Traduction de l'article *Logique quantique* de Wikipedia (suppression des références, se reporter à l'article original)

Dans l'étude mathématique de la logique et l'analyse physique des fondements quantiques, la logique quantique est un ensemble de règles pour la manipulation de propositions inspiré par la structure de la théorie quantique. Le domaine prend comme point de départ une observation de Garrett Birkhoff et John von Neumann, que la structure des tests expérimentaux en mécanique classique forme une algèbre booléenne, tandis que la structure des tests expérimentaux en mécanique quantique est une structure beaucoup plus compliquée.

La logique quantique a été proposée comme la logique correcte pour l'inférence propositionnelle en général, plus précisément par le philosophe Hilary Putnam, au moins à un moment de sa carrière. La thèse de Putnam a été un ingrédient important de son article de 1968 "La logique est-elle empirique ?" dans lequel il a analysé le statut épistémologique des règles de la logique propositionnelle. Les philosophes modernes rejettent la logique quantique comme base pour le raisonnement, parce qu'elle manque d'une condition matérielle ; une alternative courante est le système de la logique linéaire, dont la logique quantique est une portion.

Mathématiquement, la logique quantique est formulée en affaiblissant la loi de distributivité d'une algèbre booléenne, ceci résultant en un treillis orthocomplémenté. Les observables de la mécanique quantique et les états peuvent être définis par rapport à des fonctions sur ou vers le treillis, donnant un formalisme alternatif pour les calculs quantiques.

Introduction

La différence la plus notable entre la logique quantique et la logique classique est l'échec de la loi de distributivité propositionnelle :

$$p \text{ et } (q \text{ ou } r) = (p \text{ et } q) \text{ ou } (p \text{ et } r),$$

où les symboles p, q et r sont des variables propositionnelles.

Pour illustrer pourquoi la loi distributive échoue, considérons une particule en mouvement le long d'une droite et (en utilisant un certain système d'unités où la constante de Planck réduite est égale à 1) soit[1]

$$\begin{aligned} &p = \text{la particule a son moment dans l'intervalle } [0, +\tfrac{1}{6}] \\ &q = \text{la particule est dans l'intervalle } [-1, 1] \\ &r = \text{la particule est dans l'intervalle } [1, 3] \end{aligned}$$

On peut observer que :

[1]Pour des raisons techniques, il n'est pas possible de représenter ces propositions comme des opérateurs de la mécanique quantique. Ils sont présentés ici parce qu'ils sont suffisamment simples pour permettre l'intuition, et peuvent être considérés comme des cas limites d'opérateurs qui sont faisables. Voir le § *Logique quantique comme logique des observables* et seq. pour de plus amples détails.

p et (q ou r) = vrai

en d'autres termes, que l'état de la particule est une superposition pondérée des moments entre 0 et $+\frac{1}{6}$ et des positions entre -1 et $+3$.

D'un autre côté, les propositions "p et q" et "p et r" établissent chacune des conditions plus restrictives sur les valeurs simultanées de la position et du moment qui sont autorisées par le principe d'incertitude (elles ont chacune une incertitude d'1/3, ce qui est inférieur au minimum autorisé de 1/2). Il n'y a donc pas d'états qui peuvent soutenir l'une ou l'autre des propositions, et

(p et q) ou (p et r) = faux

Histoire et critique moderne

Dans son traité de 1932 *Fondements mathématiques de la mécanique quantique*, John von Neumann a noté que les projections sur un espace de Hilbert peuvent être vues comme des propositions à propos d'observables physiques ; c'est-à-dire qu'un observateur peut poser des questions oui-non à propos de l'état d'un système physique, et ces questions peuvent recevoir une réponse par une certaine mesure. Les principes de manipulation de ces propositions quantiques ont alors été appelés *logique quantique* par von Neumann et Birkhoff dans un article de 1936.

George Mackey, dans son livre de 1963 (intitulé également *Fondements mathématiques de la mécanique quantique*), a tenté d'axiomatiser la logique quantique comme la structure d'un treillis orthocomplémenté, et a reconnu qu'un observable physique pourrait être défini en fonction des propositions quantiques. Bien que la présentation de Mackey continue de supposer que le treillis orthocomplémenté est le treillis des sous-espaces linéaires fermés d'un espace de Hilbert séparable, Constantin Piron, Günther Ludwig et d'autres ont plus tard développé des axiomatisations qui ne supposent pas qu'un espace de Hilbert sous-tend les propositions.

