

2013 : Un équivalent de Borsuk-Ulam qui implique directement le lemme de Sperner

Kathryn L. Nyman et Francis Edward Su

Résumé. Nous montrons que le lemme de Fan de 1952 sur les triangulations étiquetées de la n -sphère avec $n + 1$ étiquettes est équivalent au théorème de Borsuk-Ulam. De plus, contrairement à d'autres équivalents de Borsuk-Ulam, nous montrons que ce lemme implique directement le lemme de Sperner. Cette démonstration peut donc être considérée comme une version combinatoire du fait que le théorème de Borsuk-Ulam implique le théorème du point fixe de Brouwer, ou que le théorème de Lusternik-Schnirelmann-Borsuk implique le lemme KKM.

1. Introduction. Le théorème du point fixe de Brouwer, le théorème de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (KKM) et le lemme de Sperner sont connus pour être équivalents. D'égale puissance, ils forment un triumvirat de théorèmes dont les interconnexions ont été exploitées avec grand succès dans les algorithmes de point fixe [15, 17] ainsi qu'en théorie des jeux [1]. De même, le théorème de Borsuk-Ulam, le théorème de Lusternik-Schnirelmann-Borsuk (LSB) et le lemme de Tucker forment un autre triumvirat de résultats équivalents. Dans chacun de ces triplets, le premier est un résultat topologique, le deuxième est un résultat de couverture d'ensembles et le troisième est un résultat combinatoire.

De plus, ces triplets sont liés entre eux. Puisque le théorème de Borsuk-Ulam implique le théorème du point fixe de Brouwer, tout théorème du second triplet implique nécessairement tout théorème du premier. Il est intéressant de trouver des preuves directes de chaque implication. Par exemple, une construction topologique montre comment un point fixe de Brouwer découle des antipodes de Borsuk-Ulam [13], et grâce aux recouvrements d'ensembles, le théorème LSB peut être utilisé pour prouver directement le lemme KKM [11]. Mais dans le domaine combinatoire, nous ne connaissons pas de preuve directe que le lemme de Tucker implique le lemme de Sperner.

Dans cet article, nous montrons qu'un autre lemme combinatoire, le lemme de Fan $N + 1$, peut être un analogue combinatoire plus naturel du théorème de Borsuk-Ulam, et donc plus digne de figurer dans le triumvirat de Borsuk-Ulam que le lemme de Tucker. En particulier, dans la section 3, nous montrons que le lemme de Fan $N + 1$ est équivalent au théorème de Borsuk-Ulam, et dans la section 4, nous présentons une preuve directe qu'il implique le lemme de Sperner (voir figure 1).

2. Contexte. Nous commençons par rappeler ces théorèmes. Soit Σ^n une version polyédrique de la n -sphère, l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^{n+1}$ à distance 1 de l'origine dans la norme L_1 :

$$\Sigma^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : \sum |x_i| = 1\}.$$

Dans $\mathbb{R}^3$, Σ^2 est simplement la frontière de l'octaèdre. Comme pour l'octaèdre, notons que Σ^n est naturellement subdivisé en orthants ; nous étudierons des triangulations étiquetées de Σ^n qui affinent la subdivision en orthants. Une triangulation est une subdivision par des simplexes qui se rencontrent face à face ou pas du tout. Chaque simplexe est l'enveloppe affine de ses sommets ; ce sont les sommets de la triangulation. Une triangulation de Σ^n est symétrique si, lorsque σ est un simplexe de la triangulation, alors $-\sigma$ est également un simplexe.

Référence : Nyman, K. L. et Su, F. E. (2013). Un équivalent de Borsuk-Ulam impliquant directement le lemme de Sperner, *The American Mathematical Monthly*, 120 (4), 346–354.

Traduction : Denise Vella-Chemla, mars 2026.

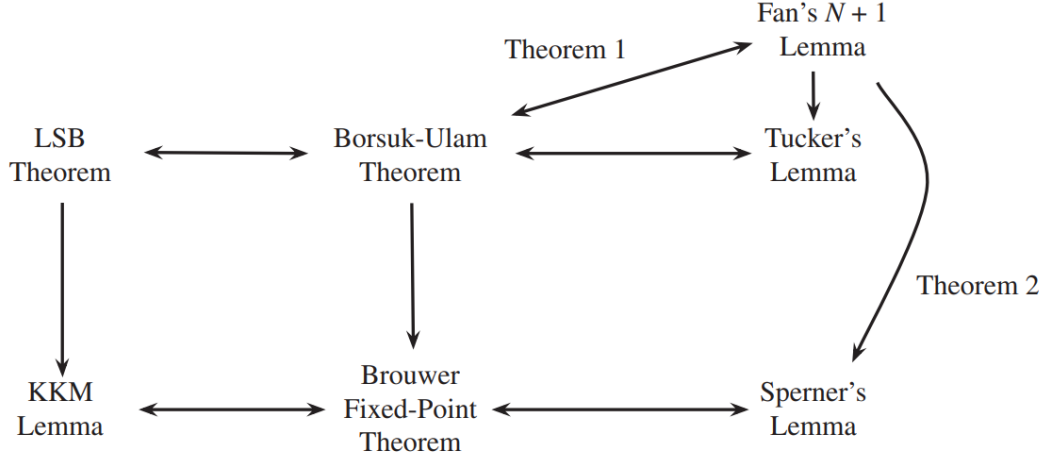


FIGURE 1. Liens entre les résultats topologiques, de couvertures d'ensembles et combinatoires.

On définit un m -étiquetage comme une fonction ℓ qui associe à chaque sommet v l'un des $2m$ entiers possibles : $\{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm m\}$. Une triangulation symétrique de Σ^n possède un étiquetage antisymétrique si $\ell(-v) = \ell(v)$ pour tous les sommets v . Un étiquetage possède une arête complémentaire si une paire de sommets adjacents a des étiquettes dont la somme est nulle, par exemple $\{+i, -i\}$.

On dit qu'un simplexe est alterné si les étiquettes de ses sommets sont distinctes en magnitude et ont leur signe qui alterne, lorsqu'elles sont classées par ordre croissant. Les étiquettes ont donc la forme suivante :

$$\{k_1, -k_2, k_3, \dots\} \quad \text{ou} \quad \{-k_1, k_2, -k_3, \dots\}$$

où $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \dots$. Le premier type est dit alterné positif et le second est dit alterné négatif, selon le signe de k_1 . Par exemple, un triangle étiqueté $\{-1, +3, -7\}$ serait alterné négatif, et une arête étiquetée $\{+2, -3\}$ serait alternée positive.

