Compte-rendu de *Géométrie non commutative* par Alain Connes

Vaughan Jones et Henri Moscovici

Cet article et le suivant sont des exposés de *Noncommutative geometry* d'Alain Connes (Academic Press, 1994, 661 pages, 59 95), dont l'analyse est parue dans le Bulletin de l'American Mathematical Society, v. 33 n^o 4, octobre 1996, p. 459-466.

"*La correspondance entre espaces géométriques et algèbres commutatives est une idée familière et fondamentale de la géométrie algébrique. L'objectif de cet ouvrage est d'étendre cette correspondance au cas non commutatif dans le cadre de l'analyse réelle.*"

C'est ainsi que commence le livre de Connes intitulé *Géométrie non commutative*. La thèse centrale est que la notion habituelle d'"espace" - un ensemble doté d'une structure supplémentaire - est inadéquate dans de nombreux cas intéressants et que les coordonnées peuvent être remplacées de manière avantageuse par une algèbre non commutative. Voici un exemple simple mais central. Supposons qu'un groupe discret Γ agisse sur un espace compact de Hausdorff X. Si l'action est suffisamment simple, on peut mettre la topologie quotient sur l'espace d'orbite, X/Γ, capturant ainsi la structure d'orbite de manière tout à fait satisfaisante. Mais à mesure que l'action se complique, la topologie quotient ne parvient plus à séparer les orbites, et dans des cas extrêmes comme l'action des puissances d'une rotation irrationnelle du cercle sur $\mathbb{Z}$, la topologie quotient ne fournit aucune information. L'approche non commutative consiste d'abord à remplacer X par l'algèbre $C(X)$ de toutes les fonctions continues à valeurs complexes sur X (qui, d'après le célèbre théorème de Gelfand-Naimark, capture complètement la topologie d'un espace compact de Hausdorff). Ensuite, on remplace l'espace quotient non pas par une algèbre plus petite telle que $C(X/\Gamma)$, mais par une algèbre plus grande, le *produit croisé* $C(X) \rtimes \Gamma$ constitué de sommes $\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma \gamma$ (avec $f_\gamma \in C(X)$) qui sont multipliées selon la règle $\gamma f \gamma^{-1} = f \circ \gamma^{-1}$. Cette algèbre est non commutative et doit être complétée d'une manière ou d'une autre, mais une fois cela fait, elle fournit un outil puissant pour l'étude de X/Γ. Dans le contexte des algèbres d'opérateurs, il n'y a rien de pathologique dans $C(X) \rtimes \Gamma$, qui peut être considéré comme une *désingularisation non commutative* de X/Γ.

Dans notre exemple, l'algèbre non commutative a été obtenue à partir d'un groupe agissant sur un groupe commutatif, mais une fois que l'on admet la légitimité de telles algèbres en tant qu'"anneaux de coordonnées", on peut s'attendre à trouver de nouveaux exemples dépourvus de toute origine commutative.

Connes explore de nombreux exemples, aussi divers que l'espace des pavages de Penrose et la zone de Brillouin dans l'effet Hall quantique. Ce faisant, il développe une myriade de techniques, parfois, comme dans le cas de son caractère de Chern, sous forme de généralisations nécessaires d'outils connus, et parfois, comme dans le cas de son calcul quantifié, d'inspiration largement non commutative.

Le contexte technique du programme de Connes est la théorie des algèbres d'opérateurs sur l'espace

Vaughan Jones est professeur de mathématiques à l'Université de Californie à Berkeley. Henri Moscovici est professeur de mathématiques à l'Université d'État de l'Ohio.

Référence : Notices of the AMS, Vol. 44, n^o 7, août 1997, p. 792 et suivantes.

Transcription en LaTeX et traduction : Denise Vella-Chemla, assistée de Google Translate, juin 2025.

de Hilbert, fermé dans une certaine topologie. Pourquoi les algèbres d'opérateurs devraient-elles être le vecteur de la géométrie non commutative ? Après tout, le théorème de Gelfand-Naimark ne concerne pas les opérateurs et, d'après ce que nous avons dit jusqu'à présent, ce n'est guère plus qu'une curiosité qui peut représenter fidèlement $C(X)$ sur un espace de Hilbert. Il existe une raison simple mais éloquente pour les algèbres d'opérateurs. Les premières algèbres non commutatives sont les algèbres matricielles $n \times n$ $M_n(\mathbb{C})$, qui sont des algèbres d'opérateurs sur un espace de Hilbert de dimension finie. L'algèbre d'opérateurs n'est donc qu'une "grande algèbre matricielle". Ou bien nous pourrions nous inspirer de la physique quantique, où les observables classiques - fonctions continues sur l'espace de phase - sont remplacées par des algèbres d'opérateurs, généralement non bornés, sur l'espace de Hilbert des fonctions d'onde. Selon la remarquable intuition de von Neumann, les algèbres d'opérateurs *bornés*, si elles sont suffisamment bien comprises, suffiraient en fait à comprendre les algèbres d'opérateurs non bornés. Cela a conduit à la "théorie algébrique des champs quantiques" initiée par Haag et Kastler dans [14]. Mais nous nous éloignons du sujet. En géométrie algébrique, l'accès à la puissance de la théorie nécessite des résultats non triviaux en algèbre commutative pure. En géométrie non commutative, nous nous attendons donc à avoir besoin d'une bonne dose de résultats algébriques sur les opérateurs dès le début. Bien plus encore que la géométrie algébrique n'a besoin de l'algèbre commutative, car l'intuition fournie par l'ensemble des points d'une variété a disparu et il n'y a aucune raison de s'attendre à ce que tous les phénomènes intéressants de la géométrie non commutative apparaissent comme de simples perturbations de ceux de la géométrie commutative. Ainsi, une partie importante, mais en aucun cas dominante, du livre de Connes est consacrée à la théorie abstraite de la structure des algèbres d'opérateurs.