Inspiré par la défense récente par Hans Reichenbach de la relativité générale, le philosophe Hilary Putnam a popularisé le travail de Mackey dans deux articles de 1968 et 1975, dans lesquels il attribue à son co-auteur, le physicien David Finkelstein, l'idée que les anomalies associées aux mesures quantiques entraînent un échec de la logique elle-même. Putnam espérait développer une alternative possible aux variables cachées ou bien à l'évanouissement de la fonction d'onde dans le problème de la mesure quantique, mais le théorème de Gleason présente des difficultés sévères pour réaliser ce but. Plus tard, Putnam a retiré ses idées, quoique à moindre bruit, mais le dommage avait été fait. Alors que le travail original de Birkhoff et von Neumann avait seulement essayé d'organiser les calculs associés à l'interprétation de Copenhague de la mécanique quantique, une école de chercheurs a alors émergé, chacun espérant que la logique quantique fournirait une théorie des variables cachées viable, ou rendrait évidente la nécessité d'en avoir une. Leur travail s'est avéré infructueux et il a maintenant une mauvaise réputation.

La plupart des philosophes trouvent que la logique quantique est un adversaire peu attrayant de la logique classique. Il est loin d'être évident de savoir si la logique quantique est une logique, au sens où elle décrit un processus de raisonnement, et ceci s'oppose à un langage particulièrement pratique, pour résumer les mesures effectuées par un appareillage quantique. (Pourtant, d'autres argumentent qu'il y a des logiques et qu'elles satisfont toutes les conditions canoniques dont les logiciens ont besoin pour appeler ces objets abstraits des logiques.) En particulier, les philosophes modernes de la science défendent l'idée que la logique quantique tente de remplacer les problèmes insolubles de la physique par des difficultés métaphysiques, plutôt que de résoudre effectivement les problèmes physiques. Tim Maudlin écrit que “la logique quantique “résout” les problèmes (de mesure) en rendant le problème impossible à énoncer.”.

> Le cheval de la logique quantique a reçu tellement de coups et est si sûrement décédé que ... la question n'est pas de savoir s'il se réveillera, mais est plutôt : “comment ce cheval a-t-il fait pour parvenir à être à la première place au monde ?” Le conte de la logique quantique n'est pas le conte d'une idée prometteuse qui a mal tourné, c'est plutôt le conte de la poursuite incessante d'une mauvaise idée... De nombreux philosophes et physiciens sont devenus convaincus qu'un changement de logique (et plus dramatiquement, le rejet de la logique classique) aiderait à la compréhension de la théorie quantique, ou bien nous est suggéré ou même rendu obligatoire par la théorie quantique. Mais la logique quantique, même à travers ses nombreuses incarnations et variations, à la fois dans sa forme technique et dans son interprétation, n'a jamais apporté aucun bénéfice.
>
> — Maudlin, Hilary Putnam, pp. 184-185

La logique quantique reste d'un usage limité, selon les logiciens, comme un contre-exemple extrêmement pathologique (Dalla Chiara and Giuntini: “Pourquoi la logique quantique ? Simplement parce que “les logiques quantiques sont là !””). Bien que la perspicacité centrale de la logique quantique fasse partie du folklore mathématique, comme pompe à intuitions pour la catégorification, les discussions mentionnent rarement la logique quantique.

Structure algébrique

La logique quantique peut être axiomatisée comme la théorie des propositions modulo les identités suivantes :

- $a = \neg\neg a$
- $\vee$ est commutative et associative.
- Il y a un élément maximal $\top$, et $\top = b \vee \neg b$ pour tout b.
- $a \vee \neg(\neg a \vee b) = a$.

(“$\neg$” est la notation traditionnelle pour “non”, “$\vee$” la notation pour “ou”, et “$\wedge$” la notation pour “et”.)

