Géométrie non commutative

Andrew Lesniewski

Espaces non commutatifs

On a remarqué depuis longtemps que diverses propriétés des ensembles de points peuvent être reformulées en termes de propriétés de certains anneaux commutatifs de fonctions sur ces ensembles. Cette observation s'est avérée particulièrement fructueuse en géométrie algébrique et a conduit à d'énormes progrès dans ce domaine au cours des dernières décennies. Dans ces développements, le concept de point dans un espace est secondaire et éclipsé par les propriétés algébriques des (faisceaux d') anneaux de fonctions sur ces espaces.

Cette idée sous-tend également la géométrie non commutative, une nouvelle orientation des mathématiques initiée par le mathématicien français Alain Connes et exposée dans son récent ouvrage [3]. En géométrie non commutative, on va plus loin : il n'est plus nécessaire que l'algèbre des fonctions soit commutative ! De plus, si la géométrie algébrique ne s'est pas entièrement débarrassée du concept de point, la géométrie non commutative n'utilise pas ce concept du tout. En fait, un point dans un espace non commutatif est souvent une contradiction dans les termes.

L'une des sources de la géométrie non commutative est le théorème classique suivant dû à Gelfand et Naimark.

Théorème 1. *Soit $\mathfrak{A}$ une C^*-algèbre commutative, et soit M l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathfrak{A}$. Alors, muni d'une topologie naturelle, M est un espace localement compact, et $\mathfrak{A} \simeq C_0(M)$ où $C_0(M)$ désigne la C^*-algèbre des fonctions continues sur M s'annulant à l'infini.*

Rappelons qu'une C^*-algèbre est une algèbre sur $\mathbb{C}$, munie d'une opération involutive * et d'une norme $\|\cdot\|$, qui satisfait la condition $\|SS^*\| = \|S\|^2$. Autrement dit, la catégorie des espaces localement compacts est équivalente à la catégorie des C^*-algèbres abéliennes. Les points d'un espace topologique peuvent être caractérisés en termes purement algébriques comme les idéaux maximaux d'une algèbre de fonctions sur cet espace.

Une autre source d'inspiration importante pour la géométrie non commutative est la physique quantique. On sait depuis les temps héroïques de la mécanique quantique (Heisenberg, Born, Jordan, Schrödinger, Dirac, von Neumann,...) que les concepts ordinaires de la mécanique classique et de la géométrie symplectique ne s'appliquent pas au monde subatomique. Pour comprendre les phénomènes physiques se produisant à l'échelle atomique, il est nécessaire de remplacer les concepts de la géométrie classique par d'autres structures non commutatives. La notion de fonction sur l'espace des phases doit être remplacée par un opérateur agissant sur un espace d'états de Hilbert $\mathcal{H}$ ou une observable quantique. Dans le langage de Dirac, les c-nombres sont remplacés par des

Andrew Lesniewski était professeur agrégé de physique à l'Université Harvard. Il est actuellement vice-président de Acadian Asset Management à Boston, MA.
Recherche financée par la subvention NSF DMS-94-24344.
Référence : Notices de l'AMS, Volume 44, n° 7, août 1997, p. 800-805.
Transcription en Latex et traduction : Denise Vella-Chemla, assistée de Google Translate, juin 2025.

q-nombres. Cette procédure est appelée quantification.

L'exemple le plus simple est celui d'un espace plat $\mathbb{R}^2$ qui est l'espace des phases d'une particule se déplaçant dans une dimension. Après quantification, les coordonnées q et p d'un point de $\mathbb{R}^2$ sont remplacées par les opérateurs q et p qui obéissent à la relation de commutation de Heisenberg-Born-Jordan.

$$[q, p] = i\hbar I, \tag{1}$$

où $\hbar$ est une constante fondamentale de la nature, la constante de Planck. Explicitement, on suppose que l'espace d'états de Hilbert est $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, et $q\psi(x) = x\psi(x)$, $p\psi(x) = -i\hbar\psi'(x)$. Cette procédure de quantification produit une structure qui peut être considérée comme une déformation non commutative d'un espace des phases classique. Le principe d'incertitude de Heisenberg implique qu'il n'existe pas de concept naturel de point sur cet espace des phases quantique déformé : nous ne disposons que d'une algèbre non abélienne de "fonctions sur le plan non commutatif".

