2025.

La raison de cette hystérie est, bien sûr, que le casse-tête de Loyd est insoluble. Chaque déplacement entraîne une transposition des 16 blocs (la case vide étant considérée comme contenant un bloc blanc), et pour que ce bloc blanc se retrouve dans le coin inférieur droit, il faut un nombre pair de déplacements, la permutation résultante est donc paire. Or, la position finale souhaitée est une permutation impaire de la configuration initiale, et est par conséquent impossible à obtenir. On peut supposer que Sam Loyd le savait, et l'on ne peut qu'imaginer le plaisir qu'il a pu prendre à rendre le public américain fou.

Ce casse-tête a inspiré de nombreux articles et références dans la littérature mathématique. Parmi ceux-ci, on peut citer deux articles publiés dans l'*American Journal of Mathematics* en 1879 par W. W. Johnson [7] et W. E. Story [13]. L'article de Johnson explique pourquoi les permutations impaires du puzzle sont impossibles à obtenir, tandis que celui de Story prouve que toutes les permutations paires sont possibles. Les rédacteurs étaient apparemment si réticents et sur la défensive à l'idée de publier des articles sur ce que certains pourraient qualifier de sujet futile qu'ils ont ajouté la justification suivante à la fin de l'article de Story :

> Le casse-tête des "15" a occupé une place prépondérante dans le débat public américain ces dernières semaines, et l'on peut affirmer sans risque d'erreur qu'il a captivé l'attention de neuf personnes sur dix, tous sexes et toutes conditions confondus. Pourtant, cela n'aurait pas incité les rédacteurs de l'*American Journal of Mathematics* à publier un article sur ce sujet si le principe de ce jeu ne reposait pas sur ce que tous les mathématiciens contemporains considèrent comme la conception la plus subtile et caractéristique de l'algèbre moderne : la loi de dichotomie applicable à la séparation des termes de tout système complet de permutations en deux groupes naturels et indéfectibles, une loi du monde intérieur de la pensée, qui préfigure en quelque sorte la relation polaire entre les vis à gauche et à droite, ou encore entre les objets dans l'espace et leurs reflets dans un miroir. En conséquence, les rédacteurs ont estimé qu'en présentant cette loi polaire a priori sous une forme concrète, par le biais d'un jeu qui a tellement marqué la pensée nationale qu'on pourrait presque le qualifier d'institution nationale, ils ne desserviraient pas leur science, mais qu'ils en promouvraient au contraire les intérêts. Quiconque s'y est adonné a sans doute reçu sa première leçon de théorie des déterminants. [13, p. 404]

Le casse-tête est un sujet populaire dans les ouvrages de mathématiques récréatives ou de pot-pourri mathématique, tels que [1], [2], [4], [5], [9] et [12], qui l'utilisent pour la plupart comme exemple afin d'illustrer les conséquences des permutations paires et impaires, à l'instar de [14]. Diverses sources ont proposé des variantes du casse-tête à 15 chiffres, notamment [3], [4], [6], [8], [10] et [15]. Aujourd'hui, ce casse-tête apparaît sur certains écrans de veille d'ordinateur, et une version est distribuée avec chaque ordinateur Macintosh.

La plupart des références au taquin expliquent l'impossibilité d'obtenir des permutations impaires et beaucoup énoncent le résultat de Story selon lequel toute permutation paire est possible, mais l'auteur de ces lignes n'a trouvé que trois démonstrations. R. M. Wilson [15] a publié un résultat plus général en 1974, que nous abordons à la fin de cet article. L'ouvrage de Ball et Coxeter [1] renvoie à [10] pour une démonstration, mais l'article ne tient pas sa promesse. La terminologie complexe de l'article de Story [13] le rend difficile à appréhender, et il ne tire évidemment pas parti des notations modernes développées depuis. Spitznagel [11] a publié une démonstration en 1967, mais a écrit plus tard : "Au fil des années, de nombreuses explications inutilement compliquées du taquin ont été publiées. J'avoue avoir moi-même publié l'une de ces explications excessivement compliquées" [12]. En effet, Herstein et Kaplansky [5] écrivent qu'"il ne semble pas exister de démonstration vraiment simple". Cet article vise à combler cette lacune.