Lemme de Fan $N+1$. *Soit T une triangulation symétrique de Σ^n avec un $(n+1)$ -étiquetage antisymétrique et sans arête complémentaire. Alors T possède un n -simplexe alterné positif.*

Ainsi, si la frontière d'un octaèdre (par exemple, voir la figure 7) possède une triangulation étiquetée de manière antisymétrique par $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ et sans arête complémentaire, alors elle doit avoir un triangle $\{+1, -2, +3\}$.

Dans la suite, on appelle ce résultat le lemme de Fan $N+1$ car le lemme original de Fan [4] est plus général; il stipule que pour tout m -étiquetage avec les mêmes hypothèses, il existe un nombre impair de n -simplexes alternés positifs et un nombre égal de n -simplexes alternés négatifs. Et comme le montre [9], le résultat est valable pour des triangulations plus générales de S^n avec une preuve constructive. Lorsque $m = n+1$, un m -étiquetage n'a qu'un seul type de simplexe alterné positif, à savoir le simplexe qui a comme étiquettes toutes les grandeurs possibles : $\{1, -2, +3, \dots, (-1)^n(n+1)\}$.

Notons que si un m -étiquetage antisymétrique n'a pas d'arête complémentaire, alors $m \geq n+1$, car les simplexes alternés doivent avoir $n+1$ valeurs d'étiquette différentes (à l'exception du signe). Puisqu'un n -étiquetage est un $(n+1)$ -étiquetage auquel il manque une étiquette, alors, comme l'a

noté Fan [4], la contraposée du lemme de Fan $N + 1$ donne le lemme de Tucker comme corollaire.

Lemme de Tucker. *Soit T une triangulation symétrique de Σ^n avec un n -étiquetage antisymétrique. Alors T a une arête complémentaire. Voir la figure 2.*

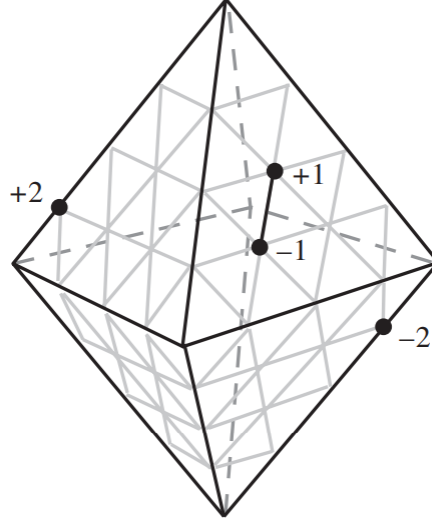


FIGURE 2. Une arête complémentaire est garantie par le lemme de Tucker lorsque la 2-sphère polyédrique possède une triangulation symétrique avec un 2-étiquetage antisymétrique.

Le lemme de Tucker [6, 16] a été initialement proposé comme un équivalent combinatoire du théorème de Borsuk-Ulam [2], bien qu'il ait également trouvé d'autres applications (par exemple, [10]).

Théorème de Borsuk-Ulam. *Soit $h : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que $h(-x) = -h(x)$ pour tout $x \in S^n$. Alors il existe $w \in S^n$ tel que $h(w) = 0$.*

Un résultat de recouvrements d'ensembles dû à Lusternik-Schnirelman-Borsuk [2, 7] est également équivalent au théorème de Borsuk-Ulam.

Théorème LSB. *Soit $C_1, \dots, C_{n+1}$ une collection d'ensembles fermés qui recouvrent S^n . Alors au moins un des ensembles doit contenir une paire de points antipodaux.*

Ces théorèmes (Fan, Tucker, Borsuk-Ulam, LSB) concernent les n -sphères topologiques ou polyédriques. Les trois théorèmes suivants concernent les n -boules topologiques et polyédriques.

Soit B^n une n -boule, l'ensemble de tous les points situés à une distance unitaire de l'origine dans $\mathbb{R}^n$. Une version polyédrique d'une n -boule est un n -simplexe, qui est décrit plus naturellement par son plongement dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Delta^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}.$$

Il est homéomorphe à une n -boule. Pour tout $v = (v_1, \dots, v_{n+1}) \in \Delta^n$, soit

$$Z(v) = \{i : v_i \neq 0\}$$

l'ensemble des indices des coordonnées de v qui sont non nulles. Ainsi, dans Δ^2 , $Z((0, 1, 0)) = \{2\}$ et $Z((0.3, 0, 0.7)) = \{1, 3\}$. Supposons que T soit une triangulation de Δ^n . Un étiquetage de Sperner ℓ attribue à chaque sommet v une étiquette de $\{1 \dots, n + 1\}$ telle que

$$\ell(v) \in Z(v). \quad (1)$$

Ceci force chaque sommet principal de Δ^n à avoir une étiquette différente (l'indice de sa seule coordonnée non nulle), et tout sommet sur une face de Δ^n ne peut être étiqueté que par l'un des sommets principaux qui couvrent cette face. On dit qu'un n -simplexe dans la triangulation est *entièrement étiqueté* si ses sommets ont des étiquettes distinctes (et donc toutes les étiquettes $\{1, \dots, n + 1\}$).

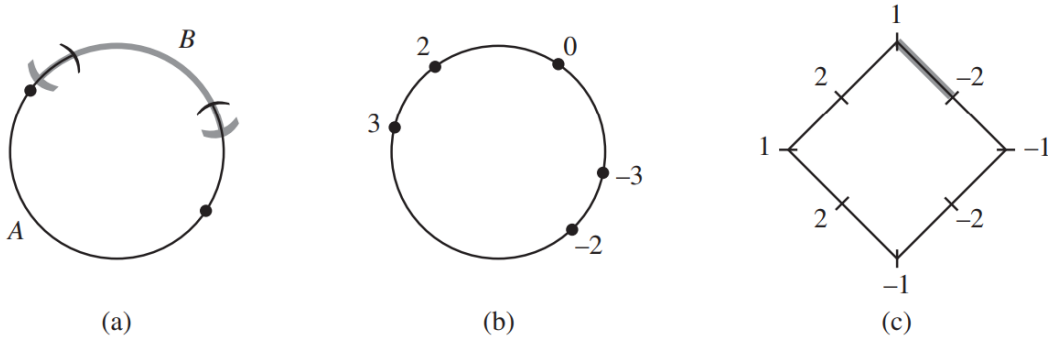


FIGURE 3. (a) LSB : une paire de points antipodaux contenus dans l'un des deux ensembles fermés qui recouvrent S^1 . (b) Borsuk-Ulam : étant donné une fonction continue et antisymétrique de S^1 vers $\mathbb{R}$, il existe un point transformé en 0. (c) Fan $N + 1$: un 2-étiquetage antisymétrique de Σ^1 sans arête complémentaire doit avoir une arête alternée positive (ombrée).