On peut également quantifier l'espace des phases classique avec une géométrie plus complexe, la plus simple étant le tore $\mathbb{T}^2$. Ici l'algèbre des observables est engendrée par deux opérateurs unitaires u et v, tels que

$$uv = e^{2\pi i\lambda} vu. \tag{2}$$

où $\lambda = 2\pi\hbar$. On peut considérer u et v comme des quantifications des fonctions classiques $e^{2\pi ip}$ et $e^{2\pi iq}$, respectivement. L'algèbre non commutative résultante est appelée (algèbre des fonctions sur le) tore quantique ou algèbre de rotation irrationnelle. Cette algèbre apparaît aussi naturellement dans d'autres contextes (structures périodiques, champs magnétiques, modèles matriciels de la théorie des cordes). La quantification de géométries plus complexes conduit à des structures non commutatives qui ne peuvent être décrites aussi facilement.

Des structures non commutatives apparentées apparaissent comme q-déformations de groupes de Lie (voir, par exemple, [5, 8]). Ces structures sont souvent appelées groupes quantiques [1]. Ici, les algèbres non commutatives possèdent la structure supplémentaire d'algèbres de Hopf. Cette structure supplémentaire sur l'algèbre de fonctions code le fait que l'espace non commutatif sous-jacent est un objet de type groupe. Pour illustrer cela, considérons d'abord le cas abélien. Soit $\mathfrak{F}$ une algèbre (dont nous ignorons la structure topologique) de fonctions complexes sur un groupe G avec l'élément neutre e. Pour $f \in \mathfrak{F}$, on pose $\Delta f(g_1, g_2) = f(g_1 g_2), (g) = f(e)$ et $Sf(g) = f(g^1)$. Ceci définit les homomorphismes d'algèbres $\Delta : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}$ ("coproduit") et $\varepsilon : \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$ ("counité"), ainsi qu'un antihomomorphisme d'algèbres $S : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ ("antipode"). Les propriétés usuelles définissant un groupe peuvent être formulées de manière équivalente dans le langage de ces homomorphismes sans jamais faire référence à la notion d'élément de G. Explicitement, on vérifie facilement que $(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta, (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{Id}$, et $m \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = \mathrm{I}$. Dans la dernière de ces identités, m désigne la multiplication sur $\mathfrak{F}$, et I est l'élément neutre (i.e. Identité) de $\mathfrak{F}$. Une algèbre de Hopf est une algèbre (non nécessairement commutative) qui est munie des homomorphismes Δ et ε et d'un antihomomorphisme S, qui satisfait les trois conditions énoncées ci-dessus. Dans le cas de SU(2), le groupe quantique correspondant (ou q-déformation) est construit

[1] Le terme "groupes quantiques" est quelque peu trompeur, car ces structures ne sont pas des quantifications de groupes classiques au sens physique décrit ci-dessus.

comme suit. Soient a, b les fonctions à valeurs complexes sur SU(2) associant à un élément du groupe g l'élément matriciel correspondant dans

$$\mathrm{SU}(2) \ni g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

L'algèbre engendrée par ces fonctions est abélienne. L'algèbre (C^* des fonctions sur le) groupe quantique $\mathrm{SU}_q(2)$ est définie comme une déformation de l'algèbre des fonctions sur SU(2). Nous désignerons les générateurs de l'algèbre déformée par les mêmes symboles, $a, b, \overline{a}, \overline{b}$, et imposerons les relations

$$\begin{aligned} ab &= qba, & a\overline{b} &= qa\overline{b}, \\ b\overline{b} &= \overline{b}b, & b\overline{a} &= q\overline{a}b, \\ \overline{b}\overline{a} &= q\overline{a}\overline{b}, & a\overline{a} - \overline{a}a &= \left(q^{-1} - q\right)b\overline{b}, \end{aligned}$$

où q est un paramètre réel tel que $|q| < 1$. Le cas abélien, celui de l'algèbre des fonctions continues sur SU(2), correspond à $q = 1$. Pour la construction de la structure d'algèbre de Hopf correspondante, nous renvoyons le lecteur à la littérature.

