Les deux intuitions du topos de Grothendieck : en référence à Serre et Deligne

Colin macLarty

Le lundi 21 avril 1958, Alexander Grothendieck assista au Séminaire Henri Cartan, à l'ENS rue d'Ulm, pour écouter Jean-Pierre Serre présenter sa nouvelle et retentissante décomposition des groupes de cohomologie de dimension 1, les $H^1(X, G)$ sur les espaces algébriques X. Serre raconte : "À la fin de l'exposé, Grothendieck m'a dit "cela marchera certainement pour toutes les dimensions !" J'ai trouvé cela très optimiste." Serre fut convaincu au moment où il termina la rédaction de l'exposé en septembre [Serre 1958, p. 1-21]. [1]

Les deux amis cherchèrent une théorie cohomologique sur les espaces algébriques afin de prouver les conjectures de Weil. Les articles de Grothendieck à Kansas et Tōhoku [Grothendieck 1955b, 1957b] avaient produit une méthode générale par laquelle "étant donné une catégorie de faisceaux quelconque, une notion de groupes de cohomologie en résulte". [3] C'est-à-dire une notion de groupes de cohomologie de dimension n, $H^n(X, G)$, pour tout n fini.

Par une catégorie de faisceaux, Deligne entend la notion abstraite de catégorie que Grothendieck créa dans son article de Tōhoku : une "catégorie de faisceaux" pouvait être n'importe quelle catégorie abélienne AB5 avec un ensemble de générateurs. La section page 193 dira juste assez de cela pour éclairer ce que Grothendieck entendit dans l'exposé de Serre. Le problème pour Grothendieck en 1958 était de trouver une catégorie abélienne AB5 adaptée aux conjectures de Weil, et de préférence proche de la topologie intuitionniste existante.

Dans la définition de Serre de $H^1(X, G)$ pour les espaces algébriques X, Grothendieck vit immédiatement une idée géométrique d'un *espace topologique généralisé* et d'une catégorie de faisceaux sur celui-ci, qu'il appela plus tard un *topos*. Les conférences de Buffalo mettent l'accent sur l'aspect géométrique de ceci qui ne reçut pas beaucoup d'expression dans le SGA. Durant l'exposé de Serre, Grothendieck vit que le cas spécifique de Serre fonctionnerait pour les conjectures de Weil. De nombreux collaborateurs produisant des milliers de pages firent fonctionner cet outil. Tandis qu'il était à Buffalo, Grothendieck apprit que Deligne avait terminé le dernier et le plus difficile concept, pour être publié sous le nom de [Deligne 1974]. [4]

La section page 194 esquisse l'exposé de Serre de 1958. Les sections pages 196-199 montrent à quel point la vision de 1973 de Grothendieck des topos restait proche de la géométrie de Serre. La section page 203 décrit la première réponse de Grothendieck à l'annonce de la preuve de Deligne, avant même d'en connaître aucun détail.

Révision d'une traduction ia : Denise Vella-Chemla, octobre 2026.

1. Réimprimé avec des commentaires dans Serre [2001, p. 107-40]. Je crois que l'exposé de Serre utilisait la "théorie générale des espaces fibrés à structure de faisceau" [2] autant que la version écrite. Mais mon argument dans cet article nécessite seulement que l'exposé ait déjà décrit les fibrés de fibres par des cocycles, ce qui était standard à l'époque, et est à la base de la définition par Serre de $H^1(X, G)$.
3. Voir [Deligne 1998, p. 16].
4. Pour les références, et les détails sur la partie de Grothendieck, voir [McLarty 2007, 2016, 2018].

1. Les conférences de Buffalo

À Buffalo en 1973, Grothendieck donna trois conférences de mathématiques en anglais, toutes enregistrées par John Duskin sur un petit magnétophone à cassette. Elles portaient sur la géométrie algébrique, les groupes algébriques, et la théorie des topos. Les citations dans cet article qui sont identifiées uniquement par une date, comme "(18 mai)", proviennent des conférences de Buffalo. [5]

Grothendieck s'était retiré du travail en mathématiques en faveur de l'écologie et de l'anti-militarisme. Il organisa une série de conférences mathématiques et de visites d'universités en Amérique du Nord, afin aussi de présenter ses idées sur l'écologie et récolter des fonds pour sa cause. Tout cela est documenté dans [Scharlau 2010]. [6]

Les conférences de Buffalo commencèrent le 4 mai et étaient prévues pour se terminer le 25 mai, avant que l'autre série ne commence. À en juger par les bandes, elles étaient programmées pour $2\frac{1}{2}$ heures chacune quatre vendredi. La plupart des conférences duraient longtemps, et Grothendieck voulait davantage de sessions. La série fut prolongée sur une base ad hoc comme l'autre série le fut. Les topos récemment restaurés totalisent 33 heures. Ces cassettes auraient pu ne pas survivre à 40 ans de négligence. Quelques-unes d'entre elles n'ont pas encore été rendues lisibles.

Les conférences de géométrie algébrique durent plus de 30 heures, et les conférences au sujet des groupes algébriques près de 20 heures.