Lemme de Sperner. *Toute triangulation de Δ^n étiquetée au sens de Sperner doit avoir un n -simplexe entièrement étiqueté.*

En fait, il existe un nombre impair de tels simplexes [12]. Une explication et des applications peuvent être trouvées dans [14]. Le lemme de Sperner fournit la voie la plus simple pour prouver ce célèbre théorème de Brouwer [3].

Théorème du point fixe de Brouwer. *Pour toute fonction continue $f : B^n \rightarrow B^n$, il existe un point $x \in B^n$ tel que $f(x) = x$.*

Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz [5] ont établi le lien original entre le théorème de Brouwer et le lemme de Sperner.

Lemme KKM. *Soit $C_1, \dots, C_n$ une collection d'ensembles fermés qui couvrent Δ^n telle que pour chaque $I \subseteq [n + 1]$, la face engendrée par l'ensemble $\{e_i \mid i \in I\}$ est recouverte par $\{C_i \mid i \in I\}$. Alors $\cup_{i=1}^n C_i$ est non vide.*

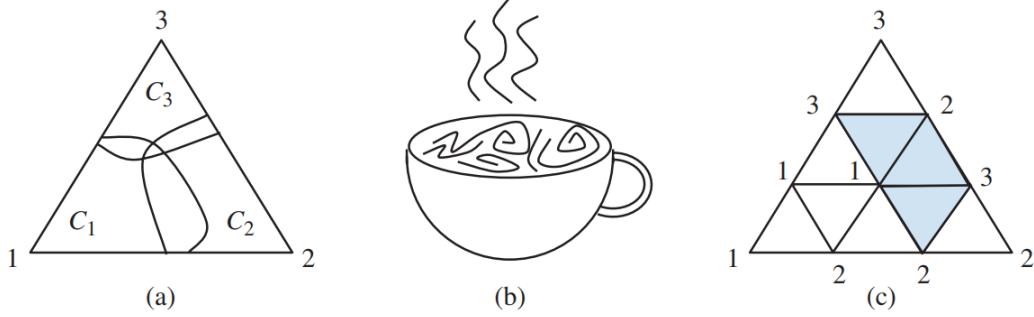


FIGURE 4. (a) KKM : ces ensembles ont une intersection non vide. (b) Brouwer : le café remué a un point qui est au même endroit qu'avant le remuage. (c) Sperner : il y a un nombre impair de triangles 1-2-3.

3. Équivalence du lemme de Fan $N + 1$ et du théorème de Borsuk-Ulam. Comme indiqué précédemment, le lemme général de Fan avec m -étiquetages [4] implique le théorème de Borsuk-Ulam par le biais du lemme de Tucker. Nous montrons ici que le lemme de Fan $N + 1$ est équivalent au théorème de Borsuk-Ulam.

Théorème 1. *Le lemme de Fan $N + 1$ est équivalent au théorème de Borsuk-Ulam.*

Démonstration. Nous montrons d'abord que le théorème de Borsuk-Ulam implique le lemme de Fan $N + 1$. Soit T une triangulation symétrique de Σ^n avec un étiquetage $(n+1)$ -antisymétrique L , dans lequel il n'y a pas d'arêtes complémentaires. Soit $w_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ le point de i -ième coordonnée n et d'autres coordonnées -1 :

$$w_i = (-1, \dots, -1, n, -1, \dots, -1).$$

Soit $W_+ = \{w_1, \dots, w_{n+1}\}$ et $W_- = \{-w_1, \dots, -w_{n+1}\}$. L'ensemble $W = W_+ \cup W_-$ comprend $2n+2$ points qui se trouvent sur l'hyperplan n -dimensionnel : $H = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\}$.

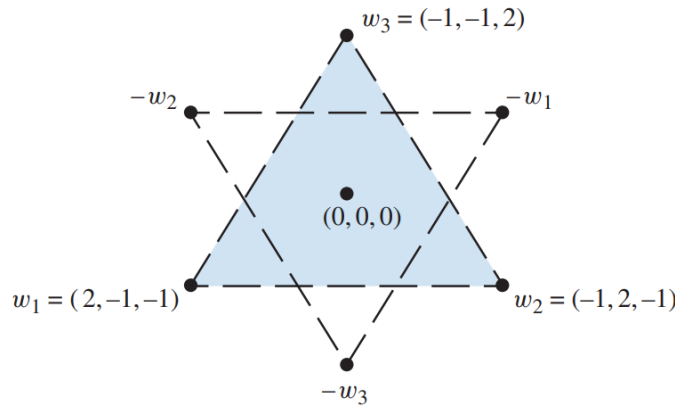


FIGURE 5. Pour $n = 2$, les points w_1, w_2, w_3 et $-w_1, -w_2, -w_3$ dans l'hyperplan H . La région ombrée indique l'image par h d'un 2-simplexe alterné positif, qui est transformé en un simplexe contenant tous les w_i positifs (et l'origine).

Définissons une application continue $h : \Sigma^n \rightarrow H$ comme suit. Pour chaque $v \in T$, soit

$$h(v) = \begin{cases} w_{L(v)} & \text{si } L(v) \text{ est impair,} \\ -w_{L(v)} & \text{si } L(v) \text{ est pair,} \end{cases} \quad (2)$$

où $w_{-i} = -w_i$, dans le cas où $L(v) < 0$. Prolongeons h linéairement à chaque simplexe de T . Puisque L est un étiquetage antisymétrique, nous voyons que $h(-x) = -h(x)$ pour tout $x \in \Sigma^n$. Par conséquent, d'après Borsuk-Ulam, il existe un $z \in \Sigma^n$ tel que $h(z) = 0$.