La théorie des algèbres d'opérateurs se divise en deux parties presque disjointes : les algèbres de von Neumann, initiées par Murray et von Neumann dans les années 1930 [22], et les algèbres C*, initiées par Gelfand et Naimark dans les années 1940 [12]. Techniquement, la division se fait en fonction de la topologie dans laquelle les algèbres sont fermées : les algèbres de von Neumann le sont dans la topologie de convergence ponctuelle et les algèbres C* le sont dans la topologie de la norme. Mais moralement, la division est la version non commutative de la division entre la théorie de la mesure et la topologie générale. Si les fonctions sur $[0, 1]$ sont représentées sur $L^2([0, 1], dx)$ comme des opérateurs de multiplication, les fonctions continues forment une algèbre C* et les fonctions L^∞ forment une algèbre de von Neumann. Toute algèbre de von Neumann est une algèbre C*, mais il est rarement judicieux de la considérer comme telle.

Discutons d'abord des algèbres de von Neumann, domaine dans lequel Connes a été une figure dominante au cours des vingt-cinq dernières années. Murray et von Neumann ont rapidement reconnu l'importance des algèbres de von Neumann dont le centre ne contient que des multiples scalaires de l'identité, qu'ils ont appelés "facteurs", et von Neumann a écrit un article [30] réduisant toute algèbre de von Neumann à un facteur par une "intégrale directe" - un analogue continu de la somme directe des algèbres. Toute algèbre de von Neumann est $\int_X^\oplus M(\xi)d\mu(\xi)$ pour un certain espace de mesure (X, μ) avec chaque $M(\xi)$ un facteur. Les facteurs eux-mêmes ont été classés dans [22] selon les propriétés algébriques des projections (opérateurs p avec $p^2 = p = p^*$) qu'ils contiennent. Dans une algèbre de von Neumann M, on dit que $p \leq q$ si $pq = p$ et $p \sim q$ s'il existe un $u \in M$ tel que $uu^* = p$ et $u^*u = q$. Il existe une analogie directe avec les cardinalités des ensembles, de sorte qu'une projection est dite "infinie" si elle est équivalente à une sous-projection propre, et "$\leq$" induit un ordre "$\lesssim$" sur les classes d'équivalence des projections dans M. Si M étaient des matrices $n \times n$, nous aurions $p \sim q$ si et seulement si $\mathrm{rang}(p) = \mathrm{rang}(q)$. Dans un *facteur*, $\lesssim$ est un ordre total. Le type du facteur est déterminé par l'existence de projections infinies de type II_∞ et III, et par le type de l'ensemble ordonné $\lesssim$ selon le tableau suivant (l'espace de Hilbert est supposé séparable).

Type Murray-von Neumann	ordre ensemble $\lesssim$
I_n	$\{0,1,2,\ldots,n\}$ (n=∞ est OK)
II_1	[0,1]
II_∞	$[0,\infty]$
III	$\{0,1\}$

Voici un résumé extrêmement condensé des travaux de Murray et von Neumann.

- Tout facteur de type I est de la forme $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, et est utilisé dans une factorisation tensorielle $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ (où l'on utilise $\mathcal{B}(\cdot)$ pour désigner l'algèbre de tous les opérateurs bornés).

- Les facteurs de type II_1 peuvent être construits comme la commutante de la représentation régulière d'un groupe discret dont toutes les classes de conjugaison sont infinies.

- Les facteurs de type II_∞ sont toujours de la forme $\mathrm{II}_1 \otimes \mathrm{I}_\infty$ (c'est-à-dire des matrices infinies sur un facteur II_1).

- Les facteurs de type III sont plus difficiles à construire, mais ont été construits dans la référence [30].

- Les facteurs de type II_1 donnent une *trace* - une fonctionnelle linéaire $\mathrm{tr} : M \to \mathbb{C}$ avec $\mathrm{tr}(x^*x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$. Les facteurs de type II_∞ ont une trace infinie analogue à celle de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, et les facteurs de type III n'ont aucune trace.

- Il existe, à isomorphisme près, un seul facteur II_1 possédant la propriété "hyperfinie" ; c'est-à-dire que tout ensemble fini d'éléments peut être arbitrairement bien approximé par les éléments d'une sous-algèbre de dimension finie. Et il existe des facteurs II_1 dépourvus de cette propriété.

La période allant du milieu des années 1940 à la fin des années 1960 fut une période de digestion des résultats de Murray et von Neumann. Parmi les points marquants, on peut citer la découverte par Dixmier d'une multitude de sous-algèbres abéliennes maximales d'un facteur II_1 [10], les travaux de Dye sur l'équivalence d'orbites [11], l'établissement de l'hyperfinitude des produits croisés d'ensembles ordonnés d'algèbres abéliennes par $\mathbb{Z}$, et la caractérisation par Sakai des algèbres de von Neumann des C*-algèbres qui sont des duales comme espaces de Banach [26]. Je citerai deux résultats qui constituent le raffinement ultime des idées de Murray et von Neumann : la construction par McDuff d'un nombre indénombrable de facteurs II_1 [21] et la construction par Powers d'un continuum de facteurs de type III [25].