Quand Grothendieck suggéra de prolonger la série sur les topos, il dit entre autres choses "Il serait bon d'avoir une heure ou deux sur les relations entre topos et structures algébriques." Les sessions devinrent moins formelles, discutant des structures algébriques et de la 2-catégorie des topos. Grothendieck travaillait sur les idées entre les sessions et il revenait souvent en arrière pour corriger des erreurs antérieures. Les membres de l'auditoire expliquèrent certaines des idées de Lawvere, bien que Lawvere ne fût pas à Buffalo à ce moment-là. La discussion est souvent chaotique. Grothendieck se tenait constamment au tableau noir, écrivant parfois à la craie, pointant parfois du doigt certains éléments écrits, et il est difficile de savoir ce qui est écrit, ou pointé. Nous allons juste citer le point de base de Grothendieck sur ce sujet qui était :

> Donner un type de structure algébrique semble être la même chose que donner un topos, nommément le topos dit classifiant. Donc il semble y avoir une sorte d'équivalence de relation entre l'algèbre et la topologie. (18 mai)

Grothendieck annonça la nouvelle lors des dernières sessions que Deligne avait terminé les conjectures de Weil. Il discuta de cela en longueur de son point de vue - sans encore connaître la preuve de Deligne. La section page 203 rapporte certains de ces propos.

À la fin des conférences sur les groupes algébriques, un jeune membre de l'auditoire demanda à Grothendieck sur quels sujets il travaillait alors. Grothendieck fut surpris :

5. Les enregistrements des conférences sont conservés aux Archives Henri-Poincaré, Nancy, France, comme "Grothendieck, Alexander. Buffalo tape recorded lectures. 1973."

6. Traduction anglaise à webusers.imj-prg.fr/~leila.schneps/grothendieckcircle/RetTop.html.

> Sujets ? Oh, aucun sujet... J'ai eu l'idée ces dernières semaines de travailler sur les topos et l'algèbre universelle parce que cela était connecté aux choses dans les topos. Mais je ne vais pas continuer là-dessus. (Conférences sur les groupes algébriques, 11 juillet)

2. "Quand j'ai commencé avec les catégories, vers l'année 1955"

À Buffalo, Grothendieck dit que son travail sur les catégories commença vers 1955. Cela surprendrait quiconque connaissait la dissertation de Grothendieck de 1952.[7] La dissertation utilisait des propriétés universelles, dans le sens de la théorie des catégories, pour prouver des théorèmes fonctoriels sur certaines catégories concrètement définies d'espaces vectoriels topologiques. Mais Grothendieck en 1973 ne considère pas cela comme de la "théorie des catégories". C'est juste de l'analyse fonctionnelle. Il appelle son article de Kansas de 1955 (ainsi que SGA 4) à la fois "théorie des catégories" et "non-sens général".[8]

L'article de Grothendieck "*Une théorie générale des espaces fibrés à structure de faisceau*" [Grothendieck 1955b] examine la cohomologie des fibrés de fibres sur les espaces topologiques. Donc il travaille dans des catégories concrètement données de fibrés de fibres. Il n'essaie pas de définir ces catégories de manière théorique. La grande innovation était d'interpréter les groupes et les torsions internes à chaque catégorie de fibrés de fibres, et d'obtenir des théorèmes fonctoriels sur la cohomologie (possiblement non abélienne) comme résultats immédiats. Pour ce travail, il utilisa aussi des faisceaux d'ensembles, plutôt que juste des faisceaux de modules. Tout expert topologue à l'époque aurait pu définir des faisceaux d'ensembles. Mais Grothendieck avait une bonne raison de dire plus tard :[9]

> Je crois que j'ai été le premier à travailler systématiquement avec des faisceaux d'ensembles (en commençant en 1955 avec mon article "*Une théorie générale des espaces fibrés à structure de faisceau*" à l'Université du Kansas).

De plus, Grothendieck se rappela en 1973 qu'en 1955, il avait déjà interprété d'autres structures familières, telles que les monoïdes, les anneaux, etc. dans toutes les catégories en spécifiant quelles limites et colimites la structure donnée requiert (conférence du 20 juin). Il y a toutes les raisons de faire confiance à sa mémoire, car même l'article de 1955 se déplace facilement entre les constructions concrètes de fibrés avec des opérateurs binaires, les fibrés de groupes, et les fibrés d'opérateurs de groupe d'une part, et les propriétés universelles de ces structures d'autre part. En termes de théorie des catégories actuelle, il se déplace entre les constructions *externes* définies théoriquement par les ensembles, et les constructions *internes* définies à isomorphisme près dans la catégorie des fibrés de fibres. Il vit comment les constructions internes s'accordaient bien avec les propriétés exactes des foncteurs entre catégories de fibres. Il explora probablement beaucoup d'autres structures de

7. Entre autres, voir [Grothendieck 1952, 1953a], et Cartier, Pisier, et Zalamea dans ce volume.
8. Par exemple dans les conférences du 11 mai, et du 2 juillet. Il se réfère aussi à divers théorèmes dans les autres conférences comme "non-sens général".
9. Voir [Grothendieck 1986, p. 38n].

la même manière à l'époque.

Les experts en 1955 auraient pu facilement penser que c'était une formalité vide, et Grothendieck sous-estima considérablement sa richesse : [10]

> Bien sûr, comme ce rapport consiste en une adaptation assez simple de choses bien connues, aucune difficulté réelle n'a dû être surmontée et il n'y a aucune prétention à l'originalité quoi qu'il en soit.