Ainsi, z appartient à un n -simplexe σ tel que $h(\sigma)$ contienne l'origine. Les images des sommets de σ forment un ensemble $K = \{h(v) : v \in \sigma, v \in T\}$, un sous-ensemble de W de taille $n + 1$ ou plus petite (s'il y a des étiquettes répétées). Puisqu'il n'y a pas d'arêtes complémentaires dans T , l'ensemble K ne contient aucune paire $\{w_j, -w_j\}$. Alors $K = \{w_j\}_{j \in B} \cup \{-w_j\}_{j \in B'}$, où B et B' sont des sous-ensembles disjoints de $\{1, \dots, n + 1\}$.

Considérons maintenant la somme des vecteurs dans K :

$$\widehat{v} = \sum_{j \in B} w_j - \sum_{j \in B'} w_j$$

Notons que les produits scalaires $w_i \cdot w_i = n(n + 1)$ pour tout $i \in [n + 1]$, et $w_i \cdot w_j = -(n + 1)$ pour tout $j \neq i$. Donc, pour $i \in B$, le produit scalaire

$$\begin{aligned} w_i \cdot \widehat{v} &= n(n + 1) - (|B| - 1)(n + 1) + |B'|(n + 1) \\ &= (n + 1)(n + 1 - |B| + |B'|), \end{aligned}$$

qui est positif sauf si $|B| = n + 1$ et $|B'| = 0$, c'est-à-dire si $K = W_+$. Et pour $i \in B'$,

$$\begin{aligned} -w_i \cdot \widehat{v} &= |B|(n + 1) + n(n + 1) - (|B'| - 1)(n + 1) \\ &= (n + 1)(|B| - |B'| + n + 1), \end{aligned}$$

qui est positif sauf si $|B'| = n + 1$ et $|B| = 0$, c'est-à-dire si $K = W_-$. Puisque l'enveloppe convexe de K contient l'origine, il est impossible que tous les vecteurs de K aient un produit scalaire positif avec $\widehat{v}$. Donc soit $K = W_+$ soit $K = W_-$ (et en effet, dans ces cas, l'enveloppe convexe de K contient l'origine).

Si $K = W_+$, alors (2) montre que le simplexe initial σ a comme étiquettes $\{1, -2, \dots, (-1)^n(n + 1)\}$. Si $K = W_-$, alors (2) et l'antisymétrie de L montrent que $-\sigma$ a ces étiquettes. Dans les deux cas, nous trouvons un simplexe alterné positif, comme souhaité.

Nous allons maintenant montrer que le lemme de Fan $N + 1$ implique le théorème de Borsuk-Ulam. Soit $h : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que $h(-x) = -h(x)$ pour tout $x \in \Sigma^n$. Supposons, par l'absurde, qu'il n'existe aucun point $z \in \Sigma^n$ tel que $h(z) = 0$. Si $h(x) = (x'_1, \dots, x'_n)$, soit $\widehat{h} : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la fonction définie par $\widehat{h}(x) = (x'_1, \dots, x'_n, -\sum_{i=1}^n x'_i)$. Ainsi, $\widehat{h}$ envoie Σ^n sur l'hyperplan H et préserve la continuité et l'antisymétrie. De plus, il n'existe aucun point z tel que $\widehat{h}(z) = 0$.

Soit T une triangulation symétrique de Σ^n , et soit l'ensemble W comme ci-dessus. Nous souhaitons construire un étiquetage L des sommets de T qui soit antisymétrique.

Pour $v \in T$, définissons $L(v)$ comme l'indice i tel que w_i soit le plus proche possible de $\widehat{h}(v)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Notons que $i \in \{\pm 1, \dots, \pm(n+1)\}$. En cas d'égalité, choisissons l'indice avec la plus petite valeur absolue. Ceci est bien défini car $\widehat{h}(v)$ n'est jamais 0, et aucun point non nul ne peut être équidistant de w_i et de $w_{-i} = -w_i$. Le fait que L soit antisymétrique découle du fait que $\widehat{h}$ est antisymétrique, et que donc $\widehat{h}(v)$ est le plus proche de w_i si et seulement si $\widehat{h}(-v)$ est le plus proche de w_{-i} .

Par conséquent, d'après le lemme de Fan $N+1$, il existe soit une arête complémentaire $(+i, -i)$, pour un certain i , soit un simplexe alterné ayant pour étiquettes $\{1, -2, \dots, (-1)^n(n+1)\}$. En prenant des triangulations de plus en plus fines, et par la compacité de Σ^n , il existe une sous-suite convergente de simplexes alternés positifs décroissants ou une sous-suite convergente d'arêtes complémentaires plus courtes ayant le même indice i . Ceci donne un point limite qui, par la continuité de $\widehat{h}$, est soit équidistant de w_i et de $-w_i$, soit équidistant de tous les points de l'ensemble $\{w_1, w_2, w_3, \dots, (-1)^n w_{n+1}\}$. Mais le seul point possédant cette propriété est 0. Ainsi, le point limite z doit satisfaire $\widehat{h}(z) = 0$ et donc, $h(z) = 0$. $\square$

4. Le lemme de Fan $N+1$ implique le lemme de Sperner. Maintenant, établissons comment le lemme de Fan $N+1$ implique effectivement le lemme de Sperner par une construction directe, il s'agit donc du résultat combinatoire "correct" à intégrer au triumvirat de Borsuk-Ulam. Prescott [8] a établi cette implication en dimension deux par une méthode différente.

Théorème 2. *Le lemme de Fan $N+1$ implique le lemme de Sperner.*

Démonstration. Considérons une triangulation S de Δ^n avec un étiquetage de Sperner ℓ . Nous étendons d'abord S à une triangulation T de Σ^n en réfléchissant des copies de S sur les autres orthants de Σ^n . Soit $G = \{\pm 1\}^{n+1}$ le groupe des symétries de Σ^n engendrées par des réflexions qui inversent le signe de coordonnées sélectionnées; alors l'action de $g = (g_1, \dots, g_{n+1}) \in G$ sur $v = (v_1, \dots, v_{n+1}) \in \Sigma^n$ produit $gv = (g_1 v_1, \dots, g_{n+1} v_{n+1}) \in \Sigma^n$. Donc g reflète v dans toutes les coordonnées i pour lesquelles $g_i = -1$. Notons que $g = (1, 1, \dots, 1)$ est l'identité dans G . L'idée de cette construction est illustrée dans la figure 6.