La théorie des probabilités libres de Voiculescu [7] est un autre exemple de structure non commutative, motivée par des applications en physique. Ici, le concept d'espace de probabilités est remplacé par une structure non commutative conduisant à des variables aléatoires non commutatives. L'un des principaux résultats de cette théorie, le théorème central limite de Voiculescu, donne la loi du demi-cercle de Wigner, qui apparaît dans la théorie des matrices aléatoires. Les domaines connexes de la théorie ergodique quantique et de la théorie de l'information quantique ont récemment fait l'objet d'une attention soutenue. Ils jouent un rôle essentiel dans le domaine émergent du calcul quantique.

Les exemples intéressants d'espaces non commutatifs abondent, et ils sont analysés en détail dans l'ouvrage de Connes. En fait, il s'avère que la géométrie non commutative offre également un cadre pratique pour l'étude de structures "commutatives" mais hautement singulières. Celles-ci incluent les ensembles fractals et les produits de variétés lisses par des ensembles finis.

K-théorie et modules de Fredholm

Une partie importante du programme de Connes est la notion de fibré vectoriel sur un espace non commutatif. Le célèbre théorème de Swan stipule que le groupe algébrique K_0 de l'algèbre $C(M)$ (définie en termes de classes d'isomorphismes stables de $C(M)$-modules projectifs), où M est compact, coïncide avec le groupe de Grothendieck $K(M)$ (défini en termes de fibrés vectoriels complexes localement triviaux de dimension finie sur M) de la variété sous-jacente. Dans le cadre de la géométrie non commutative, on peut ainsi considérer les éléments du groupe $K_0(\mathfrak{A})$, où $\mathfrak{A}$ est maintenant une algèbre non abélienne de fonctions sur un espace non commutatif, comme des (classes d'équivalence de) fibrés vectoriels sur cet espace.

La K-théorie des algèbres d'opérateurs a été créée par Brown, Douglas et Fillmore [1] au milieu des années 1970 ; ils ont d'ailleurs été les premiers à explorer le programme de Connes. Leur objectif était de réinterpréter la K-théorie classique en termes d'algèbres d'opérateurs, étendant ainsi la

K-théorie aux espaces topologiques généraux. Ils ont classé toutes les extensions de la C^*-algèbre.

$$1 \to \mathcal{K} \to \mathfrak{A} \to C(M) \to 1$$

de $\mathfrak{A}$, où $\mathcal{K}$ est un idéal d'opérateurs compacts et où $C(M)$ est une C^*-algèbre commutative. Ils ont montré comment construire un groupe à partir de telles extensions. Pour M compact et de dimension finie, ce groupe est isomorphe à l'homologie de Steenrod de M, $K_1(M)$.

L'un des concepts fondamentaux de la K-théorie est celui de module de Fredholm sur une algèbre $\mathfrak{A}$. Un module de Fredholm impair est un triplet $(\mathcal{H}, \pi, F)$ constitué d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, d'une $*$-représentation π de $\mathfrak{A}$ par des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$, et d'un opérateur unitaire auto-adjoint F tel que $|F, \pi(a)|$ soit compact pour tout $a \in \mathfrak{A}$. Un module de Fredholm est dit pair si, de plus, l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est $\mathbb{Z}_2$-gradué, ce qui signifie que $\mathcal{H}$ est doté d'un opérateur unitaire auto-adjoint γ tel que $\gamma F + F\gamma = 0$.

Les modules de Fredholm apparaissent naturellement en géométrie différentielle ordinaire. Soit M une variété riemannienne, et soit $\Lambda_2^p(M)$ l'espace des p-formes de carré intégrable sur M. Posons $\mathcal{H} = \bigoplus \Lambda_2^p(M)$, et soit $\gamma = (-1)^p$. Avec F désignant la phase de l'opérateur de de Rham $d : \Lambda_2^p(M) \to \Lambda_2^{p+1}(M), \quad d = F|d|$, le triplet $(\mathcal{H}, \pi, F)$ est un module de Fredholm pair. De même, un opérateur de Dirac D sur une variété de spins M définit un module de Fredholm.