2. Solution. Il convient de noter que la démonstration présentée ici a été élaborée indépendamment des démonstrations précédentes, mais partage par ailleurs certaines idées avec la démonstration de Story [13].

Nous appelons chacun des 15 blocs des pièces, et les 16 cases différentes du plateau, des cellules. Pour des raisons qui deviendront évidentes, nous numérotons les cellules selon le motif en serpentin illustré à la figure 2. Nous pouvons considérer la cellule vide comme étant occupée par un bloc blanc. Chaque coup légal consiste alors à "déplacer le bloc blanc", c'est-à-dire à échanger le bloc blanc avec l'un de ses voisins horizontaux ou verticaux. Un placement est une bijection de l'ensemble des blocs (y compris le bloc blanc) vers l'ensemble des cellules ; en d'autres termes, une image instantanée du plateau entre deux coups. Étant donné un placement initial, nous cherchons à déterminer quels autres placements sont possibles par une suite de coups légaux.

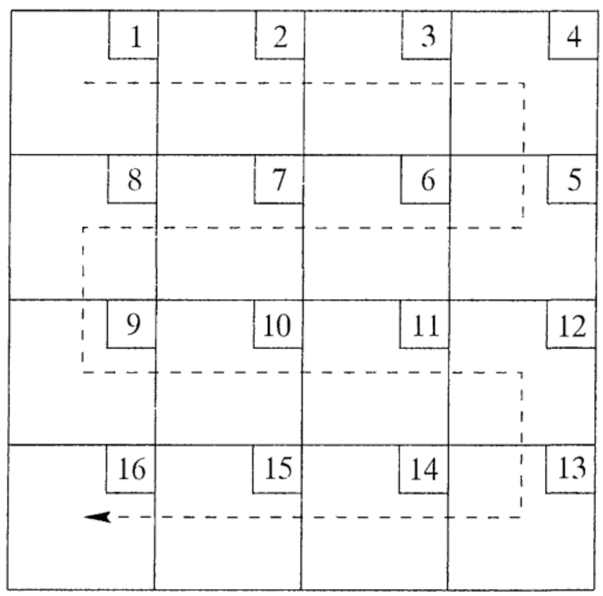

FIGURE 2. La ligne pointillée et les chiffres dans le coin de chaque cellule indiquent un ordre particulier des cellules que nous utilisons pour définir les classes d'équivalence des placements.

Remarquez qu'en déplaçant le bloc vide le long du chemin sinueux de la figure 2, on peut le placer dans n'importe quelle cellule sans modifier l'ordre des autres blocs sur ce chemin. Ceci nous amène à définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des placements : deux placements sont équivalents si l'on peut obtenir l'un à partir de l'autre en déplaçant le bloc vide le long du chemin sinueux. Chaque classe d'équivalence est appelée une configuration et contient 16 placements, un pour chaque cellule que le bloc vide peut occuper. Si le bloc i occupe la cellule j et que le bloc vide occupe une cellule de numéro supérieur, alors on dit que le bloc i est dans l'emplacement j ; sinon, il est dans l'emplacement $(j-1)$. Voir la figure 3 pour un exemple. Tous les placements d'une configuration donnée ont les 15 blocs dans les mêmes emplacements ; on peut donc noter une configuration par $[a_1, \ldots, a_{15}]$, où a_i est l'emplacement occupé par le bloc i dans la configuration.