De nombreuses graines de développements futurs ont été semées pendant cette période, mais la première idée à aller vraiment au-delà de Murray et von Neumann fut la théorie de Tomita-Takesaki, proposée pour la première fois par Tomita. La propriété de trace $\mathrm{tr}(x^*x) = \mathrm{tr}(xx^*)$ signifie que $*$ est une isométrie sur la complétion de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathrm{tr}}$ d'un facteur M par rapport au produit scalaire $\langle x, y\rangle = \mathrm{tr}\langle y^* x\rangle$. Cela implique une certaine symétrie entre un facteur de type I ou II et son commutant. L'absence de cette symétrie avait rendu les facteurs de type II quelque peu inaccessibles. Tomita a envisagé $*$ comme un opérateur (anti)linéaire *non borné* sur $\mathcal{H}_\varphi$, où φ est une fonctionnelle linéaire positive (c'est-à-dire $\varphi(x^*x) > 0$) sur M et $\mathcal{H}_\varphi$ est la complétion de M par rapport à $\langle x, y\rangle = \varphi(y^*x)$. L'opérateur $*$ est pré-fermé, on peut donc former la décomposition polaire $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$ de sa clôture S. Ici, Δ est un opérateur non borné défini positif, et J est une isométrie qui rétablit la symétrie entre M et son commutant : $JMJ =$ le commutant de M sur $\mathcal{H}_\varphi$, où M agit par multiplication *à gauche*. Mais la seconde partie du théorème de Tomita-Takesaki est peut-être plus significative, car elle affirme :

$$\Delta^{it} M \Delta^{-it} = M \quad (t \in \mathbb{R}),$$

qui montre l'existence d'un groupe d'automorphismes à un paramètre sur l'algèbre de von Neumann, appelé groupe modulaire ou flot canonique, noté $\sigma_t^\varphi(x) = \Delta^{it} x \Delta^{-it}$. Le groupe modulaire est totalement invisible dans le cas abélien et trivial pour les types I et II, tandis que les facteurs de type III sont des objets *dynamiques*.

C'est à ce moment que l'œuvre de Connes entre dans l'histoire. Si l'on devait trouver un seul mot pour résumer sa vaste contribution aux algèbres de von Neumann, ce serait le mot "automorphismes". Sa première étape a répondu à la question : "Comment le groupe modulaire σ_t^φ dépend-il de φ ?" Il a montré que, étant donnés φ et $\psi : M \to \mathbb{C}$ avec $\varphi(x^*x) > 0, \psi(x^*x) > 0$ (appelés "états" à cause de la connexion quantique), il existe une application continue $t \mapsto u_t$ de $\mathbb{R}$ vers le groupe unitaire de M telle que $\sigma_t^\varphi(x) = u_t \sigma_t^\psi(x) u_t^{-1}$ et $u_t \sigma_t^\psi(u_s) = u_{t+s}$. Ceci est analogue au théorème de Radon-Nikodym comparant deux mesures et peut en être une véritable extension en considérant l'importante condition de Kubo-Martin-Schwinger issue de la mécanique statistique quantique. On voit que si $\mathrm{Out}(M)$ est le groupe quotient de tous les automorphismes par les automorphismes intérieurs, σ_t^φ donne un invariant, appelé $T(M)$, noyau de l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathrm{Out}(M)$. Or, $T(M)$ peut être assez compliqué, et Connes a également défini un invariant $S(M)$ comme $\bigcap_\varphi \mathrm{spectrum}(\Delta_\varphi)\backslash\{0\}$, qui est un sous-groupe multiplicatif fermé de $\mathbb{R}^+$. Un facteur de type III est dit de type $\mathrm{III}_\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ selon que $S(M)$ est

a) $\mathbb{R}^+$ — type III_1

b) $\{\lambda^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ — type III_λ, $0 < \lambda < 1$

c) $\{1\}$ — type III_0

Une façon d'obtenir un facteur III_λ de type $(0 < \lambda < 1)$ est de prendre un automorphisme d'un facteur II_∞ N, de mettre à l'échelle la trace par λ, et de former le produit vectoriel $N \otimes \mathbb{Z}$. Connes a montré que *tout* facteur de type III_λ est de cette forme et a donné une décomposition similaire dans le cas III_0 [4]. Takesaki a également montré qu'un facteur III_1 est le produit vectoriel d'un facteur II_∞ par une action de mise à l'échelle de trace de $\mathbb{R}$ [27].

La conclusion extraordinaire de tout cela est que les facteurs de type III peuvent être complètement compris en connaissant les facteurs de type II et leurs groupes d'automorphismes. Connes a donc commencé une étude approfondie des automorphismes des facteurs de type II, en introduisant des techniques entièrement nouvelles. La première étape a été de classer les automorphismes périodiques du facteur II_1 hyperfini R, puis les automorphismes arbitraires de $R \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Afin de compléter la classification des facteurs III_λ hyperfinis, $0 \leq \lambda < 1$ un obstacle sérieux a dû être surmonté, car on ne savait pas qu'un facteur hyperfini II_∞ était automatiquement isomorphe à $R \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Connes a résolu ce problème dans [5] en introduisant une nouvelle approche de l'hyperfinitude : l'injectivité de l'algèbre de von Neumann M, ce qui signifie que M possède un complément d'espace de Banach dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Les critiques considèrent [5] comme l'un des points forts des mathématiques du XXe siècle. Le résultat (injectif) $\Longleftrightarrow$ (hyperfini) et les travaux de Krieger ont permis à Connes de compléter la classification des facteurs III_λ hyperfinis, $0 \leq \lambda < 1$. Haagerup a démontré l'unicité dans le cas III_1 une dizaine d'années plus tard en utilisant une condition découverte par Connes.