Les modules de Fredholm apparaissent également dans divers contextes en physique. Historiquement, le premier exemple est apparu dans la théorie de l'électron de Dirac et a eu un impact profond sur la théorie moderne de l'indice. Plus récemment, les spéculations sur la physique des hautes énergies ont conduit au concept général de supersymétrie. La supersymétrie est une généralisation profonde des symétries spatio-temporelles usuelles qui traite les bosons (particules à spin entier, par exemple les photons) et les fermions (particules à spin demi-entier, par exemple les électrons) sur un pied d'égalité. Mathématiquement, cela revient à remplacer le concept de groupe de Lie par un concept $\mathbb{Z}_2$-gradué, celui de supergroupe de Lie. Ce dernier est un espace non commutatif dont l'algèbre de coordonnées contient des éléments anticommutants. Une combinaison particulière des générateurs de supersymétrie agissant sur l'espace d'états de Hilbert du système est un opérateur de type Dirac de dimension infinie.

D'autres exemples de modules de Fredholm incluent les modèles associés aux phénomènes physiques de l'effet Hall quantique et du chaos quantique.

En effet, une grande partie de la géométrie différentielle classique peut être codée dans le concept de module de Fredholm. La longueur d'une courbe sur une variété M est définie en termes de structure riemannienne sur la variété. Si $\gamma : [0, 1] \to M$ est une courbe lisse, alors sa longueur est $L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_{\mu\nu}\, \dot{\gamma}^\mu\, \dot{\gamma}^\nu} dt$, où g est un tenseur métrique. La distance $d(p, q)$ entre deux points p et q sur M est donnée par $\inf_\gamma L(\gamma)$, où l'infimum est pris sur toutes les courbes lisses γ reliant p et q. Pour M une variété de spin compacte avec l'opérateur de Dirac D, Connes remarque que cette distance peut être exprimée en termes d'un module de Fredholm sur $C(M)$: $d(p, q) = \sup|f(p) - f(q)|$, où le supremum est pris sur toutes les courbes lisses f telles que le commutateur $|f, D|$ est borné et vérifie $\|f, D\|_\infty \leq 1$. En extrapolant cette observation au cas non commutatif, nous pouvons donc considérer un module de Fredholm sur une algèbre comme définissant la structure métrique

sur l'espace non commutatif sous-jacent. Ce fait sous-tend, entre autres, la formulation par Connes du modèle standard des interactions élémentaires.

Cohomologie cyclique et théorie de l'indice

L'une des pierres angulaires de la géométrie non commutative est la cohomologie cyclique. Cette théorie de la cohomologie est une généralisation de grande portée de la théorie classique de de Rham. Initialement développée par Connes [2] et, indépendamment, par Boris Tsygan [6] au début des années 1980, la cohomologie cyclique est un perfectionnement de la cohomologie de Hochschild et se construit comme suit. Commençons par définir la cohomologie de Hochschild de l'algèbre $\mathfrak{A}$ (techniquement, ce que je décris ci-dessous est la cohomologie de Hochschild de $\mathfrak{A}$ à coefficients dans le dual $\mathfrak{A}^*$).

Soit $C^n(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*)$ l'espace des fonctionnelles $(n+1)$-linéaires à valeurs complexes sur $\mathfrak{A}$, dont les éléments seront notés f. Considérons l'opérateur $b : C^n(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*) \to C^{n+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*)$ défini par

$$(bf)(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j f(a_0, \ldots, a_j a_{j+1}, ...a_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(a_{n+1}a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

On vérifie que $b \circ b = 0$ de sorte que b est un opérateur de cobord. La cohomologie du complexe $(C^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*), b)$ est appelée cohomologie de Hochschild de $\mathfrak{A}$ et est notée $H^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*)$. Dans le cas de $\mathfrak{A} = C^\infty(M)$ où M est une variété lisse, les groupes de cohomologie de Hochschild reproduisent les espaces des courants de de Rham sur M. C'est en quelque sorte un inconvénient, car on souhaiterait un schéma de cohomologie reproduisant, dans le cas commutatif, l'homologie de de Rham.

Pour construire une telle théorie, notons $C^n_\lambda(\mathfrak{A})$ l'espace des cochaînes $f \in C^n(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*)$ pour lesquelles la condition de cyclicité suivante est vérifiée :

$$f(a_n, a_0, ..., a_{n-1}) = (-1)^n f(a_0, a_1, ..., a_n).$$

Alors $(C^*_\lambda(\mathfrak{A}), b)$ s'avère être un sous-complexe de $(C^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*), b)$, et sa cohomologie est appelée cohomologie cyclique de $\mathfrak{A}$. Les groupes de cohomologie cyclique sont notés $HC^n(\mathfrak{A})$. Le théorème ci-dessous montre que la cohomologie cyclique possède la propriété souhaitée.