Pourtant, en 1973, il luttait encore avec le problème général de la caractérisation des structures algébriques par des propriétés exactes :

> Ce non-sens général, voyez-vous, pour en faire un énoncé mathématique, ce serait une sorte de chose gênante... Je ne pense pas que j'essaierai de le rendre réellement mathématique. Ce qui est important, c'est d'avoir l'idée générale et d'avoir la bonne - comment dire - façon de penser à des modèles pour ces situations afin de ne pas perdre de temps et d'énergie à faire des choses compliquées. (11 mai)

Comme les idées se développèrent, bien sûr, d'autres suivirent le conseil de Grothendieck dans [SGA 4, 1972, p. 16, 324f] que la logique catégorielle devrait être précise. Voir l'article de Caramello dans ce volume.

3. Catégories abéliennes

Certaines personnes pensaient que Grothendieck (1958) avait utilisé des méthodes extraordinaires pour prouver un petit théorème technique de topologie : nommément, les faisceaux de modules sur un espace topologique ont *suffisamment d'injectifs*. [11] En fait :

1. Le cas topologique était central au point de vue cohomologique montant.
2. Les experts, notamment Serre et Grothendieck, avaient pensé que le théorème était trop beau pour être vrai pour tous les espaces topologiques.
3. Le théorème était bien plus général que le cas topologique. Cette généralité n'avait aucun usage à l'époque, mais elle devint rapidement importante.
4. Les méthodes devinrent des paradigmes de "non-sens abstrait" productif.

L'impact le plus large de l'article fut que Grothendieck donna des axiomes purement catégoriels pour une classe importante de catégories concrètes, et montra que ces axiomes prouvent des théorèmes catégoriels avec des applications concrètes majeures.

Même les lecteurs qui ne connaissent pas beaucoup les catégories peuvent voir les axiomes ressembler à une théorie des catégories purement formelle et redoutable. Une catégorie AB5 est une catégorie

10. Voir [Grothendieck 1955b, p. 2].
11. Pour les définitions et l'historique, voir [McLarty 2007].

où les flèches entre deux objets forment un groupe abélien, ce qui permet de bénéficier en outre de tous les bénéfices suivants :

AB1 : avoir toutes les limites finies directes et inverses.

AB2 : avoir que es images sont isomorphes aux coimages.

AB3 : avoir les sommes directes arbitraires (coproduits).

AB5 : avoir les limites directes filtrées stables des familles croissantes de sous-objets.

$$\left(\sum A_i\right) \cap B = \sum (A_i \cap B)$$

Grothendieck dans [Grothendieck 1957b, Thm. 1.10.1] prouve que si une catégorie AB5 a aussi un *ensemble de générateurs*[12] alors elle a assez d'injectifs, et a donc une théorie de la cohomologie.

Grothendieck trouva en fait les axiomes en donnant une expression fonctorielle aux propriétés des modules que Baer avait utilisées pour le théorème algébrique que les modules sur un anneau ont assez d'injectifs.[13]

En même temps, cependant, les théoriciens des faisceaux ne pouvaient s'empêcher de voir ces axiomes ressembler à des analogues catégoriques des propriétés des ouverts dans un espace topologique : AB1 et AB3 disent simplement que les intersections finies et les unions arbitraires d'ouverts sont ouverts. AB5 dit simplement que les intersections finies de sous-ensembles ouverts se distribuent sur les unions arbitraires.

4. Visiblement inspiré par Serre 1958

> Le point de vue exposé ici pour l'étude des fibrés principaux homogènes est visiblement inspiré de Serre [1958], que le lecteur aura tout intérêt à consulter.[14]

Je crois que l'exposé de Serre s'appuyait fortement sur l'article de Grothendieck à Kansas, mais bien sûr certaines citations y ont été ajoutées lors de la rédaction lorsque Serre en discuta avec Grothendieck. Donc je ne me fierais pas uniquement à une citation comme preuve de ce que l'exposé original disait, mais je dirais que l'exposé devait utiliser ces techniques de cocycle.. Serre basa sa cohomologie pour les espaces algébriques X sur des revêtements non ramifiés, qui ne sont pas des familles de sous-ensembles de X.[15] Je crois que l'exposé de Serre utilisait la "théorie générale des espaces fibrés à structure de faisceau" (2) autant que la version écrite. Mais mon argument dans cet article ne nécessite que l'exposé ait déjà décrit les fibrés de fibres par des cocycles, ce qui était standard à l'époque, et est à la base de la définition par Serre de $H^1(X, G)$.

12. Voir [Grothendieck 1957b, p. 135].
13. Voir [Baer 1940].
14. Voir [Grothendieck 1986, p. 38n].
15. Réimprimé avec des commentaires dans Serre [2001, p. 107-40].

L'exposé de Serre était loin d'accomplir les objectifs d'une théorie cohomologique de Weil et Grothendieck ne vit pas immédiatement toute la voie. Entre autres choses, Grothendieck [Grothendieck 1959, §3 and §6] élargit les revêtements non ramifiés de Serre à une idée liée de *revêtement étale*, voir aussi [Serre 2001, p. 254]. Il fallut ensuite deux ans avant que Artin ne prouve les premiers résultats géométriques pénétrants en cohomologie étale. [16] [17] [18]

Mais Grothendieck vit pendant l'exposé, et dit à Serre, que cette idée fonctionnerait. Nous pouvons voir ce qui le rendit sûr que c'était la traduction de la terminologie des fibrés principaux de Serre en terminologie des faisceaux.