De même, si σ est un simplexe de S engendré par un ensemble de sommets V , nous définissons $g\sigma$ comme le simplexe engendré par les sommets de $gV = \{gv : v \in V\}$. Soit T la collection de simplexes $\{g\sigma : \sigma \in S \text{ et } g \in G\}$. Alors T est une triangulation de Σ^n , puisque la méthode de réflexion garantit que les simplexes de T se rencontrent face à face le long des faces réfléchies de S .

Maintenant, on étend l'étiquetage ℓ sur les sommets de S à un étiquetage L sur les sommets de T par réflexion, mais avec des modifications de signe possibles. Définissons

$$L(gv) = g_{\ell(v)}(-1)^{\ell(v)+1} \cdot \ell(v) \quad (3)$$



FIGURE 6. Les actions de G sur Σ^n , telles qu'elles sont montrées par leurs effets sur Monsieur Smiley.

pour chaque $v \in S$. Remarquons que $L(gv)$ et $\ell(v)$ ont la même valeur d'étiquette (mais éventuellement des signes différents). Lorsque $g = (1, 1, \dots, 1)$, cela définit L sur S et le facteur $(-1)^{\ell(v)+1}$ transforme les simplexes entièrement étiquetés en simplexes alternés positifs. Lorsque g est non trivial, L définit un étiquetage des sommets sur des copies réfléchies de S (voir Figure 7).

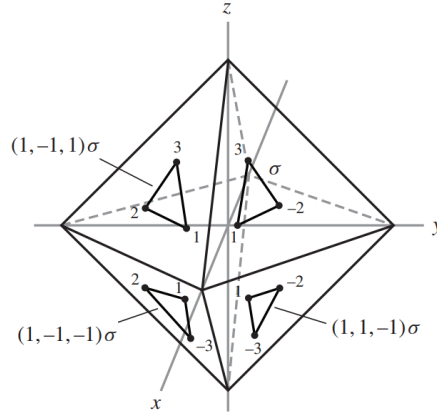


FIGURE 7. Un simplexe alterné positif σ dans T provenant d'un simplexe entièrement étiqueté avec les étiquettes $\{1, 2, 3\}$ dans S , et les simplexes réfléchis $g\sigma$ pour $g = (1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$ et $(1, -1, -1)$ avec leurs L -étiquetages indiqués.

On pourrait craindre que L ne soit pas bien défini là où les orthants se rencontrent. Cependant, les orthants se rencontrent là où $gv = \widehat{g}\widehat{v}$, pour certains $g, \widehat{g} \in G$ et certains $v, \widehat{v} \in S$. Mais alors $g_i v_i = \widehat{g}_i \widehat{v}_i$, pour chaque i , ce qui implique $v_i = \widehat{v}_i$ puisque $g_i, \widehat{g}_i = \pm 1$. Alors $g_i = \widehat{g}_i$ lorsque $v_i \neq 0$, c'est-à-dire lorsque $i \in Z(v)$. Mais $\ell(v) \in Z(v)$ d'après (1), de telle façon que $g_{\ell(v)} = \widehat{g}_{\ell(v)}$. Il découle de (3) que $L(gv) = L(\widehat{g}v)$, donc L est bien défini.

Nous montrons maintenant que L satisfait les conditions du lemme de Fan $N + 1$. La somme des étiquettes antipodales est nulle par construction : le point antipodal de v est $-v = \overline{g}v$, où $\overline{g} = (-1, -1, -1)$, de sorte que (3) donne $L(-v) = -L(v)$. De plus, nous pouvons montrer que L n'a pas d'arêtes complémentaires. Chaque arête de T est une copie réfléchie d'une arête de S par un certain $g \in G$, et l'étiquetage de Sperner ℓ de S n'a pas d'arêtes complémentaires (toutes

les étiquettes sont positives). Alors la règle (3) montre que pour tout choix de g , deux sommets $v, w \in S$ auront des ℓ -étiquettes identiques ($\ell(v) = \ell(w)$) si et seulement si leurs g -réflexions ont également des L -étiquettes identiques ($L(gv) = L(gw)$). Donc L n'a pas d'arêtes complémentaires, car ℓ n'en a pas.

Ainsi, le lemme de Fan $N + 1$ s'applique, il existe donc un n -simplexe alterné positif dans T . Puisque Δ^n est la seule face de Σ^n qui contient les étiquettes $\{1, -2, 3, \dots, (-1)^n(n + 1)\}$, il doit exister un n -simplexe entièrement étiqueté dans S .

En fait, comme indiqué précédemment, une version plus forte du lemme de Fan $N + 1$ est valable, dont la conclusion est qu'il existe en fait un nombre impair de n -simplexes alternés positifs. L'argument ci-dessus démontrerait alors la version plus forte du lemme de Sperner, qui conclut qu'il existe un nombre impair de n -simplexes entièrement étiquetés dans S .

Remerciements. Ce travail a été financé en partie par les subventions NSF DMS-0701308 et DMS-1002938.

Références

1. K. C. Border, Théorèmes du point fixe avec applications à l'économie et à la théorie des jeux, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
2. K. Borsuk, Trois théorèmes sur la sphère euclidienne de dimension n , Fund. Math. 20 (1933) 177-190. 3. L. E. J. Brouwer, Sur les applications des variétés, Math. Ann. 71 (1912) 97-115.
4. K. Fan, Une généralisation du lemme combinatoire de Tucker avec applications topologiques. Ann. of Math. 56 (1952) 431-437.
5. B. Knaster, C. Kuratowski, S. Mazurkiewicz, Une preuve du théorème du point fixe pour les simplexes de dimension n , Fund. Math. 14 (1929) 132-137.
6. S. Lefschetz. Introduction à la topologie, Princeton University Press, Princeton, 1949.
7. L. Lusternik. L. Schnirelman, Méthodes topologiques en calcul variationnel, Issledowatelskii Institut Matematiki i Mechaniki pri O.M.G.U., Moscou, 1930 [en russe].
8. T. Prescott, Extensions du théorème de Borsuk-Ulam, mémoire de fin d'études, Harvey Mudd College, 2002.
9. T. Prescott, F. E. Su, Une preuve constructive de la généralisation du lemme de Tucker par Ky Fan, J. Combin. Theory Ser. A 111 (2005) 257-265.
10. F. W. Simmons, F. E. Su, Diminution du consensus par les théorèmes de Borsuk-Ulam et Tucker, Math. Social Sci. 45 (2003) 15-25.
11. G. Spencer, F. E. Su, Le théorème LSB implique le lemme KKM, Amer. Math. Monthly 114 (2007) 156-159.
12. E. Sperner, Nouvelle preuve de l'invariance du nombre de dimension et de l'aire, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 6 (1928) 265-272.