Chaque déplacement du bloc vide entraîne une permutation des emplacements occupés par les blocs. Par exemple, déplacer le bloc vide de la case 10 à la case 15 provoque la permutation (10, 11, 12, 13, 14) car le bloc initialement en case 15 (emplacement 14) est déplacé en case 10 (qui devient l'emplacement 10) et les blocs des cases 11 à 14 sont décalés d'un emplacement vers le haut. Une configuration $[a_1, \ldots, a_{15}]$ soumise à la permutation est transformée en la configuration $[a_1, \ldots, a_{15}]\sigma = [a_1\sigma, \ldots, a_{15}\sigma]$; comme nos permutations agissent à droite, nous les multiplions de gauche à droite. Voir la figure 3 pour un exemple.

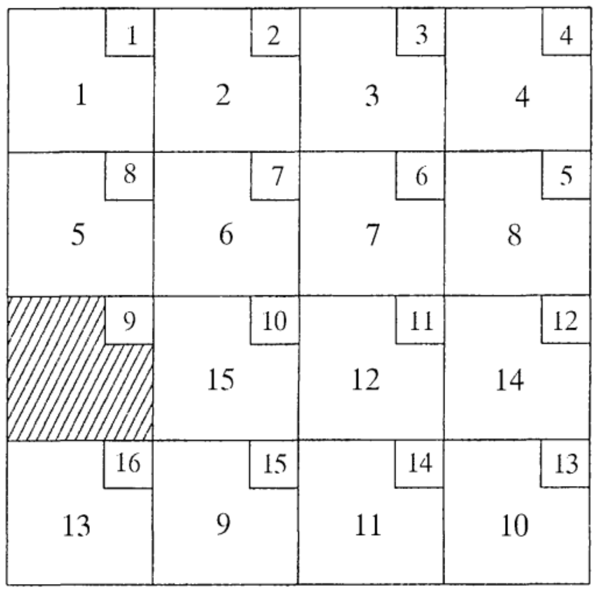

FIGURE 3. La disposition illustrée ici correspond à la configuration $C = [1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 14, 12, 13, 10, 15, 11, 9]$. Puisque la disposition initiale de la figure 1 correspond à $I = [1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11, 12, 15, 14, 13]$, la permutation de la configuration initiale $\sigma = (9, 14, 11, 13)(10, 12)$ donne C. Cette permutation étant paire, d'après le théorème 3, C peut être obtenue à partir de I.

Soit $\sigma_{i,j}$ la permutation obtenue en déplaçant le marqueur vide de la case i à la case j. On a clairement $\sigma_{i,i+1}$ est l'élément neutre et $\sigma_{j,i} = \sigma_{i,j}^{-1}$. Il nous reste donc 9 permutations à déterminer. Celles-ci sont répertoriées dans le tableau 1. L'élément clé est que l'on peut déplacer le marqueur vide le long du chemin sinueux de la figure 2 vers n'importe quelle case sans modifier la configuration. Par conséquent, les neuf premières permutations listées dans le tableau 1 et leurs inverses peuvent être appliquées dans n'importe quel ordre, de sorte que le problème se ramène à identifier le sous-groupe de S_{15} (le groupe symétrique sur les 15 cases) engendré par ces permutations. Nous démontrons que ces permutations engendrent A_{15} (toutes les permutations paires).

Tableau 1. Récapitulatif de toutes les permutations possibles des emplacements obtenues en déplaçant le bloc vide. Le déplacement du bloc vide de la case i à la case j induit la permutation $\sigma_{i,j}$.

$\sigma_{1,8}$	$= (1,2,3,4,5,6,7)$	
$\sigma_{2,7}$	$= (2,3,4,5,6)$	
$\sigma_{3,6}$	$= (3,4,5)$	
$\sigma_{5,12}$	$= (5,6,7,8,9,10,11)$	
$\sigma_{6,11}$	$= (6,7,8,9,10)$	
$\sigma_{7,10}$	$= (7,8,9)$	
$\sigma_{9,16}$	$= (9,10,11,12,13,14,15)$	
$\sigma_{10,15}$	$= (10,11,12,13,14)$	
$\sigma_{11,14}$	$= (11,12,13)$	
$\sigma_{n,n+1}$	$= id,$	$n = 1,2,\ldots,15$
$\sigma_{i,j}$	$= \sigma_{j,i}^{-1}$	pour tout $i > j$ adequat