Les idées impliquées dans le théorème des facteurs injectifs ont engendré un grand nombre de nouveaux résultats sur les facteurs : en particulier, un invariant $\chi(M)$ - un groupe abélien dont Connes a montré qu'il était tout à fait arbitraire, construisant ainsi de manière naturelle une famille indénombrable de facteurs II_1 et, par exemple, des facteurs II_1 non isomorphes à leurs produits tensoriels avec eux-mêmes et des facteurs II_1 distincts de leurs algèbres opposées (voir [6]). De tels problèmes étaient des problèmes de longue date qui avaient été considérés comme insolubles avant Connes. Son livre contient un compte rendu détaillé de cette histoire.

Ayant ainsi expédié les algèbres de von Neumann injectives, Connes commença son étude de la géométrie non commutative. Sa première intuition fut l'existence d'une algèbre de von Neumann *canonique* associée à un feuilletage lisse d'une variété. L'idée est de former l'algèbre des sections du fibré sur l'espace des feuilles qui associe à chaque feuille son L^2-espace canonique de demi-densités. Ces sections doivent être mesurables dans un certain sens, et c'est là que réside l'intérêt : si les feuilles s'enroulent beaucoup sur elles-mêmes, l'espace des feuilles est comme l'espace des orbites pour une rotation irrationnelle, déjà discutée, et on peut ne pas être capable de trouver des sections arbitrairement. La notion de mesurabilité est par rapport à la classe de mesure transverse de la mesure de Lebesgue ; et Connes vit que si les feuilles s'enroulent ensemble de manière ergodique, alors son algèbre de von Neumann est un facteur. En utilisant la théorie de la mesure non commutative, Connes a montré comment obtenir des nombres de Betti à valeurs réelles pour un feuilletage de mesure transverse invariante par l'holonomie et a fourni une formule de Gauss-Bonnet aux conséquences purement géométriques. Cela a ouvert la voie à une généralisation complète du théorème d'indice d'Atiyah-Singer aux feuilletages et à des structures plus générales.

À ce stade, la théorie de la mesure non commutative commence à devenir insuffisante, et l'étape suivante vers la géométrie non commutative est la topologie non commutative. Dans le cas des feuilletages, cela nous permet d'étudier des feuilles individuelles plutôt que la seule feuille moyenne.

Comme nous l'avons dit, une C*-algèbre – abstraitement juste une C*-algèbre de Banach avec $\|x^*x\| = \|x\|^2$ – est la version non commutative d'un espace de Hausdorff localement compact. Il est donc naturel qu'il ait fallu plus de temps avant que les exemples intéressants des C*-algèbres ne deviennent clairs, car nous devons passer au crible les versions non commutatives des espaces pathologiques parfois fastidieux de la topologie des ensembles de points. (En revanche, il n'existe essentiellement qu'un seul espace de mesure, de sorte que toute algèbre de von Neumann devrait être intéressante.) Les travaux fondateurs ont été réalisés par Gelfand et Naimark, qui ont montré que les axiomes de la C*-algèbre caractérisent en fait les sous-C*-algèbres à norme fermée de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Un groupe de pionniers courageux, notamment Dixmier et Kadison, et Kaplansky ont permis à la théorie des C*-algèbres de se développer à une époque où leur importance future n'était pas encore reconnue. Mais le premier résultat structurel majeur fut celui de Glimm [13], qui montra que soit une C*-algèbre est assez simple, dans la mesure où toutes ses représentations génèrent des algèbres de von Neumann de type I, soit il existe une représentation non de type I et tout se déchaîne, car il existe des représentations de toutes sortes dont la classification complète est impossible. Des exemples de C*-algèbres de type I sont les algèbres abéliennes et l'algèbre de tous les opérateurs compacts. La C*-algèbre de presque tout groupe discret non abélien n'est pas de type I. On pourrait envisager une classification des C*-algèbres de type I, mais une telle pensée serait une folie loin du type I.

Mais le travail de Connes, et donc son livre, n'ont que peu à voir avec la théorie de la structure d'une C*-algèbre abstraite. Il a plutôt recherché des exemples intéressants et comment les comprendre dans un cadre géométrique.

Dans le monde commutatif, les outils les plus immédiats et les plus puissants sont l'homologie et le groupe fondamental. Malheureusement, ces outils ne permettent pas de généralisations non commutatives directes. C'est la K-théorie topologique – l'étude des fibrés vectoriels – qui s'est avérée la plus fructueuse, car elle s'applique immédiatement au monde non commutatif. Un fibré vectoriel sur une variété est, par un résultat de Swan, identique à une projection en algèbre matricielle sur les fonctions lisses de cette variété. Les fibrés vectoriels sont donc généralisés par le K_0-groupe algébrique (classes d'équivalence des projections en algèbre matricielle) d'une algèbre C*. Ainsi, la géométrie abordée par les fibrés vectoriels admet une version non commutative. Cependant, ceci ne représente qu'un point de départ dans la quête pour construire une extension à part entière de l'appareil homologique "commutatif". En géométrie algébrique comme en topologie algébrique, le K-groupe contravariant basé sur les fibrés vectoriels va de pair avec un homologue covariant, et cette dualité renforce mutuellement leur puissance. Une étape décisive dans la définition du groupe K-homologique en termes de théorie des opérateurs a été franchie vers 1969 par Atiyah [1], qui a proposé une construction du dual de Whitehead à la K-théorie basée sur l'axiomatisation du concept d'opérateur elliptique. Ses idées furent reprises et développées par Brown, Douglas et Fillmore [3], qui en firent une théorie des extensions des C*-algèbres, et par Kasparov. Ce dernier réussit ensuite à fusionner, dans le cadre général des C*-algèbres, le K-foncteur contravariant avec le Ext-foncteur covariant en un KK-foncteur bivariant, doté d'un produit d'intersection remarquable [15]. Outre la théorie de Kasparov, deux autres résultats fondamentaux, portant sur les produits croisés, servirent de catalyseur à la quête de compréhension des K-groupes des C*-algèbres non commutatives : la suite exacte de Pimsner-Voiculescu [23] pour les produits croisés par $\mathbb{Z}$ et l'isomorphisme de Thom pour les produits croisés par $\mathbb{R}$ de Connes [7].