13. F. E. Su, Borsuk-Ulam implique Brouwer : une construction directe. *Amer. Math. Monthly* 104 (1997) 855-859.
14. Harmonie des loyers : lemme de Sperner dans le partage équitable, *Amer. Math. Monthly* 106 (1999) 930-942.
15. M. J. Todd, Le calcul des points fixes et ses applications, *Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems*. Springer-Verlag. New York, 1976.
16. A. W. Tucker, Quelques propriétés topologiques du disque et de la sphère, *Actes du premier Congrès mathématique canadien*. Montréal, (1945) 285-309.
17. Z. Yang. *Calcul des équilibres et des points fixes*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.

Kathryn L. Nyman a obtenu sa licence (B.A.) au Carthage College en 1995 et son doctorat (Ph.D.) à l'Université Cornell en 2001. Elle est professeure agrégée de mathématiques à l'Université Willamette, nichée dans la vallée de la Willamette, en Oregon, à proximité de cascades, de vignobles et de quelques élevages d'alpagas. Ses recherches portent sur la combinatoire algébrique et énumérative. Pour se détendre, Kathryn pratique la danse swing, la randonnée, la peinture et les jeux de société. Elle recommande vivement à tous ses collègues du nord-ouest Pacifique, souvent pluvieux, et aux figurants en herbe, de collaborer avec un collègue de Los Angeles; lors d'un voyage de recherche pour cet article, elle a filmé un épisode web de la série "The Guild".
Département de mathématiques, Université Willamette, Salem, OR 97301.

Francis Edward Su attribue à Michael Starbird de l'Université du Texas à Austin le mérite d'avoir stimulé son intérêt pour les théorèmes du point fixe lorsqu'il était étudiant de premier cycle. Il a obtenu son doctorat à Harvard et est maintenant professeur de mathématiques au Harvey Mudd College. Ses recherches portent sur la combinatoire géométrique et ses applications aux sciences sociales. Sa passion pour la vulgarisation des mathématiques est évidente dans son site Web et son application iPhone Math Fun Facts, extrêmement populaires, ainsi que dans son cours d'analyse réelle sur YouTube. Pendant son temps libre, le jardinage et l'écriture de chansons lui permettent de réfléchir à de profondes questions théologiques. Les collaborateurs originaires de l'Oregon peuvent également lui offrir des opportunités de célébrité; son apparition en tant que figurant dans le film *Blue Like Jazz* a été filmée à Portland pendant la rédaction de cet article, et cela pourrait lui permettre d'obtenir l'un des plus faibles nombres d'Erdős-Bacon.

Département de mathématiques, Harvey Mudd College, Claremont, CA 91711

2002 : Extrait de *Using the Borsuk-Ulam Theorem / Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry* de Jiří Matoušek, avec la collaboration de Günter M. Ziegler et Anders Björner (p. 41)

2.3 Une version discrète : le lemme de Tucker

Ici, nous dérivons le théorème de Borsuk-Ulam¹ à partir d'un énoncé combinatoire, appelé lemme de Tucker. Ce théorème concerne des étiquetages des sommets de triangulations de la boule n -dimensionnelle. Il se trouve que le lemme de Tucker est également facilement impliqué par le théorème de Borsuk-Ulam : on peut dire qu'il s'agit d'une "version discrète" de ce théorème.

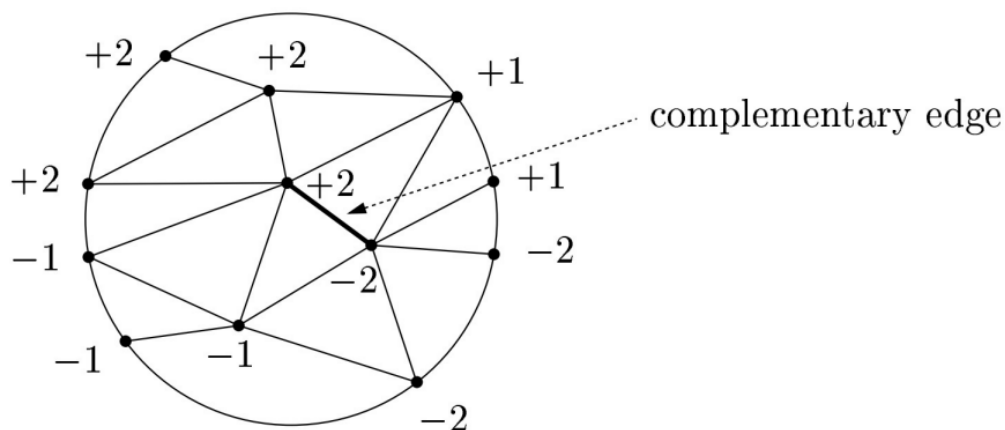
Soit T une triangulation (finie) de la boule n -dimensionnelle B^n . Nous disons que T est antipodale-ment symétrique sur la frontière si l'ensemble des simplexes de T contenus dans $S^{n-1} = \partial B^n$ est une triangulation de S^{n-1} et si T est antipodale-ment symétrique : c'est-à-dire que si $\sigma \subset S^{n-1}$ est un simplexe de T , alors $-\sigma$ est aussi un simplexe de T .

2.3.1 Théorème (lemme de Tucker). *Soit T une triangulation de B^n qui est antipodale-ment symétrique sur la frontière. Soit*

$$\lambda : V(T) \rightarrow \{+1, -1, +2, -2, \dots, +n, -n\}$$

un étiquetage des sommets de T tel que $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ pour tout sommet $v \in \partial B^n$ (c'est-à-dire que λ est antipodal sur la frontière de B^n). Alors il existe un 1-simplexe (une arête) dans T qui est complémentaire ; c'est-à-dire que ses deux sommets sont étiquetés par des nombres opposés.