Une histoire complète de la cohomologie étale nécessiterait un long chapitre sur le contexte et l'intuition de l'exposé de Serre d'avril 1958. Ici, nous ne pouvons voir que la seule idée de cet exposé qui conduisit aux deux intuitions des topos de Grothendieck.

Cette théorie cohomologique en topologie reposait sur le recouvrement d'un espace topologique X par des familles convenables de sous-ensembles ouverts $U \subseteq X$. Mais Serre basa sa cohomologie pour les espaces algébriques X sur des *revêtements non ramifiés*, ou *revêtements non ramifiés*, qui ne sont pas des familles de sous-ensembles de X. La Figure VI.1 donne les caractéristiques pertinentes :

(1) pas de nœud dans une bobine car elle ne se casse pas, et

(2) pas de nœud qui a un pli ou une tangente verticale.

Intuitivement, le fil de chaque bobine "repose doucement" sur le cercle en dessous.

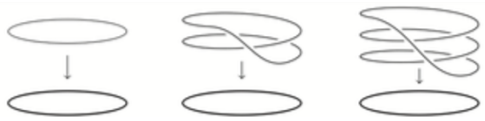


FIGURE VI.1. Revêtements non ramifiés du cercle. Les lignes brisées sont simplement notées pour montrer que les lignes ne s'intersectent pas réellement.

Chaque revêtement consiste en une ligne non brisée enroulée sur le cercle. Le revêtement le plus à droite sur la Figure VI.1 a 3 points dans la bobine au-dessus de chaque point unique du cercle. Appelons cela le revêtement 3-feuillets du cercle. Pensez à la base du cercle comme une rétraction topologique du plan complexe perforé (c'est-à-dire $\mathbb{C}$ omettant 0). Ces revêtements sont les revêtements correspondants des surfaces de Riemann pour l'identité, la racine carrée, et les fonctions racine cubique (chacune omettant le point de branchement 0). [19].

16. Voir [SGA 1 1971, p. 298f].
17. Voir [Grothendieck 1955b, p. 16].
18. Sur le théorème d'Artin, voir ceci [McLarty 2016, p. 263] avec mes remerciements à David Mumford.
19. Comparer David Mumford sur la sphère S^3 comme une rétraction du plan complexe $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ avec son origine supprimée. Cela n'a pas été publié à ma connaissance mais peut être vu à l'adresse https://www.neverendingbooks.org/on-mumford.

5. L'intuition catégorique des topos, 1973

> Quand nous parlons d'un topos, nous pourvons toujours penser à un topos de deux manières. Nous pensons aux topos comme quelque chose comme un espace topologique généralisé, incarné à travers sa catégorie de faisceaux E. Mais en fait nous pensons aux topos comme étant quelque chose de différent de E, l'espace qui est "en dessous" pour ainsi dire. (25 mai)

Les conférences de Grothendieck à Buffalo commencèrent avec les catégories de faisceaux en topologie :

> La propriété essentielle de la catégorie des faisceaux [d'ensembles] sur un espace topologique, que j'ai essayé de transmettre, est qu'elle partage essentiellement toutes les propriétés exactes de la catégorie des ensembles - du moins celles exprimées par les limites directes avec des diagrammes d'indexation arbitraires et par les limites inverses finies. (25 mai)

Et :

> Donc la notion d'un topos E devrait être que E vérifie les propriétés exactes de la catégorie des ensembles, dans la mesure où les limites directes et les limites inverses finies lui sont applicables. De plus, pour des raisons techniques, on doit supposer que E a un petit sous-ensemble, pas aussi grand que l'univers entier dans lequel nous travaillons, qui est générateur. (25 mai)

La section page 194 montre comment Grothendieck s'attendait à ce que la catégorie des faisceaux de Weil sur un espace algébrique X ait des revêtements non ramifiés comme ensemble générateur, et qu'ils puissent être collés ensemble pour que la catégorie en question soit colimite de ceux-ci. En fait, c'est extrêmement ambigu et cela devint plus précis plus tard dans l'idée de *site* discutée dans la section page 197.[20] Mais c'était une idée directrice.

Quant à savoir pourquoi un topos n'a pas besoin de toutes les limites directes mais a seulement besoin des limites inverses finies, il y a plusieurs raisons techniques, mais deux se distinguent dans le contexte de Grothendieck en 1958 :

1. Le théorème de Baer sur les modules injectifs, et donc l'article de Tōhoku de Grothendieck, utilisait des limites finies (inverses) et des limites directes arbitraires.
2. Si les faisceaux de Weil sont des colimites arbitraires de revêtements non ramifiés, alors ils auront des colimites arbitraires à leur tour. L'exposé de Serre nécessitait l'utilisation du fait que ceux-ci n'ont pas des produits finis mais seulement des sommes finies.[21]

La raison 1 est proéminente dans SGA 4.1 (p. 60, 362). Pour prouver que tout topos E a une théorie cohomologique associée, Grothendieck doit montrer que les groupes abéliens internes à E

20. L'ambiguïté est que différentes topologies de Grothendieck sur un site donnent une notion différente de colimite pour les faisceaux représentables sur ce site.
21. Voir [Serre 1958, p. 121].

ont *assez d'injectifs*, et il le fait simplement en faisant appel à Tōhoku. Il est évident, une fois que l'on formule et comprend la question, que puisque les objets d'un topos ont des limites finies et des colimites arbitraires, les groupes abéliens dans le topos satisfont l'axiome AB5.