Le nouvel appareil K-théorique a conduit à la formulation d'une multitude de généralisations passionnantes du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer [2], élargissant la portée de l'interaction fertile entre topologie et géométrie d'un côté et analyse fonctionnelle de l'autre. Ces développements ont été synthétisés par Baum et Connes en un puissant principe directeur connu sous le nom de conjecture de Baum-Connes. Sous la forme d'un analogue analytique de la carte d'assemblage de la théorie chirurgicale, elle fournit une description géométrique du K-groupe d'une C*-algèbre représentant un "espace non commutatif".

Ceci constitue le thème principal du chapitre II, où le principe est formulé dans le langage des groupoïdes lisses et richement illustré. Les cas particuliers traités en détail incluent : le groupoïde tangent d'une variété comme incarnation du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer, l'espace orbital d'une action de groupe, l'espace des feuilles d'un feuilletage et le théorème de l'indice longitudinal, le cas des groupes de Lie et le théorème de l'indice équivariant sur les espaces homogènes de groupes de Lie.

Malgré toutes les avancées réalisées sur le flanc de la K-théorie au début des années 1980, l'absence d'un complément cohomologique à la K-théorie demeurait un obstacle sérieux. En l'absence de dispositifs de calcul efficaces, des généralisations potentiellement intéressantes du théorème de l'indice risqueraient de devenir de simples tautologies. La topologie non commutative, élevée dans l'environnement raréfié de la K-théorie topologique, avait désormais besoin de sa propre théorie d'homologie, pragmatique, qui permettrait de réaliser des calculs concrets. La percée eut lieu en 1981 avec la découverte par Connes de la cohomologie cyclique et de la suite spectrale la reliant à la cohomologie de Hochschild [8]. Loin d'être fortuite, la découverte de Connes fut le résultat logique de sa recherche inspirée d'une théorie purement algébrique de type de Rham pour les algèbres non commutatives, qui devrait s'apparier au foncteur Ext et à son homologue "pair" d'une manière similaire au caractère de Chern.

Précisons : un opérateur elliptique abstrait, ou *module de Fredholm*, sur une $*$-algèbre unitaire $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$ est constitué d'une paire $(\mathcal{H}, F)$, où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparable sur lequel $\mathcal{A}$ agit par une $*$-représentation π et $F = F^*$ est un opérateur borné sur $\mathcal{H}$ tel que $F^2 - I$, ainsi que les commutateurs $[F, \pi(a)], \forall a \in \mathcal{A}$, sont "petits", c'est-à-dire compacts. Le modèle prototypique est constitué d'un opérateur pseudodifférentiel elliptique (ordre 0) sur une variété lisse fermée M, associée à une inverse approchée (c'est-à-dire une paramétrice). Dans ce cas, $\mathcal{A} = C^\infty(M)$, et les commutateurs $[F, \pi(a)]$ sont non seulement compacts, mais de classe p de Schatten : $\mathrm{Trace}|[F, \pi(a)]|^p < \infty$, pour tout $p > \dim M$. Cette dernière condition, considérée comme un axiome de "dimensionnalité finie", peut être intégrée à la définition générale d'un module de Fredholm p-sommable. De plus, il n'y a pas de perte essentielle de généralité à exiger $F^2 = I$.

Avec ces modifications, l'appariement $\langle [F], [e] \rangle$ entre la classe d'homologie K représentée par $(\mathcal{H}, F)$ et la classe de K-théorie $[e] \in K_0(\mathcal{A})$ d'un idempotent $e^2 = e \in \mathcal{M}_q(\mathcal{A})$, donné par l'indice de Fredholm, peut s'exprimer comme suit :

$$\langle [F], [e] \rangle = (-1)^n \,\mathrm{Supertrace}(e[F, e]^{2n}), \quad \forall n > \frac{p+1}{2}.$$

Considérant $de = [F, e]$ comme une différentielle quantifiée, le membre de droite présente une ressemblance frappante avec les formules exprimant les classes de Chern d'un fibré en fonction de la courbure. Le problème est que l'expression ci-dessus prend tout son sens précisément au stade où l'expression habituelle devient triviale, c'est-à-dire lorsque le degré de la "forme de courbure" non commutative dépasse la dimension de l'"espace". La forme polarisée du membre de droite,

$$\tau_F(a^0, a^2, \ldots, a^{2n}) = (-1)^n \,\mathrm{Supertrace}(a^0[F, a^1] \ldots [F, a^{2n}]), \quad a^j \in \mathcal{A},$$

encode les caractéristiques déterminantes de la théorie de la cohomologie cyclique et caractérise le cocycle cyclique par excellence. En tant qu'élément du groupe de cohomologie cyclique $\mathrm{HC}^*(\mathcal{A})$ (qui est un module gradué sur l'anneau polynomial $\mathrm{HC}^*(\mathbb{C})$), la classe de cohomologie de τ_F représente le caractère de Chern de $(\mathcal{H}, F)$ au sens de Connes. En utilisant cet appariement de caractères comme principe directeur, Connes a pu découvrir les propriétés et opérations fondamentales de la cohomologie cyclique, en commençant par un opérateur de périodicité crucial implicite dans la discussion ci-dessus. Pour des raisons méthodologiques, ces sujets sont traités dans l'ouvrage par ordre chronologique inverse : la cohomologie cyclique en III.1-3 et le caractère de Chern des modules de Fredholm en IV.1.