Lemme 1. *Pour $n \geq 3$, les 3-cycles engendrent A_n.*

Démonstration : Par définition, tout élément de A_n peut s'écrire comme le produit d'un nombre pair de transpositions. Si a, b, c et d sont distincts, alors $(a,b)(c,d) = (a,b,c)(a,d,c)$, $(a,b)(b,c) = (a,c,b)$ et $(a,b)(a,b) = id$. □

Pour $n \geq 5$, le lemme 1 découle également directement du fait que A_n est simple, puisque l'ensemble des 3-cycles est stable par conjugaison. Appelons un 3-cycle consécutif s'il est de la forme $(k, k+1, k+2)$.

Lemme 2. *Pour $n \geq 3$, les 3-cycles consécutifs $\{(1,2,3),(2,3,4),\ldots,(n-2,n-1,n)\}$ engendrent A_n.*

Démonstration : Puisque les 3-cycles engendrent A_n, il suffit de montrer que les 3-cycles consécutifs engendrent tous les 3-cycles. Ceci est trivial pour $n = 3$. Pour $n \geq 4$, on montre par récurrence qu'on peut engendrer tous les 3-cycles ne contenant pas à la fois 1 et n. Pour engendrer $(1,x,n)$, posons $y \in \{1,\ldots,n\}\backslash\{1,x,n\}$. Alors $(1,x,n) = (y,x,n)(1,x,y)$. Bien sûr, $(1,n,x) = (1,x,n)^2$. □

Théorème 3. *Les cycles listés dans le Tableau 1 engendrent A_{15}.*

Démonstration : Puisque tous les cycles sont impairs, ce sont des permutations paires, donc ils engendrent un sous-groupe de A_{15}. Notons que pour toute permutation σ, on a

$$\sigma^{-1}(a_1,\ldots,a_k)\sigma = (a_1\sigma,\ldots,a_k\sigma).$$

Ainsi,

$$\begin{array}{lll}
(1,2,\ldots,7)^{-n}(3,4,5)(1,2,\ldots,7)^n & \text{donne} & (1,2,3),\ldots,(5,6,7)\ ; \\
(5,6,\ldots,11)^{-n}(7,8,9)(5,6,\ldots,11)^n & \text{donne} & (5,6,7),\ldots,(9,10,11) \quad \text{et} \\
(9,10,\ldots,15)^{-n}(11,12,13)(9,10,\ldots,15)^n & \text{donne} & (9,10,11),\ldots,(13,14,15)
\end{array}$$

lorsque n prend les valeurs $-2,-1,0,1$ et 2, cela constitue tous les 3-cycles consécutifs de S_{15}, donc d'après le lemme 2, cela engendre A_{15}.

Ainsi, étant donné deux placements quelconques Pl_1 et Pl_2 appartenant respectivement aux configurations Cf_1 et Cf_2, Pl_2 est obtenu à partir de Pl_1 si et seulement si Cf_2 est une permutation paire de Cf_1. En termes de placement, si Pl_1 et Pl_2 ont la case vide dans la même cellule, alors Pl_2 est obtenu à partir de Pl_1 si et seulement si Pl_2 est une permutation paire des 15 blocs numérotés de Pl_1. Soit n le nombre de déplacements entre la case vide de Pl_1 et la case vide de Pl_2. Chaque déplacement de la case vide entraînant une transposition de deux blocs, alors pour n impair (respectivement pair), Pl_2 est obtenu à partir de Pl_1 si et seulement si Pl_2 est une permutation impaire (respectivement paire) des 16 blocs de Pl_1.