Grothendieck connaissait le fait que les objets d'un topos ont aussi des limites arbitraires.

> Il s'avérera que les limites inverses arbitraires existent. Et les limites inverses arbitraires sont plutôt généreuses. Elles vont au-delà de ce que j'ai dit, à savoir qu'un topos devrait partager les propriétés exactes des ensembles en limites inverses finies et limites directes arbitraires. (25 mai)

Mais il était bien connu que les limites inverses infinies en topologie avaient de mauvaises propriétés. Le fait de base est que chaque ensemble S de sous-ensembles ouverts de X indexé a une plus grande borne inférieure ouverte, mais cette plus grande borne inférieure n'a pas besoin d'être l'intersection des ouverts dans S. C'est l'*intérieur* de leur intersection. Il peut être vide même si S est une suite imbriquée de non-vides ouverts.

Grothendieck répéta souvent à Buffalo que :

> Le yoga que l'on finit par obtenir est essentiellement ce qui suit : la catégorie des faisceaux sur un espace topologique est aussi bonne, à un grain de sel près..., que la catégorie des ensembles... Le grain de sel est que cela est vrai pour toutes les relations de commutation, les propriétés exactes, impliquant des limites directes arbitraires (qui peuvent être infinies) et aussi des limites inverses à condition que nous ne prenions que des limites inverses finies. (4 mai)

6. Les axiomes de Giraud et les sites

L'intuition catégorique qu'avait Grothendieck des topos en 1973 était très similaire aux axiomes de topos de Giraud de 1963. Tellement que Grothendieck dit "J'ai tendance à oublier quelles propriétés Giraud utilise" (25 mai).

Pour rappel, les propriétés sont : une catégorie localement petite ayant

1. toutes les limites finies,
2. tous les petits coproduits, ceux-ci étant disjoints et stables par tir-en-arrière (pullback),
3. toutes les relations d'équivalence, celles-ci ayant des quotients, et ces quotients étant stables par tir-en-arrière (pullback),
4. (cette catégorie) a un petit ensemble de générateurs. [22]

Cependant, pour un usage général, Grothendieck préférait sa formulation, citée plus haut : "Eh bien, je pense que c'est quelque chose en quelque sorte d'intuitif, je veux dire, par ce que j'ai dit

22. Voir [SGA 4a 1972, Exp. IV, p. 301].

ici, de prendre la notion vague qui intuitivement a le plus de sens" (25 mai).

Vers 1961, Grothendieck rendit son idée vague précise d'une manière différente, en pensant aux données pour construire une colimite de générateurs. [23] C'est-à-dire : combien de copies de chaque générateur y aura-t-il ? Et comment seront-elles recollées ensemble ? Grothendieck était bien conscient que la première question recevait une réponse par un foncteur contravariant arbitraire à valeurs d'ensemble sur la catégorie des générateurs. [24] Je ne sais pas quand il répondit d'abord à la seconde question par l'idée d'une *topologie*, mais sûrement au moment de [Artin 1962]. Giraud introduisit le mot "site" plus tard. [25]

À Buffalo, Grothendieck répéta souvent que les "sites dits" sont nécessaires pour certaines preuves (30 mai). Mais il les considère comme une technicité, tout comme son mémoire *Récoltes et semailles* se réfère à : "la construction préliminaire et provisoire... la notion très commode, mais non intrinsèque, de site." [26] Il expliqua :

> SGA 4 est le premier et demi des deux volumes du séminaire consacrés à la théorie des topos et à la cohomologie étale des schémas. En fait, l'objectif initial du séminaire était la cohomologie étale. Mais on a dû écrire des prérequis sur les sites et le premier écrit était plutôt affreux. La direction des flèches n'était jamais claire et le sens géométrique était très embrouillé. Donc nous avons réécrit toute la série de notes. Donc la moitié du séminaire, le séminaire sur les topos, a été fait avec grand soin. (6 juin)

7. L'intuition spatiale des topos, 1973

> L'intuition est la suivante : voir les objets d'un topos comme étant quelque chose comme des espaces étales sur l'objet final du topos, et les topos [tranches] induits sur un objet comme l'objet lui-même. [27] C'est je pense la manière dont on devrait traiter la situation. C'est une situation amusante parce qu'en termes stricts, vous voyez, le langage que je veux faire passer n'a pas de sens. Mais bien sûr, il y a un certain nombre d'énoncés mathématiques qui le justifient. (25 mai)

Ainsi chaque flèche $X' \to X$ dans un topos rend X' quelque chose comme un espace étale sur X. Grothendieck avait l'intention qu'il en soit ainsi. Bien sûr $X' \to X$ est un objet dans le topos induit sur X, et X est l'objet terminal de ce topos induit.