Il convient de noter que dans le cadre des espaces non commutatifs, l'intégralité de l'appariement d'indices acquiert une nouvelle puissance. Un exemple significatif est l'argument élégant (cf. IV.5) donné au théorème de Pimsner-Voiculescu [24], qui a confirmé une conjecture de longue date de Kadison, affirmant que la C*-algèbre réduite d'un groupe libre n'a pas d'idempotents non triviaux. L'"espace" pertinent est le "dual" d'un groupe libre ; c'est-à-dire, l'algèbre C* réduite $\mathrm{C}_r^*(\Gamma)$, dont la trace canonique $\tau(\sum_{g\in\Gamma} a_g g) = a_1$, se trouve être précisément le caractère de Chern d'un module de Fredholm géométrique 1-sommable. Ainsi, $\tau(K_0(\mathrm{C}_r^*(\Gamma))) \subset \mathbb{Z}$.

La relation avec la théorie de l'indice des opérateurs elliptiques sur les variétés est assez transparente. Elle implique cependant une étape très non triviale : l'identification de la cohomologie cyclique continue périodique de l'algèbre $C^\infty(M)$, munie de sa topologie d'espace de Fréchet, avec l'homologie de de Rham de M (cf. III.2.α).

Comme c'est souvent le cas avec une idée arrivée à son terme, la cohomologie cyclique a rapidement été reconnue comme pertinente pour d'autres branches des mathématiques.

Inspirés par les travaux de Connes et motivés par la K-théorie algébrique, Loday et Quillen [18] ont développé la théorie duale, l'homologie cyclique, et l'ont reliée à l'homologie de l'algèbre de Lie des matrices sur un anneau. Partant d'un point de vue similaire, B. Tsygan [28] est arrivé seul au concept d'homologie cyclique comme version additive de la K-théorie algébrique.

Le rôle de la cohomologie cyclique comme théorie des courants de de Rham non commutative a trouvé des applications spectaculaires en relation avec l'un des problèmes centraux de la topologie, la conjecture de Novikov. Dans sa forme la plus connue, cette conjecture stipule que les "signatures supérieures" d'une variété orientée non simplement connexe M, formée des L-classes de M et de la cohomologie de $\pi_1(M)$, sont des invariants d'homotopie. Lorsque la variété est simplement connexe, cela revient à une conséquence de la formule de signature de Hirzebruch, l'invariance d'homotopie du L-genre. Pour les variétés M dont le groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(M)$ est abélien libre, Lusztig [19] a conçu une méthode de preuve fondamentale, basée sur le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer pour les familles d'opérateurs elliptiques. La famille concernée est celle des opérateurs de signature sur M torsadés par des fibrés en droites plates, donc paramétrés par le dual de Pontryagin $\widehat{\Gamma}$. Le fibré d'indices de cette famille, qui appartient à $K^*(\widehat{\Gamma})$, est invariant par homotopie, et le théorème d'Atiyah-Singer permet d'identifier son caractère de Chern comme signature supérieure.

Si Γ n'est pas abélien, le dual de Pontryagin cesse d'exister comme espace ordinaire, mais le groupe $\mathrm{C}^*(\Gamma)$ de C*-algèbres reste un substitut naturel de $C(\widehat{\Gamma})$. De plus, les travaux de Mishchenko et Kasparov ont donné une signification précise à l'incarnation "non commutative" du fibré d'indices ci-dessus, en tant qu'élément de $K_*(\mathrm{C}^*(\Gamma))$, et ont établi son invariance par homotopie. Divers dispositifs de K-homologie/cohomologie, dans le contexte des C*-algèbres, ont été utilisés avec succès par Mishchenko [20], Kasparov [16], Kasparov-Skandalis [17] et, tout récemment, par Higson-Kasparov pour prouver la validité de la conjecture de Novikov dans une grande variété de cas, comme lorsque Γ est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie (Kasparov) ou lorsque Γ est moyennable (Higson-Kasparov). Toutes ces preuves contournent la dernière étape de l'argument original de Lusztig, qui ne peut être restaurée qu'au moyen de la cohomologie cyclique.

L'approche cohomologique cyclique (due à Connes) est traitée dans III.4-5. Ses principales caractéristiques sont les suivantes. Premièrement, on construit une variante raffinée de la signature de Mishchenko-Kasparov, comme un élément du K-groupe de l'anneau de groupes $\mathcal{R}\Gamma$, où l'anneau fondamental $\mathcal{R}$ est constitué de matrices infinies de décroissance rapide. De plus, tout cocycle de groupe (normalisé) donne canoniquement naissance à un cocycle cyclique dans $\mathrm{HC}^*(\mathcal{R}\Gamma)$. Le résultat de l'appariement entre ce cocycle et la signature généralisée dans $K_0(\mathcal{R}\Gamma)$ est ensuite identifié, au moyen d'un "théorème d'indice supérieur", comme la signature supérieure correspondant au cocycle de groupe donné. L'histoire aurait pu s'arrêter là, sauf que l'invariance par homotopie de la signature généralisée est connue pour n'avoir lieu que dans $K_0(\mathrm{C}^*(\Gamma))$. La transition du premier K-groupe au second nécessite un analogue approprié de l'algèbre de Harish-Chandra-Schwartz. Cette dernière est connue pour exister lorsque Γ appartient à la classe remarquable des groupes hyperboliques au sens de Gromov, qui satisfont donc la conjecture de Novikov.