Théorème 2. *Soit M une variété compacte lisse, et soit $\mathfrak{A} = C^\infty(M)$ l'algèbre des fonctions lisses sur M. Alors il existe un isomorphisme canonique*

$$HC^n(\mathfrak{A}) = \ker(b) \bigoplus_j H_{n-2j}(M),$$

où $H_k(M)$ désigne l'homologie de de Rham de M.

Les cohomologies cycliques de divers autres espaces non commutatifs (tores quantiques, groupes quantiques,...) ont été calculées.

Supposons maintenant que $(\mathcal{H}, \pi, F)$ soit un module de Fredholm pair sur $\mathfrak{A}$, avec $\mathbb{Z}_2$-graduation sur $\mathcal{H}$ défini par γ. À ce module de Fredholm est associée une classe de cohomologie cyclique

fondamentale $\mathrm{ch}(F)$, appelée caractère de Chern. Elle est donnée par

$$\mathrm{ch}(F) = \mathrm{tr}(a_0, ..., a_n) = \mathrm{tr}(\gamma\, a_0[F, a_1] \dots [F, a_n]). \tag{3}$$

Ce concept général du caractère de Chern conduit à un théorème de l'indice qui constitue une extension profonde du théorème de l'indice classique d'Atiyah-Singer. La partie topologique de la formule de l'indice est donnée en termes d'un appariement entre $\mathrm{ch}(F)$ et une classe $K_0(\mathfrak{A})$.

Théorie quantique des champs

Avant de décrire le contenu du dernier chapitre de l'ouvrage de Connes, consacré en grande partie à sa formulation du modèle standard des interactions fondamentales, je voudrais présenter quelques problèmes auxquels la théorie quantique relativiste des champs est actuellement confrontée.

Historiquement, les théories quantiques des champs sont apparues comme le résultat d'une "seconde quantification" de systèmes classiques. Le terme "première quantification" (ou simplement, quantification) fait référence à une procédure qui mène d'une description en mécanique classique d'un système à sa description en mécanique quantique. Cette dernière est généralement formulée en termes d'une équation aux dérivées partielles fondamentale ("l'équation d'onde") impliquant un champ (scalaire, vectoriel, spinoriel,...) sur l'espace-temps et peut donc être considérée comme une théorie classique des champs. La constante de Planck $\hbar$ entre dans l'équation d'onde, et la théorie classique est récupérée comme une limite appropriée lorsque $\hbar \to 0$. L'exemple le plus célèbre de cette procédure est la quantification de la mécanique newtonienne par Schrödinger, dont l'équation d'onde porte son nom. La première quantification de l'électromagnétisme a été réalisée par Maxwell au XIXe siècle. Sa théorie marqua une transition de la description corpusculaire à la description ondulatoire de la lumière (l'absence de constante de Planck dans cette théorie est un hasard dû entièrement à l'absence de masse du photon). Contrairement à la théorie de Schrödinger, la théorie de Maxwell est relativiste, ce qui signifie qu'elle est compatible avec la théorie de la relativité restreinte. Un autre exemple célèbre de théorie classique des champs est la quantification de l'électron par Dirac.

Les théories classiques des champs ne permettent pas de décrire des systèmes dont le nombre de particules n'est pas fixe (les particules sont créées ou annihilées par interaction), et ne s'appliquent donc pas à la physique des hautes énergies. Une procédure conduisant à la description de systèmes à nombre variable de particules est appelée "seconde quantification" en raison de sa similitude avec la quantification. Le point de départ de la seconde quantification est une théorie des champs premièrement quantifiée (classique), et le résultat est une théorie des champs quantifiée. Si la théorie classique des champs est relativiste, la théorie quantique des champs résultante est appelée théorie quantique des champs relativiste. Le tableau ci-dessous résume ces remarques.