Cette intuition spatiale des topos est née, selon l'exposé de Serre, de l'idée géométrique très vivante de Serre des revêtements non ramifiés. Pour voir cela, il est d'abord clair qu'en 1973, Grothendieck entendait chaque espace topologique généralisé comme un objet géométrique - tout en sachant très

23. Le SGA 1 original n'utilise ni "site" ni "topologie" généralisée. Voir [SGA 1 1971].
24. Aujourd'hui, nous disons que le préfaisceau sur toute catégorie C est un objet de la catégorie $C^\wedge$ des foncteurs de C^{op} vers les ensembles.
25. Voir [Grothendieck 1986, p. 180].
26. Cette citation de [Grothendieck 1986, p. 38] reprend la page 31 et est redite ailleurs.
27. Voir [Johnstone 1977, p. 37].

bien qu'il lui manquait les bons mots pour exprimer une telle géométrie généralisée. Il y a des passages répétés comme celui-ci :

> Et peut-être devrions-nous même distinguer entre l'espace topologique généralisé et la catégorie de ses faisceaux, car nous avons vu comme exemple que si nous regardons la catégorie des ensembles, peut-être que l'objet les plus basique auquel nous pensons comme étant l'espace topologique est réduit à un point, quelque chose de tout petit...
>
> Je n'ai pas trouvé de verbe technique pour distinguer entre un topos et l'espace auquel nous pensons. [longue pause] On pourrait juste déclarer qu'il y a de telles choses comme des topos qui sont des espaces topologiques généralisés où chaque topos a une catégorie associée, et distinguer entre les deux. Mais on ne définira jamais vraiment ce que sont les topos... N'importe quoi. (30 mai)

Souvent, Grothendieck rompait une ligne de pensée avec "N'importe quoi."

Grothendieck vit une unité directe de l'intuition catégorique et spatiale dans le cas des catégories de faisceaux sur les espaces topologiques. Pour lui, dire qu'un espace étale $E \to X$ sur un espace topologique X est un homéomorphisme local est la même chose que de dire que E est le recollement (ensemble) de (copies de) sous-ensembles ouverts de X, ce qui est juste une façon de dire que E est une colimite (possiblement infinie) d'ouverts de X. Il voulait étendre cette unité de motivation spatiale/géométrique et de définition catégorique aux cas où la définition topologique originale ne s'applique pas. En effet, il dit à plusieurs reprises à Buffalo que cela devrait s'appliquer aux topos en général, bien que la section page 201 montre qu'il avait déjà des raisons de croire que cela ne devrait pas s'appliquer tout à fait aussi bien.

Au-delà des espaces topologiques, l'exemple préféré de Grothendieck dans les conférences de Buffalo était les topos de G-ensembles pour un groupe G.

Ceux-ci ont un caractère intuitivement géométrique et sont faciles à représenter pour des groupes simples relativement simples G :



FIGURE VI.2. Les différentes orbites sous l'action de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

La Figure VI.2 montre les trois types d'orbites de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-ensembles, c'est-à-dire les G-ensembles quand le groupe G est $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, les entiers modulo 4. Les puces représentent les éléments des orbites. Les flèches en pointillé montrent juste comment $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ agit sur chaque orbite. L'élément de groupe $0 \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ laisse chaque orbite fixée. L'élément de groupe $1 \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ déplace chaque élément d'orbite d'un pas dans le sens anti-horaire. Dans chaque orbite, l'élément de groupe $4 \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ déplace chaque élément d'orbite 4 pas dans le sens anti-horaire, et est donc de retour là où il a commencé, puisque $4 = 0$ modulo 4. Dans l'orbite du milieu, l'élément de groupe $2 \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ déplace déjà chaque élément d'orbite de retour là où il a commencé. L'orbite la plus à droite est l'objet terminal du

topos, avec juste un point, non déplacé par l'action du groupe.

Chacune de ces orbites a une carte sur l'un à sa droite en "s'enroulant autour" pas à pas, et il semble juste de dire que c'est comme un espace étale se posant doucement sur son image. Chaque objet dans le topos de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-ensembles est un coproduit, une union disjointe, de (copies de) l'une ou l'autre de ces orbites.

Grothendieck ne discuta pas de cela très complètement à Buffalo, cependant, puisque les G-ensembles n'étaient pas son intérêt spécifique. Son intérêt spécifique revint à l'exposé de Serre, aux revêtements non ramifiés (plus tard, étales) et à leurs catégories de faisceaux. Malheureusement, les conférences de Buffalo allèrent vers les cartes étales et la topologie étale seulement le jour suivant, lors des conférences sur les groupes algébriques (10 juillet), et dirent peu à ce sujet.

En 1958, cependant, Grothendieck vit qu'une version faisceau de l'exposé de Serre utiliserait quelque chose comme des faisceaux topologiques où les fibres sont des G-ensembles pour les groupes de Galois G. Serre dit précisément que ce sont des revêtements non ramifiés que Grothendieck allait utiliser comme générateurs pour les faisceaux : pour tout revêtement non ramifié $Y \to X$ la fibre $\pi^{-1}(x)$ en $y \in$ au-dessus-de$(x) \in X$ est un g-ensemble pour un groupe de Galois spécifique g. Donc ce g agit sur l'anneau $A_x = \pi(\mathcal{O}_y)_x$ des germes de fonctions de coordonnées sur la fibre, et Serre utilise la cohomologie de groupe $H^1(g, A_x)$ [28] en calculant $H^1(X, G)$.