Une autre application remarquable de la cohomologie cyclique, en tant qu'homologie des courants fermés de de Rham sur l'espace des feuilles, concerne la théorie des feuilletages (cf. III.6-7). Tout d'abord, elle permet d'introduire, sur un feuilletage orienté transversalement $(V, \mathcal{F})$, une classe fondamentale de cohomologie cyclique $[V/\mathcal{F}]$. Comme dans le cas de la conjecture de Novikov, l'invariance topologique n'est pas automatique et soulève en réalité un problème majeur. La solution de Connes implique une nouvelle technique : le passage à un fibré longitudinal de métriques des feuilles, tout en préservant l'appariement de la classe fondamentale transverse avec la K-théorie. Plusieurs conséquences intéressantes et purement géométriques en découlent. La nature intrinsèquement non commutative d'un espace feuilleté se manifeste avec force dans l'interaction surprenante entre les aspects géométriques différentiels et théoriques de la mesure. L'exemple le plus frappant est l'égalité.

$$GV = i_\delta \frac{d}{dt}[V/\mathcal{F}]$$

reliant la classe de Godbillon-Vey d'un feuilletage de codimension 1 à l'évolution temporelle de la classe fondamentale transverse sous le groupe d'automorphismes modulaires de l'algèbre de von Neumann correspondante.

La géométrie différentielle classique a débuté avec un calcul local et a évolué pour traiter les problèmes globaux. À l'opposé, la version non commutative est passée du global au local ! En fait, la signification même de la notion de "local" en géométrie non commutative était problématique avant l'avènement du calcul quantifié de Connes (cf. chapitre IV). S'il n'est pas surprenant que le formalisme de la mécanique quantique joue un rôle fondamental, il a fallu l'extraordinaire perspicacité de Connes pour réaliser qu'il peut être transformé en un ensemble organisé d'outils "locaux", prêts à assumer le rôle du calcul infinitésimal. Présenté sous forme de dictionnaire succinct, le calcul quantique part de l'interprétation quantique familière des observables, avec le remplacement des variables complexes (resp. des variables réelles) par des opérateurs (resp. des opérateurs autoadjoints) sur un espace de Hilbert (séparable) $\mathcal{H}$, et se poursuit par la substitution d'opérateurs compacts aux infinitésimaux classiques, l'ordre d'un infinitésimal quantique T étant mesuré par le taux de décroissance de ses valeurs caractéristiques $\mu_n(T)$. Motivée par le modèle du module de Fredholm, la différentielle quantifiée est définie par le commutateur avec un opérateur borné fixe $F = F^*, F^2 = I$ qui divise $\mathcal{H}$ en deux sous-espaces orthogonaux isomorphes.

$$dT = [F, T].$$

Finalement, l'*intégrale* d'une *variable mesurable* $T \geq 0$ est définie comme la divergence logarithmique de la trace de T,

$$\frac{1}{\log N} \sum_0^{N-1} \mu_n() \longrightarrow \int T,$$

Le sens de la mesurabilité est que le membre de droite est indépendant de la procédure de limitation sous-jacente.

Ce décor ainsi planté, un éventail impressionnant d'applications du nouveau calcul infinitésimal suit rapidement. Elles vont des formules de la mesure de Minkowski des ensembles de Cantor et de la mesure de Hausdorff des ensembles de Julia – en tant qu'applications du calcul quantifié à une variable – au calcul d'un analogue quadridimensionnel de l'action de Polyakov de la théorie conforme des champs bidimensionnelle, en passant par la compréhension de l'"aire" d'une variété quadridimensionnelle passant par une quantification canonique du calcul sur les $2n$-variétés conformes.

Le sixième et dernier chapitre pourrait conduire à un changement révolutionnaire dans la pensée géométrique, comparable à la transition de la mécanique classique à la mécanique quantique. La notion d'espace spectral X, au sens de Connes, est une version quantique d'un espace riemannien. Ainsi, les coordonnées de X sont données par une algèbre involutive, mais pas nécessairement commutative, $\mathcal{A}$, d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. L'élément de longueur quantifié de X est un "infinitésimal" de la forme

$$ds = D^{-1},$$

où $D = D^*$ est un opérateur autoadjoint non borné sur $\mathcal{H}$ tel que les commutateurs $[D, a]$ sont bornés $\forall a \in \mathcal{A}$. Bien que ds ne commute plus avec les coordonnées, l'algèbre qu'il génère satisfait des relations de commutation non triviales.

Dans cette figure, une variété riemannienne (spinorielle) M est décrite (cf. [9]) par l'algèbre $C^\infty(M)$ représentée par des opérateurs de multiplication sur l'espace L^2 des sections du fibré de spins sur M et dont l'élément de longueur quantifié est donné par le propagateur de Dirac $ds = D^{-1}$ (l'ambiguïté créée par les modes nuls possibles est sans conséquence). Les relations de commutation sont

$$[[f, ds^{-1}], g] = 0, \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

avec une relation supplémentaire, de degré $n = \dim M$, découlant de la nature homologique de la forme volumique sur M. Un exemple de la façon dont les caractéristiques géométriques classiques sont récupérées de cette perspective est la formule "duale" donnant la distance géodésique

$$\operatorname{dist}(x, y) = \sup \left\{ f(x) - f(y) \; ; \; \|[D, f]\| \leq 1 \right\},$$

qui conserve également sa signification pour les espaces discrets.