3. Généralisations. Ce qui suit constitue, en un sens, la généralisation la plus large du taquin. Étant donné un graphe connexe quelconque à n sommets, nous pouvons étiqueter ces sommets avec n étiquettes, dont l'une est appelée étiquette vide. Chaque mouvement consiste à échanger l'étiquette vide avec l'étiquette d'un sommet adjacent. Nous cherchons alors à déterminer, parmi les $n!$ étiquetages possibles, lesquels peuvent être obtenus à partir d'un étiquetage initial donné par une suite de mouvements. Plus précisément, nous cherchons à déterminer quelles permutations des $(n-1)$ étiquettes ordinaires (un sous-groupe de S_{n-1}) peuvent être obtenues par une suite de mouvements qui replace l'étiquette vide sur son sommet d'origine v (puisque les sous-groupes obtenus pour différents choix de v sont isomorphes). Le jeu du taquin (ou casse-tête des 15) en est un cas particulier, correspondant au graphe $P_4 \times P_4$ (le produit cartésien du chemin à quatre sommets avec lui-même) représenté sur la figure 4. Les sommets correspondent aux cellules, les étiquettes (non représentées) correspondent aux blocs, et les arêtes indiquent quelles cellules sont adjacentes.

Le principe de la méthode présentée dans la section 2 repose sur l'induction de classes d'équivalence et la définition des emplacements par la position de l'élément vide le long d'un chemin hamiltonien (un chemin qui visite chaque sommet du graphe exactement une fois). Cette méthode est applicable à tout graphe contenant un chemin hamiltonien, quel que soit le chemin utilisé. Ainsi, pour le taquin, on aurait pu utiliser une spirale au lieu du motif en serpentin de la figure 2. Le graphe de Petersen en est un autre exemple. En numérotant les sommets comme sur la figure 5, on constate que le groupe recherché est engendré par $\sigma_{1,9}, \sigma_{1,5}, \sigma_{2,7}, \sigma_{3,10}, \sigma_{4,8}$ et $\sigma_{6,10}$, où $\sigma_{i,j} = (i, i+1, \ldots, j-1)$ représente la permutation des emplacements obtenue en déplaçant l'étiquette vide du sommet i au sommet j. Des calculs montrent que le groupe engendré correspond à l'ensemble S_9 ; [15] explique pourquoi ce résultat n'est pas fortuit.

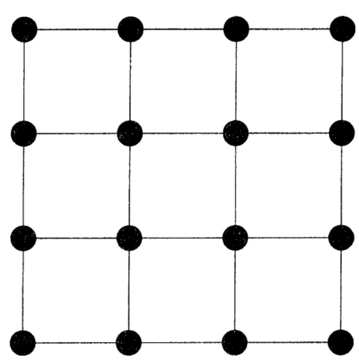

FIGURE 4. Le graphe $P_4 \times P_4$.

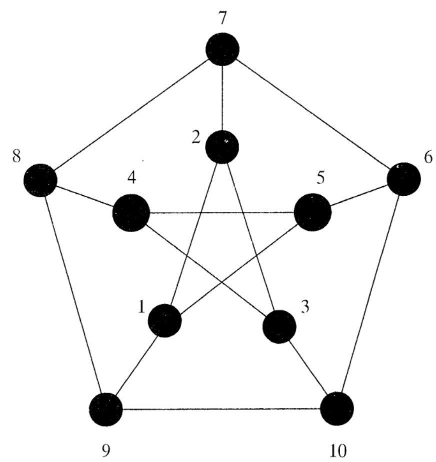

FIGURE 5. Dans le célèbre graphe de Petersen, chaque étiquetage est possible à partir de tous les autres par une suite de mouvements autorisés. Les sommets sont numérotés pour indiquer un chemin hamiltonien.

Nous abordons maintenant le cas général, où le graphe peut contenir ou non un chemin hamiltonien. Si le graphe contient un sommet de coupure v, alors aucune des étiquettes, à l'exception de l'étiquette vide, ne peut être déplacée à travers v, ce qui décompose le problème en deux parties. Il suffit donc de considérer les graphes ne contenant aucun sommet de coupure.