8. En termes stricts, ce langage n'a pas de sens

Dans la citation d'ouverture pour cette section, Grothendieck a mis en exergue deux façons de voir dont il a dit qu'elles ne faisaient pas strictement sens :

1. les objets d'un topos sont comme des espaces étales sur l'objet terminal,
2. les topos [tranches] induits sur un objet sont l'objet lui-même.

Le point 2 est une utilisation abusive plausible de la notation. La théorie des catégories supérieures, ou la théorie des types d'homotopie, pourrait même rendre ce point précis à leur manière, car il est probablement vrai à équivalence près des catégories. [29] Mais c'est loin de notre portée.

Quand Grothendieck dit qu'"un certain nombre d'énoncés mathématiques le justifient", le point 1 signifie des faits sur les catégories de faisceaux topologiques, et les catégories de G-ensembles, et son exemple motivant actif pour la topologie généralisée : le petit topos étale $Et_{\mathcal{S}}$ sur un schéma $\mathcal{S}$.

28. Il savait, et dit, que les topos Sh_T de faisceaux est une représentation fidèle de T seulement quand T est sobre, mais il soutenait que seuls les espaces sobres sont intéressants : "quand il y a des sous-ensembles irréductibles qui n'ont pas de points génériques, alors tôt ou tard on est forcé d'ajouter de nouveaux points (génériques)". Comparer la transition vers les schémas depuis les variétés comme dans [Serre 1955].

29. Tout topos de Grothendieck E est équivalent à la catégorie dont les objets sont des catégories équivalentes à des tranches E/X et les flèches sont des morphismes géométriques tels que le foncteur image inverse est logique et a un adjoint préservant les limites à gauche. Voir [Johnstone 1977, p. 37].

Il passa des heures à Buffalo à montrer que "toutes les propriétés topologiques intéressantes d'un espace topologique T peuvent être énoncées en termes des topos Sh_T de faisceaux sur T - où les objets sont des espaces étales sur T dans le sens classique" (11 mai). [30]

Le topos étale d'un schéma $\mathcal{S}$ a une signification géométrique très similaire, très vivante : les schémas se trouvant à plat et non ramifiés sur $\mathcal{S}$. Serre avait déjà introduit cela dans le cas très similaire des revêtements non ramifiés finis. Les faisceaux étales sur $\mathcal{S}$ héritent de ce sens géométrique, pour Grothendieck, car ils sont recollés ensemble à partir d'un nombre arbitraire de revêtements étales. En gros, parler d'un revêtement étale de degré 4 du cercle correspond à penser à une ligne enroulée 4 fois sur le cercle, avec une action d'un groupe $g = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sur les points de n'importe quel point dans le cercle.

D'autres topologies de Grothendieck sur les schémas ont un sens géométrique similaire. Donc son tableau fonctionne pour beaucoup d'autres topologies de schémas, voir par exemple la liste donnée par Demazure et Grothendieck dans [SGA 3a 1970, p. 245]. Ce tableau fonctionne bien pour le petit topos sur $\mathcal{S}$ de n'importe laquelle de ces topologies.

Cependant, le tableau ne fonctionna pas aussi bien pour le gros topos étale sur un schéma, ou pour les gros topos pour les autres topologies de schémas. [31] Juste avant les conférences de Buffalo, Grothendieck avait posé une série d'exercices destinés à élucider la distinction gros/petit en termes intrinsèques. Fameusement, le dernier de ces exercices était : "(7) Acheter chez le chocolatier une sucrerie (*médaille en chocolat*)". [32] Un fil conducteur dans tout cela est que dans les objets petits, les topos sont comme des espaces étales sur l'objet terminal.

Bien sûr, le travail continue en explorant la théorie des topos comme une topologie généralisée à bien des égards. Voir [Joyal and Tierney 1984], [Moerdijk 1995], et la référence complète [Johnstone 2002, Part C]. Olivia Caramello et Riccardo Zanfa ont une approche de l'idée que tous les objets d'un topos sont des espaces étales en représentant, grossièrement parlant, chacun des topos de Grothendieck comme une sous-catégorie d'un topos associé approprié. [33]

En 1973, Grothendieck cherchait une voie directe pour considérer (plus ou moins) chaque topos comme un objet géométrique. C'est généralement un objet géométrique assez petit. Et cela peut être un objet tout à fait différent de toute sorte d'espace classiquement connu, de sorte que nous ne connaissons aucun moyen de le décrire sauf par sa grande catégorie de faisceaux. Il s'excusa d'en parler si souvent comme ceci :

> La catégorie [des ensembles] est joliment grande... Mais le topos est joliment petit d'une certaine manière, on devrait penser à lui comme à l'espace topologique réduit à juste

30. Grothendieck savait, et il l'a dit, que le topos Sh_T de faisceaux est une représentation fidèle de T seulement quand T est sobre, mais il soutenait que seuls les espaces sobres sont intéressants : "quand il y a des sous-ensembles irréductibles qui n'ont pas de points génériques, alors tôt ou tard on est forcé d'ajouter de nouveaux points (génériques)". Comparer la transition vers les schémas depuis les variétés comme dans [Serre 1955].

31. Voir ncatlab.org/nlab/show/big+and+little+toposes pour un rapide survol et pour le point d'introduction à la distinction gros/petit. Ce site donne des références et quelques liens vers le travail pertinent de Lawvere, après que Lawvere en ait discuté avec Grothendieck.