Quelques auteurs se restreignent aux treillis orthomodulaires, qui satisfont de plus la loi orthomodulaire :

- Si $\top = \neg(\neg a \vee \neg b) \vee \neg(a \vee b)$ alors $a = b$.

(“$\top$” est la notation traditionnelle pour le vrai et “$\perp$” la notation traditionnelle pour le faux.)

Des formulations alternatives incluent les propositions dérivables via une déduction naturelle, le calcul des séquents ou un système de tableaux. Malgré une théorie de la preuve relativement développée, on ne sait pas si la logique quantique est décidable.

La logique quantique comme logique des observables

Le reste de cet article suppose que le lecteur est familier avec la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert. Pourtant les idées principales peuvent être comprises dans le cas de dimension finie.

La logique de la mécanique classique

Les formulations hamiltoniennes de la mécanique classique ont trois ingrédients : les états, les observables, et la dynamique. Dans le cas le plus simple d'une seule particule se déplaçant dans $\mathbb{R}^3$, l'espace des états est l'espace des positions-moments $\mathbb{R}^6$. Un observable est une certaine fonction à valeurs réelles f sur l'espace des états. Des exemples d'observables sont les positions, les moments, les énergies d'une particule. Pour les systèmes classiques, la valeur $f(x)$, qui est la valeur de f pour un certain état du système particulier x, est obtenu par un processus de mesure de f.

Les propositions concernant un système classique sont engendrées à partir des énoncés de base de la forme

> “La mesure de f amène une valeur dans l'intervalle $[a, b]$ pour certains nombres réels a, b.”

à travers les opérations arithmétiques conventionnelles et les limites ponctuelles. Il découle aisément de cette caractérisation des propositions dans les systèmes classiques que la logique correspondante est identique à l'algèbre booléenne des sous-ensembles boréliens d'un espace d'états. Ils obéissent donc aux lois de la logique propositionnelle classique (telles que les lois de Morgan) avec les opérations ensemblistes de l'union et de l'intersection correspondant aux connecteurs booléens et l'inclusion ensembliste correspondant à l'implication matérielle.

En fait, un énoncé plus fort est vrai : ils doivent obéir à la logique infinitaire $L_{\omega_1,\omega}$.

On résume ces remarques comme suit : le système de propositions d'un système classique est un treillis avec une opération particulière d'orthocomplémentation : les opérations de rencontre et jointure sur le treillis sont respectivement l'intersection et l'union ensemblistes. L'opération d'orthocomplémentation est le complémentaire ensembliste. De plus, ce treillis est séquentiellement complet, au sens où toute séquence $\{E_i\}_i$ d'éléments du treillis a une plus petite borne supérieure, particulièrement l'union de la théorie des ensembles :

$$\text{Plus\_Petite\_Borne\_Supérieure}(\{E_i\}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Le treillis propositionnel d'un système mécanique quantique

Dans la formulation de la mécanique quantique par l'espace de Hilbert comme elle a été présentée par von Neumann, un observable physique est représentée par un certain opérateur auto-adjoint A densément défini (potentiellement non borné) sur un espace de Hilbert H. A a une décomposition spectrale, qui est une mesure projection-valuée E définie sur les sous-ensembles boréliens de $\mathbb{R}$. En particulier, pour n'importe quelle fonction bornée borélienne f sur $\mathbb{R}$, on peut effectuer l'extension suivante de f aux opérateurs :

$$f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\,\mathrm{E}(\lambda).$$

Dans le cas où f est la fonction indicatrice d'un intervalle $[a, b]$, l'opérateur $f(A)$ est une projection auto-adjointe sur le sous-espace des vecteurs propres généralisés de A avec valeur propre dans $[a, b]$. Ce sous-espace peut être interprété comme l'analogue quantique de la proposition classique

- La mesure de A amène une valeur dans l'intervalle $[a, b]$.

Cela suggère le remplacement suivant en mécanique quantique pour le treillis orthocomplémenté des propositions de la mécanique classique, essentiellement l'axiome VII de Mackey :

- Les propositions d'un système de mécanique quantique correspondent au treillis des sous-espaces fermés de H ; la négation d'une proposition V est le complément orthogonal $V^{\perp}$.