Dans [15], R. M. Wilson résout complètement ce problème. Son résultat remarquable est que, hormis les cycles C_n et le graphe θ_0 représenté sur la figure 6, le groupe contient A_{n-1}. Il est clair que le groupe contient une permutation impaire si et seulement si le graphe contient un cycle impair, c'est-à-dire si le graphe n'est pas biparti. Ainsi, pour les graphes bipartis, le groupe est exactement A_{n-1}, et sinon, il est entièrement S_{n-1}. Par conséquent, mis à part ces deux cas exceptionnels, on peut obtenir soit exactement la moitié, soit la totalité des $n!$ étiquetages, selon que le graphe est biparti ou non. Pour θ_0, le groupe recherché est $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ agissant sur la droite projective au-dessus de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (un groupe d'ordre 120 agissant 3-transitivement sur un ensemble de six éléments), ce qui donne six étiquetages non équivalents. Pour C_n, le groupe est $\langle(1, 2, \ldots, n-1)\rangle$, ce qui donne $(n-2)!$ étiquetages non équivalents. L'existence d'une caractérisation complète aussi simple est surprenante. Cependant, la démonstration de Wilson, bien qu'élégante, requiert des mathématiques considérablement plus sophistiquées que la démonstration simple et élémentaire présentée ici pour le cas particulier du taquin.

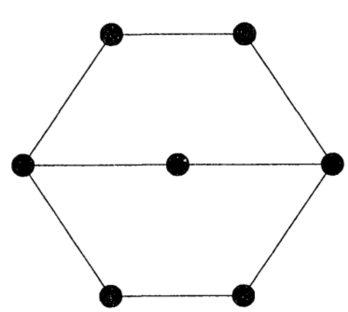

FIGURE 6. Le graphe 60.

Remerciements. L'auteur remercie les professeurs Alan J. Goldman et Arthur T. Benjamin de lui avoir signalé ce problème, et ce dernier pour ses nombreuses suggestions pertinentes. Ce travail a bénéficié du soutien de la Fondation Fannie et John Hertz.

Références

1. W. W. R. Ball, H. S. M. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, 12th ed., U. of Toronto Press, Toronto & Buffalo, 1974, pp. 313-316.
2. J. D. Beasley, *The Mathematics of Games*, Oxford U. Press, Oxford & New York, 1989, pp. 80-81.
3. A. L. Davies, Rotating the fifteen puzzle, *Math. Gazette* 54 (1970) 237-240.
4. M. Gardner, *Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Diversions from Scientific American*, U. of Chicago Press, Chicago, 1971, pp. 64-70.
5. 1. N. Herstein, I. Kaplansky, *Matters Mathematical*, Chelsea, New York, 1978, pp. 114-115.
6. S. Hurd, D. Trautman, The knight's tour on the 15-puzzle, *Math. Mag.* 66 (1993) 159-166.
7. W. W. Johnson, Note on the "15" puzzle, *Amer. J. Math.* 2 (1879) 397-399.
8. H. Liebeck, Some generalizations of the 14-15 puzzle, *Math. Mag.* 44 (1971) 185-189.
9. S. Loyd, *Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, sélectionné et édité par Martin Gardner, Dover, New York, 1959, pp. 19-20.
10. H. V. Mallison, An array of squares, *Math. Gazette* 24 (1940) 119-121.
11. E. L. Spitznagel, Jr., A new look at the fifteen puzzle, *Math. Mag.* 40 (1967) 171-174.
12. E. L. Spitznagel, Jr., *Selected Topics in Mathematics*, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1971, pp. 143-148.
13. W. E. Story, Note on the "15" puzzle, *Amer. J. Math.* 2 (1879) 399-404.
14. F. J. W. Whipple, The sign of a term in the expansion of a determinant, *Math. Gazette* 13 (1926) 126.
15. R. M. Wilson, Graph puzzles, homotopy, and the alternating group, *J. Combin. Theory* (Series B) 16 (1974) 86-96.