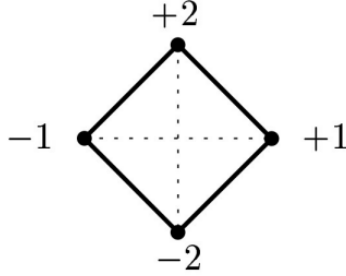
Voici une illustration bidimensionnelle :



Explication. Avant de commencer toute démonstration, nous reformulons le lemme de Tucker en

1. *Note de la traductrice : dans cette partie de l'article, l'expression Borsuk-Ulam fait systématiquement référence à l'énoncé (2b) que nous reproduisons pour rappel du théorème de Borsuk-Ulam : Il n'y a pas d'application continue $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ qui soit antipodale sur la frontière, i.e. qui satisfasse $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in S^{n-1} = \partial B^n$.*

utilisant des applications simpliciales sur la frontière de l'hyperoctaèdre². Soit $\diamond^{n-1}$ le complexe simplicial (abstrait) dont l'ensemble de sommets est $V(\diamond^{n-1}) = \{+1, -1, +2, -2, \dots, +n, -n\}$, et dont le sous-ensemble $F \subseteq V(\diamond^{n-1})$ forme un simplexe lorsqu'il n'existe aucun $i \in [n]$ tel que à la fois $i \in F$ et $-i \in F$. D'après la remarque ci-dessous, définition 1.4.1, on peut reconnaître $\diamond^{n-1}$ comme le complexe frontière de l'hyperoctaèdre n -dimensionnel. La notation devrait suggérer le cas $n = 2$:



En particulier, $\|\diamond^{n-1}\| \simeq S^{n-1}$. Le lecteur est invité à vérifier que l'énoncé suivant n'est qu'une reformulation du théorème 2.3.1 :

Théorème 2.3.2 (Lemme de Tucker, une reformulation). *Soit T une triangulation de B^n antipodale sur le bord. Alors il n'existe aucune application $\lambda : V(T) \rightarrow V(\diamond^{n-1})$ qui soit une application simpliciale de T dans $\diamond^{n-1}$ et qui soit antipodale sur son bord.*

Équivalence de Borsuk-Ulam avec le lemme de Tucker. Rappelons que Borsuk-Ulam affirme la non-existence d'une application $B^n \rightarrow S^{n-1}$ antipodale sur le bord.

Dériver le lemme de Tucker, sous la forme du théorème 2.3.2, à partir de Borsuk-Ulam est immédiat : s'il existait une application simpliciale λ de T dans $\diamond^{n-1}$ antipodale sur la frontière, son extension affine canonique $\|\lambda\|$ serait une application continue $B^n \rightarrow S^{n-1}$ antipodale sur la frontière, ce qui contredirait Borsuk-Ulam.

Pour prouver l'implication inverse, qui est ce qui nous intéresse réellement, nous supposons que $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ est une application (continue) antipodale sur la frontière, et nous construisons T et λ contredisant le théorème 2.3.2.

Ici, T peut être choisie comme n'importe quelle triangulation de B^n antipodale sur la frontière et de diamètre de simplexe au plus δ . Pour spécifier δ , nous posons d'abord $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ce choix garantit que pour tout $y \in S^{n-1}$, nous avons $\|y\|_\infty \geq \varepsilon$, c'est-à-dire qu'au moins une des composantes de y a une valeur absolue au moins égale à ε . (Sinon, nous aurions $\sum_{i=1}^n y_i^2 < 1$.)

2. Note de la traductrice : définition trouvée dans wikipedia : L'hyperoctaèdre est en géométrie un polytope régulier convexe, qui généralise l'octaèdre en dimension quelconque. Un hyperoctaèdre en dimension n est également appelé polytope croisé (crosspolytope en anglais), n -orthoplexe ou cocube.

Une fonction continue sur un ensemble compact est uniformément continue, et il existe donc un nombre $\delta > 0$ tel que si la distance entre deux points x, x' ne dépasse pas δ , alors $\|f(x) - f(x')\|_\infty < 2\varepsilon$. C'est le δ limitant le diamètre des simplexes de T .

Maintenant, nous pouvons définir $\lambda : V(T) \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$. Tout d'abord, nous posons $k(v) := \min\{i : |f(v)_i| \geq \varepsilon\}$, puis nous posons

$$\lambda(v) := \begin{cases} +k(v) & \text{si } f(v)_{k(v)} > 0, \\ -k(v) & \text{si } f(v)_{k(v)} < 0. \end{cases}$$

Puisque f est antipodale sur ∂B^n , nous avons $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ pour chaque sommet v de la frontière. Le lemme de Tucker s'applique donc et donne une arête complémentaire vv' .

Soit $i = \lambda(v) = -\lambda(v') > 0$. Alors $f(v)_i \geq \varepsilon$ et $f(v')_i \leq -\varepsilon$, et donc $\|f(v) - f(v')\|_\infty \geq 2\varepsilon$, une contradiction.

La définition de λ devient plus intuitive si l'on considère la formulation du lemme de Tucker dans le théorème 2.3.2 et si l'on considère f comme entrant dans $\|\Diamond^{n-1}\|$. Alors $\lambda(v)$ est essentiellement le sommet de $\Diamond^{n-1}$ le plus proche de $f(v)$. (Nous devons départager les ex æquo et préserver l'antipodalité, et donc la définition formelle de λ ci-dessus semble quelque peu différente). $\square$

Triangulations spéciales. Plusieurs preuves combinatoires du lemme de Tucker sont connues, mais à ma connaissance, aucune ne l'établit dans la généralité énoncée ci-dessus. On suppose toujours certaines propriétés supplémentaires de la triangulation T , qui ne sont pas nécessaires à la validité de l'énoncé mais qui facilitent la preuve.

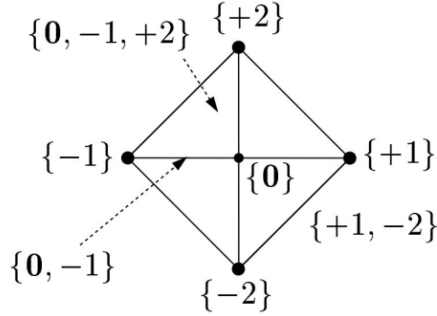
Heureusement, il ne s'agit pas d'une réelle perte de généralité : pour la preuve ci-dessus de l'implication "lemme de Tucker $\implies$ Borsuk-Ulam", il suffit de savoir que le lemme de Tucker est valable pour une certaine suite particulière de triangulations dont le diamètre du simplexe tend vers 0. (Notons que la forme générale du lemme de Tucker découle alors d'un tel cas particulier par le détour via le théorème de Borsuk-Ulam).