L'espace Q des propositions quantiques est aussi séquentiellement complet : toute séquence $\{V_i\}_i$ d'éléments disjoints deux à deux de Q a une plus petite borne supérieure. Ici la disjonction de W_1 et W_2 signifie que W_2 est un sous-espace de $W_1^{\perp}$. La plus petite borne supérieure de $\{V_i\}_i$ est la somme directe interne fermée.

Sémantique standard

La sémantique standard de la logique quantique est que la logique quantique est la logique des opérateurs de projection dans un espace de Hilbert séparable ou espace pré-Hilbert, où un observable p est associé à l'ensemble des états quantiques pour lesquels p (quand on le mesure) a pour valeur propre 1. De là,

- $\neg p$ est le complément orthogonal de p (puisque pour ces états, la probabilité d'observer p, $\mathrm{P}(p) = 0$),
- $p \wedge q$ est l'intersection de p et q, et
- $p \vee q = \neg(\neg p \wedge \neg q)$ fait référence aux états qui superposent p et q.

Cette sémantique a la jolie propriété que l'espace pré-Hilbert est complet (i.e., Hilbert) si et seulement si les propositions satisfont à la loi orthomodulaire, un résultat connu sous le nom de théorème de Solèr. La sémantique orthomodulaire et la syntaxe de la logique quantique est due à Kalmbach, elle a un théorème de complétude et elle échoue pour le théorème de déduction. Bien qu'une grosse partie du développement de la logique quantique ait été motivée par la sémantique standard, elle n'est pas caractérisée par cette dernière ; il y a des propriétés supplémentaires satisfaites par ce treillis qui n'ont pas besoin d'être vérifiées en logique quantique.

Différences avec la logique classique

La structure de Q fournit immédiatement une différence avec la structure d'ordre partiel d'un système de propositions classique. Dans le cas classique, étant donnée une proposition p, les équations

$$\begin{aligned} \top &= p \vee q \ \text{ et} \\ \bot &= p \wedge q \end{aligned}$$

ont exactement une solution, notamment le complémentaire en terme de théorie des ensembles de p. Dans le cas du treillis des projections, il y a une infinité de solutions aux équations ci-dessus (n'importe quel complémentaire algébrique fermé de p les satisfait ; il n'a pas besoin d'être l'orthocomplémentaire).

Plus généralement, la valuation propositionnelle a des propriétés inhabituelles en logique quantique. Un treillis orthocomplémenté admettant un homomorphisme de treillis total vers $\{\bot, \top\}$ doit être booléen. Un travail standard est d'étudier les homomorphismes partiels maximaux q avec une propriété de filtrage :

$$\text{si } a \leq b \ \text{ et } \ q(a) = \top, \text{ alors } q(b) = \top.$$

Échec de la distributivité

Les expressions en logique quantique décrivent des observables en utilisant une syntaxe qui ressemble à la logique classique. Pourtant, contrairement à ce qui a lieu en logique classique, la loi distributive $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ échoue quand elle fait intervenir des observables non commutatifs, comme la position et le moment. Cela advient parce que la mesure affecte le système, et la mesure d'une disjonction ne mesure pas lequel des deux éléments de la disjonction est vrai.

Par exemple, considérons une particule à une seule dimension avec la position dénotée par x et le moment dénoté par p et définissons les observables :

- $a - |p| \leq 1$ (selon une certaine unité)
- $b - x < 0$
- $c - x \geq 0$

Maintenant, la position et le moment sont des transformations de Fourier l'un de l'autre, et la transformation de Fourier d'une fonction non nulle de carré intégrable à support compact est entière et par conséquent, elle n'a pas de zéros non isolés. Par conséquent, il n'y a pas de fonction d'onde qui soit à la fois normalisable dans l'espace des moments et qui s'évanouisse précisément lorsque $x \geq 0$. Ainsi, $a \wedge b$ et similairement $a \wedge c$ sont faux, et donc $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ est faux. Pourtant, $a \wedge (b \vee c)$ est égal à a, ce qui de façon certaine n'est pas faux (il y a des états pour lesquels c'est une sortie de mesure viable). De plus : si l'espace de Hilbert pertinent pour la dynamique de la particule admet seulement des moments non plus grands que 1, alors a est vrai.

