Une approche combinatoire de la conjecture de Goldbach

J. H. Clarke et A. G. Shannon

1983

En 1742, Goldbach suggéra dans une lettre à Euler que tout entier pair supérieur à 4 est la somme de deux nombres premiers impairs. Bien que de nombreuses tentatives aient été faites pour établir cette conjecture, une preuve est toujours attendue. La "méthode du cercle" de Hardy et Littlewood [1] a montré que la méthode était praticable sous l'hypothèse de Riemann, qui est à nouveau d'actualité. En utilisant une approche combinatoire qui peut être davantage étendue par le lecteur intéressé, nous démontrons ici qu'il est hautement improbable que la conjecture de Goldbach soit fausse.

Notre approche est mieux introduite par un exemple. Considérons 18 et tabulons toutes les façons d'additionner deux entiers impairs supérieurs à 1 pour obtenir 18 :

$$3+15, \quad 5+13, \quad 7+11, \quad 9+9.$$

Supposons qu'il y ait h_1 nombres premiers dans la première colonne et h_2 dans la seconde (3 et 2 dans notre exemple). Si un nombre premier dans la première colonne est adjacent à un nombre premier dans la seconde, alors la conjecture de Goldbach fonctionne pour ce nombre particulier ($7+11$ dans notre cas).

Étant données deux colonnes adjacentes de r entrées, de combien de façons est-il possible de choisir h_1 dans la première colonne et h_2 dans la seconde de sorte qu'aucun des choix ne soit adjacent ? Ayant choisi les h_1, les autres h_2 peuvent être choisis de $\binom{r-h_1}{h_2}$ façons, et donc le nombre total de façons de choisir les h_1 et h_2 sans choix adjacents est

$$\binom{r}{h_1}\binom{r-h_1}{h_2}.$$

D'autre part, le nombre de façons de choisir librement h_1 dans la première colonne et h_2 dans la seconde est

$$\binom{r}{h_1}\binom{r}{h_2}.$$

Ainsi, dans notre configuration, s'il y a r nombres dans chaque colonne, la probabilité de violer la conjecture de Goldbach est

$$\frac{\binom{r}{h_1}\binom{r-h_1}{h_2}}{\binom{r}{h_1}\binom{r}{h_2}} = \frac{(r-h_1)!(r-h_2)!}{r!(r-h_1-h_2)!}.$$

La conjecture de Goldbach a été vérifiée par une étude informatique pour être correcte pour tous les entiers pairs jusqu'à 10^8. Et, pour les grands nombres, $h_1 \approx h_2$, comme indiqué par Hardy et Wright [2]. Par exemple, le nombre de nombres premiers inférieurs à 5000 est de 667, tandis que le nombre de nombres premiers entre 5000 et 10 000 est de 571. Donc, pour un grand r, la probabilité de violer la conjecture de Goldbach est donnée approximativement par

$$\left(1 - \frac{h}{r}\right)^h.$$

Par exemple, le nombre de nombres premiers inférieurs à 10^6 est de 78 498 et donc, en considérant 10^6 de cette manière, on obtient $r \approx 250000$ et $h \approx 39250$. Ainsi, la probabilité dans ce cas est inférieure à

$$\left(1 - \frac{39250}{250000}\right)^{39250} \approx 10^{-2911}.$$

C'est une probabilité extrêmement faible, si faible en fait que seul un mathématicien pur ne considérerait pas l'événement comme impossible !

Des investigations supplémentaires s'offrent comme exercices. Par exemple, en utilisant les résultats de Rosser et Schoenfeld [4], selon lesquels si $\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs à x, alors

$$\frac{x}{\log x} < \pi(x) \quad \text{pour} \quad x > 17$$

et

$$\frac{3x}{5\log x} < \pi(2x) - \pi(x) \quad \text{pour} \quad x \geq 21,$$

on peut tester l'affirmation selon laquelle le nombre de nombres premiers inférieurs à x est approximativement le même que le nombre de nombres premiers entre x et $2x$ lorsque x augmente. Des estimations plus fines de données numériques (générées par ordinateur ou par calculatrice) permettraient également des tabulations de la probabilité.

D'autres exercices pertinents peuvent être obtenus en étendant certaines des idées de l'enquête historique de Mirsky [3] sur le problème.

Références

[1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of Partitio Numerorum III, *Acta Math.* 44 (1922).

[2] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers* (5th edition). Oxford University Press (1979).

[3] L. Mirsky, Additive prime number theory, *Math. Gaz.* 42 (1958).

[4] J. Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois J. Math.* 6 (1962).