Aaron Archer a obtenu sa licence en mathématiques au Harvey Mudd College en 1998, où ses recherches en théorie des graphes chromatiques lui ont valu une mention honorable pour le prix Morgan (AMS/MAA/SIAM). Ancien participant aux programmes d'été de mathématiques du Hampshire College et aux semestres de mathématiques de Budapest, son séjour en Hongrie l'a inspiré à rédiger un guide de restaurants en ligne pour Budapest. Aaron est actuellement boursier Hertz et prépare un doctorat en recherche opérationnelle à l'Université Cornell. Ses recherches portent sur l'optimisation combinatoire et les algorithmes d'approximation.

Département de Recherche opérationnelle, Université de Cornell, Ithaca, NY 14853
Harvey Mudd College, Claremont, CA 91711

Un extrait de *Mathematics and the Imagination*, de Edward Kasner et James Newman, illustrations Rufus Isaac, Dover Publications, Mineola, New York, 1940

Aucune discussion sur les casse-têtes, même brève, ne saurait omettre le plus célèbre des nombreux jeux inventés par Sam Lloyd. "Puzzle 15", "Puzzle du Patron", "Jeu du Taquin" ne sont que quelques-uns de ses noms. Pendant plusieurs années après son apparition en 1878, ce casse-tête connut une popularité, notamment en Europe, supérieure à celle aujourd'hui du bridge swing et du bridge contract réunis. En Allemagne, on y jouait dans les rues, dans les usines, dans les palais royaux et au Reichstag. Les employeurs étaient contraints d'afficher des avis interdisant à leurs employés de jouer au "Puzzle 15" pendant les heures de travail, sous peine de licenciement. Les électeurs, ne bénéficiant pas de tels privilèges, devaient assister, impuissants, à la pratique du "Puzzle du Patron" par leurs représentants dûment élus au Reichstag, tandis que Bismarck jouait lui-aussi au puzzle. En France, le "Jeu du Taquin" se pratiquait sur les boulevards parisiens et dans chaque village, des Pyrénées à la Normandie. Le "Jeu du Taquin" était un fléau pour l'humanité, selon un journaliste français de l'époque, pire que le tabac et l'alcool, "responsable d'innombrables maux de tête, névralgies et névroses".

Pendant un temps, l'Europe était folle de ce "casse-tête des 15". Des tournois étaient organisés et des prix faramineux offerts pour la résolution de problèmes en apparence simples. Mais le plus étrange, c'est que personne ne remportait jamais ces prix, et que ces problèmes apparemment simples restaient irrésolus.

Le "casse-tête des 15" (figure ci-dessous) se compose d'une boîte carrée peu profonde en bois ou en métal contenant 15 petits blocs carrés numérotés de 1 à 15. La boîte peut en réalité contenir 16 blocs, ce qui permet de déplacer les 15 blocs et d'intervertir leurs positions. Le nombre de positions possibles est de $16! = 20\,922\,789\,888\,000$. Un problème consiste à obtenir une disposition spécifique des blocs à partir d'une position initiale donnée, souvent la position normale illustrée sur la figure 57.

Peu après l'invention du casse-tête, deux mathématiciens américains ont démontré que, quelle que soit la disposition initiale, seule la moitié des positions possibles peut être obtenue. Ainsi, il existe toujours environ 10 000 milliards de positions possibles pour le possesseur d'un "casse-tête des 15", et 10 000 milliards de positions impossibles à obtenir.

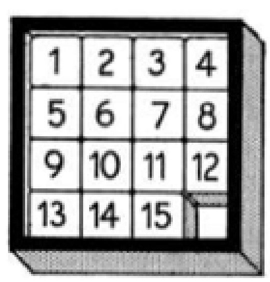

Fig. 57. Le "Puzzle 15" (également "Puzzle du Patron" ou "Jeu du Taquin") en position normale.