	Particles	
Mécanique classique		Optique géométrique
↓		↓
	Théorie classique des champs	
Mécanique quantique		Théorie de Maxwell
↓		↓
	Théorie quantique des champs	
Seconde théorie de la quantification		Electrodynamique quantique

(4)

Peu après la découverte de la théorie quantique relativiste des champs, il est devenu évident qu'elle souffrait de graves lacunes conceptuelles et techniques. La seule façon connue d'extraire des informations des équations fondamentales était de les développer en série entière dans la constante de couplage. Un tel développement est appelé théorie des perturbations. Malheureusement, il s'avère que chaque terme de la théorie des perturbations, à l'exception de la contribution d'ordre dominant, est singulier, et donc la série entière telle qu'elle est n'a aucun sens ! Les travaux révolutionnaires de Feynman, Schwinger, Dyson et d'autres ont abouti à une procédure d'extraction des parties finies des expressions singulières rencontrées dans la théorie des perturbations, connue sous le nom de théorie de la renormalisation. La théorie de la renormalisation supprime les singularités de la théorie des perturbations au prix d'introduire un certain nombre de constantes arbitraires dont les valeurs doivent être déterminées par l'expérience. Cela conduit à l'exigence que le nombre de ces constantes soit fini (sinon on pourrait "expliquer" n'importe quelle expérience) et qu'elles soient des paramètres mesurables de la théorie. Toute théorie quantique des champs satisfaisant ces exigences est dite renormalisable. Ces concepts ont conduit à certains des développements les plus remarquables de la physique. La théorie de l'interaction entre électrons et photons, l'électrodynamique quantique, s'avère renormalisable et présente une concordance remarquable avec l'expérience.

L'exigence de renormalisabilité est devenue un paradigme de la théorie quantique des champs et s'est avérée extrêmement fructueuse. Guidés par elle, les physiciens des particules ont généralisé l'électrodynamique quantique à d'autres types d'interactions : le modèle de Weinberg-Salam unifiant les interactions électromagnétiques et faibles, et le modèle standard unifiant les interactions électromagnétiques, faibles et fortes. Il existe aujourd'hui un consensus sur le fait que le modèle standard est la théorie correcte des interactions élémentaires. Un fait troublant concernant cette théorie est que la gravité a jusqu'à présent résisté à son inclusion dans le cadre de la théorie quantique des champs renormalisables.

Ce paradigme de renormalisabilité a subi une révision radicale dans les années 70 suite à la théorie des groupes de renormalisation de Wilson. Selon Wilson, nous n'avons pas besoin de connaître les détails de la "vraie" théorie des interactions élémentaires, qui est valable à toutes les échelles d'énergie. Il se pourrait tout aussi bien que la théorie fondamentale ne soit pas du tout une théorie quantique des champs. Nous ne disposons que d'une théorie effective, une limite de basse énergie de cette théorie fondamentale. Le concept de renormalisabilité acquiert ainsi un sens nouveau : les théories renormalisables, plutôt que d'être "fondamentales", sont simplement celles qui survivent à la réduction de l'échelle fondamentale à l'échelle du "laboratoire". Les théories non renormalisables disparaissent lors du franchissement de cette limite.

Le Modèle Standard à la Connes

Le dernier chapitre de l'ouvrage de Connes présente sa formulation du modèle standard des interactions fondamentales. Quiconque a étudié le modèle standard dans sa formulation habituelle, avec toute sa pléthore de champs et de mécanismes, appréciera la formulation géométrique concise présentée dans l'ouvrage. La formulation de Connes fournit un principe géométrique naturel sous-jacent à cette théorie dans le cadre de la géométrie non commutative.

La première idée fondamentale de la théorie de Connes, dans sa version la plus simple (qui ne donne pas le modèle standard complet), est la suivante. Considérons un espace-temps à deux nappes $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{Z}_2$, où le facteur $\mathbb{R}^4$ est l'espace-temps usuel et le facteur $\mathbb{Z}_2$ est une "dimension discrète" (ce qui ressemble légèrement à la théorie de Kaluza-Klein unifiant la gravité einsteinienne et l'électromagnétisme). L'algèbre des fonctions lisses sur cet espace, $C^\infty(\mathbb{R}^4) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^4)$, est abélienne. Cependant, la dérivée dans la direction discrète est un quotient aux différences finies, et un opérateur de Dirac D sur cet espace est donc quelque peu inhabituel. Des versions plus raffinées de la théorie (pour reproduire le contenu correct en quarks du modèle standard) impliquent la multiplication de $\mathbb{R}^4$ par des ensembles finis plus compliqués et la mise en place d'une structure bimodule sophistiquée sur l'algèbre des fonctions sur l'espace produit résultant.