En tant que fondement mathématique de la théorie de la relativité générale d'Einstein, la géométrie de Riemann (sous sa forme lorentzienne) est la géométrie de l'espace-temps à l'échelle macroscopique. En la plaçant sur un pied d'égalité avec la géométrie des espaces discrets, d'une manière directement compatible avec le formalisme de la mécanique quantique, l'approche spectrale de Connes permet d'aller au-delà de l'échelle de Planck et de tenter de déchiffrer la structure fine de l'espace-temps. C'est précisément ce que l'auteur s'efforce de faire dans la toute dernière section, consacrée à une explication géométrique du meilleur modèle phénoménologique disponible en physique des particules, le Modèle Standard.

L'ouvrage a ses défauts. Certaines parties exigent une sophistication mathématique bien plus grande que d'autres. L'index devrait être beaucoup plus détaillé. Et il convient de blâmer les éditeurs pour avoir relié l'ouvrage d'une manière qui ne résiste pas aux nombreuses lectures qu'il requiert. Mais en tant que livre de vision authentique, la Géométrie non commutative rend insignifiantes ces petites chicanes.

Bibliographie

[1] M. F. Atiyah, *Global theory of elliptic operators*, Proc. Internat. Conf. Funct. Anal. and Related Topics (Tokyo, 1969), Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1970, pp. 21-30.

[2] M. F. Atiyah, I. M. Singer, *The index of elliptic operators I and III*, Ann. Math. 87 (1968), 484-530, 546-604.

[3] L. G. Brown, R. G. Douglas, P. A. Phillmore, *Extensions of* C^**-algebras and* K*-homology*, Ann. Math. 105 (1977), 335-348.

[4] A. Connes, *Une classification des facteurs de type* III, Ann. Sci. École. Norm. Sup. 6 (1973), 133-252.

[5] ______, *Classification of injective factors, cases* II_1, II_∞, III_λ, $\lambda \neq 1$, Ann. Math. 104 (1976), 73-115.

[6] ______, *Sur la classification des facteurs de type* II, [6] C. R. Acad. Sci. Paris 281 (1975), 13-15.

[7] ______, *An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a* C^**-algebra by an action of* $\mathbb{R}$, Adv. in Math. 39 (1981), 31-55.

[8] ______, *Noncommutative differential geometry, Part I : The Chern character in* K*-homology* (preprint IHES M/82/53) ; *Part II : De Rham homology and noncommutative algebra* (preprint IHES M/83/19), Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 62 (1986), 257-360.

[9] ______, *Gravity coupled with matter and the foundation of noncommutative geometry*, Comm. Math. Phys. 182 (1996), 155-176.

[10] J. Dixmier, *Sous-anneaux abéliens maximaux dans les facteurs de type fini*, Ann. Math. 59 (1954), 279-286.

[11] H. Dye, *On groups of measure preserving transformations, I, II*, Amer. J. Math. 81 (1959), 119-159 ; 85 (1963), 551-576.

[12] I. Gelfand, M. Neumark, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*, Mat. Sb. 12 (1943), 197-213.

[13] J. Glimm, *Type* I C^**-algebras*, Ann. Math. 73 (1961), 572-612.

[14] R. Haag, D. Kastler, *An algebraic approach to quantum field theory*, J. Math. Phys. 5 (1964), 848.

[15] G. G. Kasparov, *The operator* K*-functor and extensions of* C^**-algebras*, Math. USSR-Izv. 16 (1981), 513-572.

[16] ______, *Equivariant* KK*-theory and the Novikov conjecture*, Invent. Math. 91 (1988), 147-201.

[17] G. G. Kasparov, G. Skandalis, *Groups acting on buildings, operator* K*-theory and Novikov's conjecture*, K-Theory 4 (1991), 303-337.

[18] J. L. Loday, D. Quillen, *Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices*, Comment. Math. Helv. 59 (1984), 569-591.

[19] G. Lusztig, *Novikov's higher signature and families of elliptic operators*, J. Differential Geom. 7 (1972), 229-256.

[20] A. S. Mishchenko, *Infinite-dimensional representations of discrete groups and higher signatures*, Math. USSR-Izv. 8 (1974), 85-112.

[21] D. Mcduff, *Uncountably many* II_1 *factors*, Ann. Math. 90 (1969), 372-377.

[22] F. J. Murray, J. von Neumann, *On rings of operators*, Ann. Math. 37 (1936), 116-229.

[23] M. Pimsner, D. Voiculescu, *Exact sequences for K-groups and* Ext*-groups of certain cross-product* C^**-algebras*, J. Operator Theory 4 (1980), 93-118.

[24] ______, *K-groups of reduced crossed products by free groups*, J. Operator Theory 8 (1982), 131-156.

[25] R. Powers, *Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings*, Ann. Math. 86 (1967), 138-171.

[26] S. Sakai, *A characterization of W^*-algebras*, Pacific J. Math. 6 (1956), 763-773.

[27] M. Takesaki, *Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type* III, Acta Math. 131 (1973), 249-310.

[28] B. Tsygan, *Homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology*, Uspekhi Math. Nauk 38 (1983), 217-218.

[29] J. von Neumann, *On rings of operators : Reduction theory*, Ann. Math. 50 (1949), 401-485.

[30] ______, *On rings of operators, III*, Ann. Math. 41 (1940), 94-161.