L'existence de positions impossibles explique aisément pourquoi Lloyd et d'autres offraient des prix aussi généreux, puisque les problèmes récompensés impliquaient systématiquement des positions impossibles. Il est navrant d'imaginer les maux de tête, les névralgies et les névroses qui auraient pu être épargnés, sans parler des retombées économiques pour le Reichstag, si l'*American Journal of Mathematics* avait connu la même diffusion que le casse-tête lui-même. Avec dix mille milliards de solutions possibles, il y aurait eu largement de quoi s'amuser.

Dans la position normale (FIG. 57), l'espace vide se trouve dans le coin inférieur droit. Pour analyser mathématiquement le casse-tête, il est utile de considérer qu'un réarrangement des blocs consiste simplement à déplacer l'espace vide selon un parcours précis, en veillant toujours à ce qu'il arrive dans le coin inférieur droit de la boîte. Pour ce faire, l'espace vide doit traverser autant de cases vers la gauche que vers la droite, et autant de cases vers le haut que vers le bas. Autrement dit, l'espace vide doit traverser un nombre pair de cases. Si, en partant de la position initiale, la position souhaitée peut être atteinte tout en respectant cette condition, alors cette position est possible ; sinon, elle est impossible.

En se basant sur ce principe, la méthode pour déterminer si une position est possible ou impossible est très simple. Dans la position normale, chaque bloc numéroté apparaît dans son ordre numérique correct, c'est-à-dire que, pour chaque rangée de cases, de gauche à droite, aucun nombre ne précède un nombre inférieur. Pour obtenir une position différente de la position normale, l'ordre numérique des blocs doit être modifié. Certains nombres, voire tous, précéderont d'autres nombres inférieurs. Chaque cas où un nombre précède un autre nombre inférieur est appelé une inversion. Par exemple, si le nombre 6 précède les nombres 2, 4 et 5, il s'agit d'une inversion à laquelle on attribue la valeur 3, car 6 précède trois nombres inférieurs. Si la somme des valeurs de toutes les inversions dans une position donnée est paire, la position est possible, c'est-à-dire qu'elle peut être obtenue à partir de la position normale. Si la somme des valeurs des inversions est impaire, la position est impossible et ne peut être obtenue à partir de la configuration normale.

La position illustrée sur la figure 58 peut être obtenue à partir de la position normale puisque la somme des valeurs des inversions est égale à six, un nombre pair.

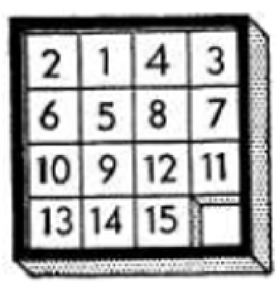

FIG. 58.

Mais la position représentée sur la figure 59 est impossible, puisque, comme on peut facilement le constater, la somme des valeurs des inversions produites est impaire :

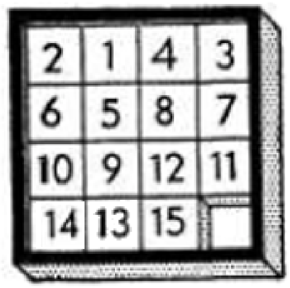

FIG. 59.

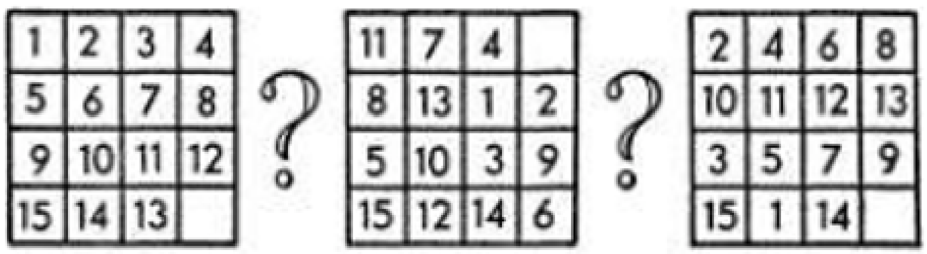

FIG. 60.

Les figures 60 a, b et c illustrent trois autres positions. Sont-elles possibles ou impossibles à obtenir à partir de l’ordre normal ?