32. Voir [SGA 4a 1972, p. 365].

33. Merci à Olivia Caramello pour une communication privée, octobre 2020, sur ce travail en cours.

un point.

Je suis désolé d'insister autant sur une sorte de trivialités mais je pense qu'il est très essentiel de voir d'une part ces grandes catégories et d'autre part les objets géométriques qui sont un peu plus petits. Mais nous ne pouvons définir [certains de] ces objets géométriques d'aucune autre manière, il y a juste ces grandes catégories. (25 mai)

Il se référa aux grands ensembles plusieurs fois à Buffalo, surtout à la fin.

9. Deligne a prouvé un beau résultat

Il y a un petit problème avec les univers parce qu'ils nécessitent qu'on ajoute un axiome très fort à la théorie des ensembles. Une fois qu'on a ajouté cet axiome, on est en quelque sorte heureux parce qu'on a beaucoup de latitude pour faire de la théorie des catégories. Par exemple, Deligne vient de prouver un beau théorème sur les conjectures de Weil et je suppose qu'il a utilisé des grands cardinaux.

Vous avez tous ces topos, tout ce non-sens général, et vous devez utiliser des univers. (12 juillet)

La dernière réunion de la série sur les topos dura plus de 5 heures, le 12 juillet. Les 20 dernières minutes furent passées à discuter des nouvelles de la preuve de Deligne et de l'utilisation des univers en cohomologie étale.

Donc la question se pose [si H. et Duskin rient] de savoir si les conjectures de Weil dépendent de cet axiome ? Tout le monde serait convaincu bien sûr qu'elles ne le font pas. Mais Samuel pensait à introduire des galaxies plus petites que les univers [34].

On doit être prudent avec l'injectif et une telle homologie algébrique, pour voir si on peut le construire dans ce contexte.

Il serait bon d'avoir un contexte où on n'ajoute pas d'axiomes réels à la théorie des ensembles, et pourtant on peut travailler avec des catégories sans trop de réflexion et de tremblement. Prendre un foncteur catégorie C^b comme une autre catégorie, etc.
Je pense qu'il y a des mathématiques derrière tout cela. (12 juillet)

Grothendieck approuva l'idée d'étudier des questions comme celles concernant les fondements de l'homologie algébrique et de la théorie des catégories. Il dit qu'elles ont des mathématiques derrière elles. Mais il ne supporta jamais d'énoncés concrets tels que l'énoncé disant que les conjectures de Weil dépendraient réellement d'elles. En effet, il avait une certaine philosophie au sujet des grands cardinaux. Quand un membre de l'auditoire dit "il semble que certains ensembles [grands cardinaux] n'existent pas réellement", Grothendieck répondit :

34. Voir [Grothendieck 1986].

> Ils n'existent pas... Ils existent dans le même sens que les échecs. Ils construisent des pouvoirs [cardinaux]. Sious regardez autour de vous dans la Nature, vous ne découvrirez aucune de ces choses. (12 juillet)

Revenant à la preuve de Deligne, Grothendieck expliqua en quoi il se sentait concerné par la théorie des ensembles, et cela n'avait pas d'importance.

> C'est le même genre de fait que le fait que les conjectures de Weil sont vraies... J'ai juste reçu une lettre d'Illusie disant que Deligne expliquait la preuve à Cambridge... Un des plus beaux théorèmes jamais prouvés.
>
> Il est assez clair qu'il aura utilisé la cohomologie étale, et la cohomologie étale, après tout, c'est ce que nous avons ajouté à tous les théorèmes de topos.
>
> On a le sentiment qu'il y a un noyau dur, voyez-vous ? La cohomologie étale est calculée, et il y a des choses très précises à ce sujet. C'est le noyau dur. Toutes ces catégories, univers, etc., sont une sorte de truc de foutage de gueule... vous voyez plus appliqué... (12 juillet)

En le rendant "appétissant", Grothendieck ne voulait certainement pas dire que beaucoup de mathématiciens trouvaient ces catégories attractives ! Il savait très bien qu'ils ne les trouvaient pas attractives. Il voulait donner aux concepts une compréhension conceptuelle unifiée, comme il l'expliqua brièvement dans ses publications mathématiques, et longuement dans *Récoltes et semailles*.[35]

Tout au long de ces enregistrements, les gens parlent les uns sur les autres, souvent en marmonnant, c'est souvent difficile à entendre. Grothendieck mentionne que même la géométrie des conjectures de Weil peut être formulée sans cohomologie. Mais il n'est "pas sûr qu'on puisse l'écrire complètement comme un énoncé mathématique sur les cycles algébriques, excepté en les rendant encore plus forts qu'ils ne le sont." Il dit plus sur les preuves, les formulations, et les fondations. Il se réfère à la théorie des motifs. Quant à la preuve de Deligne elle-même, il ne savait que cela :

> Illusie me dit que l'usage le plus essentiel a été fait de SGA 7. Je serais curieux de savoir quelles sont les idées parce que je n'avais aucune impression que c'était proche du tout. (12 juillet)

Et à la fin de l'enregistrement, on les entend plaisanter un moment et puis ils vont dîner.

35. Voir [Grothendieck 1986].