C'est ici que le formalisme de la géométrie non commutative devient crucial. En utilisant son cadre algébrique, Connes développe la théorie de jauge pertinente associée au module de Fredholm défini par D. Cela conduit à un concept naturel de forme de connexion $\mathcal{A}$, de forme de courbure $\mathcal{F}$, etc.

La deuxième idée fondamentale de l'approche de Connes est l'utilisation de la trace de Dixmier comme fonctionnelle fondamentale pour définir l'action de la théorie. La trace de Dixmier d'un opérateur positif S de spectre discret λ_j est donnée par

$$\mathrm{tr}_\omega(S) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log\, N} \sum_{1\le j\le N} \lambda_j$$

(elle n'est donc non triviale que pour les opérateurs dont les traces divergent logarithmiquement). La fonctionnelle d'action de Yang-Mills de la théorie est maintenant donnée par $\mathrm{tr}_\omega(|D|^{-4}\mathcal{F}^2)$. Le fait remarquable est que cette fonctionnelle d'action, plus la fonctionnelle d'action fermionique dont je ne discute pas ici, reproduisent la fonctionnelle d'action du modèle standard. Pour saisir l'ampleur de ce fait, il faut procéder à une série de manipulations algébriques véritablement éprouvantes.

La théorie de Connes est purement classique et appartient donc à la colonne du milieu du tableau (4). Il ne propose pas de schéma de quantification qui lui serait intrinsèque ; la seule façon connue d'obtenir une théorie quantique des champs à partir du modèle de Connes est de suivre les règles habituelles de la théorie quantique des champs. En raison de son caractère classique, le modèle (ou ses perfectionnements plus récents, dont la gravitation einsteinienne [4]) ne résout pas les problèmes décrits dans la section précédente et n'apporte aucun nouveau principe physique permettant d'atteindre cet objectif. Aucune théorie unifiée des interactions fondamentales n'est connue ; le consensus parmi les physiciens est que la théorie des cordes est actuellement la seule tentative prometteuse d'une telle théorie. Malgré cela, la formulation de Connes du modèle stan-

dard est une construction véritablement remarquable et peut être considérée comme un triomphe majeur de la géométrie non commutative.

Permettez-moi de mentionner que certains développements récents en théorie des cordes montrent des similitudes frappantes et mystérieuses entre la théorie de Connes et la théorie des D-branes. Est-il possible que la géométrie non commutative sous-tende les fondements de la théorie des cordes?

Remarques finales

Il m'est impossible de présenter dans une brève synthèse la richesse des phénomènes mathématiques fascinants décrits par Alain Connes. Je me suis concentré sur les aspects de la géométrie non commutative que je comprends le mieux, à savoir ses relations avec la physique théorique.

La géométrie non commutative de Connes est l'un des jalons des mathématiques. Elle pose les bases d'une nouvelle branche des mathématiques dont l'importance est difficile à estimer. Son impact se fera sentir sur les générations de mathématiciens à venir, de la même manière que "*Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*" de Riemann a influencé le développement de la géométrie différentielle.

L'ouvrage présente un caractère largement programmatique et explicatif : peu de preuves sont apportées, mais la présentation est extrêmement claire. C'est une source d'idées, d'inspiration, de calculs ingénieux et de faits pour les chercheurs qui s'intéressent à l'un des développements les plus fascinants des mathématiques.

Bibliographie

[1] L. L. Brown, R.G. Douglas, P. A. Fillmore, *Extensions of C^*-algebras and K-homology*, Ann. Math. 105 (1977), 265-324.

[2] A. Connes, *Noncommutative differential geometry*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 62 (1986), 257-360.

[3] ----------, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.

[4] ----------, *Gravity coupled with matter and the foundation of noncommutative geometry*, Comm. Math. Phys. 182 (1996), 155-176.

[5] V. G. Drinfeld, *Quantum groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1987, 798-820.

[6] B. Tsygan, *Homology of matrix algebras over rings and the Hochschild cohomology*, Uspekhi Mat. Nauk 38 (1983), 217-218.

[7] D. Voiculescu (ed.), *Free probability theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[8] S. L. Woronowicz, *Twisted* SU(2) *group. An example of a noncommutative differential calculus*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 23 (1987), 613-665.