Pour comprendre davantage, soient p_1 et p_2 les moments pour la restriction de la fonction d'onde de la particule à $x < 0$ et $x \geq 0$ respectivement (avec la fonction d'onde qui vaut 0 en dehors de ces domaines restreints). Soit $|p|\|\restriction > 1$ la restriction de $|p|$ aux moments qui sont (en valeur absolue) > 1.

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ correspond aux états avec $|p_1|\|\restriction_{>1} = |p_2|\|\restriction_{>1} = 0$ (cela est vérifié même si on définit p différemment de façon à rendre de tels états possibles ; aussi, $a \wedge b$ correspond à $|p_1|\|\restriction_{>1} = 0$ et $p_2 = 0$). Comme opérateur, $p = p_1 + p_2$, et les éléments non nuls $|p_1|\|\restriction_{>1}$ et $|p_2|\|\restriction_{>1}$ peuvent interférer pour produire 0 $|p|\|\restriction_{>1}$. Une telle interférence est la clé de la richesse de la logique quantique et de la mécanique quantique.

Relation à la mesure quantique

Observables de Mackey

Étant donné un treillis orthocomplémenté Q, un observable de Mackey φ est un homomorphisme additif dénombrable du treillis orthocomplémenté des sous-ensembles boréliens de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Q}$. En symboles, cela signifie que pour toute séquence $\{S_i\}_i$ de sous-ensembles boréliens disjoints deux à deux de $\mathbb{R}$, $\{\varphi(S_i)\}_i$ sont des propositions deux à deux orthogonales (des éléments de $\mathbb{Q}$) et

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(S_i).$$

De façon équivalente, un observable de Mackey est une mesure projection-valuée sur $\mathbb{R}$.

Théorème (*Théorème spectral*). Si Q est le treillis des sous-espaces fermés de l'espace de Hilbert H, alors il y a une correspondance bijective entre les observables de Mackey et les opérateurs auto-adjoints définis densément sur H.

Mesures de probabilité quantiques

Articles principaux : le théorème de Gleason et la mécanique quantique statistique

Une *mesure de probabilité quantique* est une fonction P définie sur Q avec des valeurs dans $[0, 1]$ telle que $P(\bot) = 0, P(\top) = 1$ et si $\{E_i\}_i$ est une séquence d'éléments deux à deux orthogonaux de Q alors

$$\mathrm{P}\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(E_i).$$

Toute mesure de probabilité quantique sur les sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert est induite par une matrice de densité - un opérateur non négatif de trace 1. Formellement,

Théorème. Supposons que Q est le treillis des sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert séparable de dimension au moins 3. Alors pour toute mesure de probabilité quantique P sur Q, il existe un unique opérateur de classe trace S tel que

$$\mathrm{P}(E) = \mathrm{Tr}(SE)$$

pour toute projection auto-adjointe E in Q.

Relation aux autres logiques

La logique quantique s'inscrit dans la logique linéaire et dans la logique modale B.

Le treillis orthocomplémenté de tout ensemble de propositions quantiques peut être contenu dans une algèbre booléenne, qui se prête alors à la logique classique.

Limitations

Bien que de nombreux traitements de la logique quantique supposent que le treillis sous-tendu doive être orthomodulaire, de telles logiques ne peuvent pas gérer les systèmes quantiques à interactions multiples. Dans un exemple dû à Foulis et Randall, ce sont des propositions orthomodulaires avec des modèles de Hilbert de dimensions finies dont les appariements n'admettent pas de modèle orthomodulaire.

La logique quantique n'admet pas de matériau conditionnel raisonnable ; tout connecteur qui est monotone dans un certain sens technique réduit la classe des propositions à une algèbre booléenne. Par conséquent, la logique quantique lutte pour représenter le passage du temps. Une solution de contournement possible est la théorie des filtrations quantiques développée à la fin des années 70 et 80 par Belavkin. On sait cependant que le système BV, un fragment inférentiel profond de la logique linéaire qui est très proche de la logique quantique peut traiter arbitrairement des espaces-temps discrets.