Deux preuves du lemme de Tucker à venir. Dans cette section, nous présentons une preuve assez directe et purement combinatoire. Elle est également constructive : elle fournit un algorithme pour trouver l'arête complémentaire, en traçant une certaine suite de simplexes.

Dans la section suivante, nous donnons une autre preuve, totalement indépendante de la première (on peut donc les ignorer). La seconde preuve est peut-être plus instructive, révélant mieux pourquoi le lemme de Tucker est valable. Elle utilise certains outils liés à l'homologie simpliciale, tels que les chaînes et l'opérateur de bord, mais sous une forme extrêmement rudimentaire.

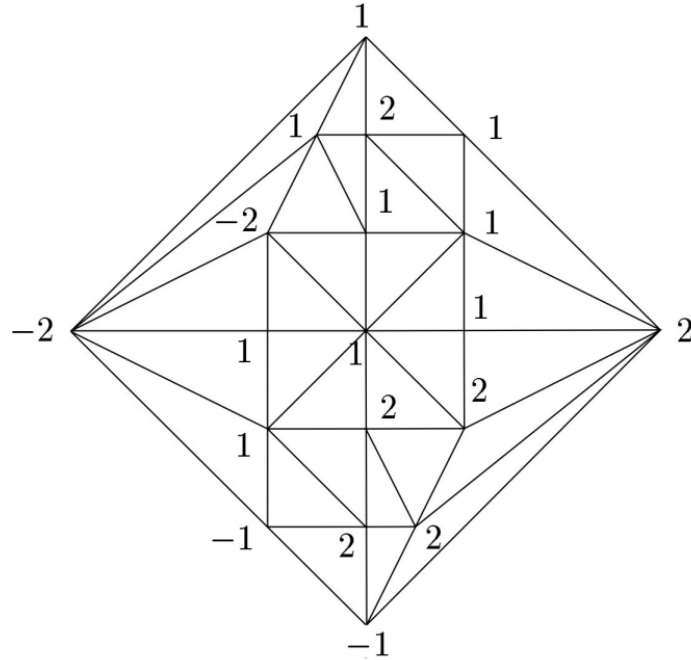
La première preuve. Nous commençons par spécifier les exigences supplémentaires sur la triangulation T . Nous remplaçons d'abord la boule euclidienne B^n par l'hyperoctaèdre $\widehat{B}^n$, la boule unité de la ℓ_1 -norme.

Soit $\diamond^n$ la triangulation naturelle de $\widehat{B}^n$ induite par les hyperplans des coordonnées. Explicitement, chaque simplexe $\sigma \in \diamond^n$ vit soit dans $\diamond^{n-1}$ (ce sont les simplexes sur le bord), soit il est égal à $\tau \cup \{0\}$ pour un certain $\tau \in \diamond^{n-1}$; c'est-à-dire que c'est un cône de base σ et de sommet 0. L'image suivante montre $\diamond^2$, avec certains des simplexes marqués par leurs ensembles de sommets :



Nous allons démontrer le lemme de Tucker pour les triangulations T de $\widehat{B}^n$ qui sont antipodalement symétriques sur la frontière et qui raffinent $\diamond^n$ (c'est-à-dire que pour chaque $\sigma \in T$, il existe $\tau \in \diamond^n$ avec $\sigma \subseteq \tau$). En d'autres termes, la deuxième condition exige que le signe de chaque coordonnée soit constant sur l'intérieur relatif de σ , pour tout $\sigma \in T$. Appelons une telle triangulation T une triangulation spéciale de $\widehat{B}^n$.

Pour $n = 2$, une triangulation spéciale T avec un étiquetage λ comme dans le lemme de Tucker est représentée ci-dessous :



Il n'est pas difficile de construire des triangulations spéciales arbitrairement fines. Par exemple, nous pouvons commencer par $\diamond^n$ et prendre de manière répétée la subdivision barycentrique jus-

qu'à atteindre un diamètre de simplexes suffisamment petit.

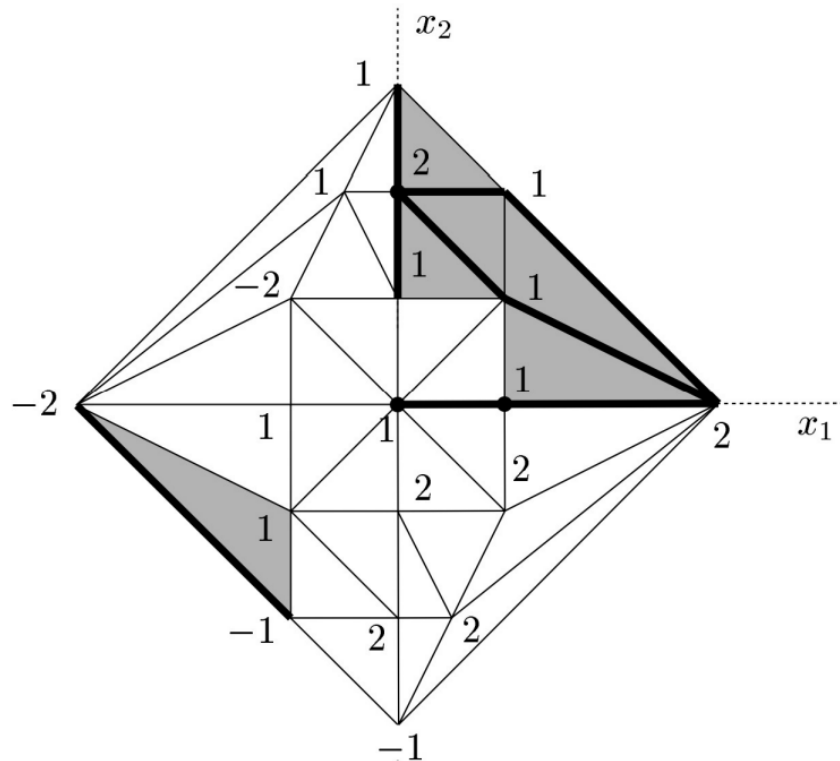
Supposons donc que T est une triangulation spéciale de $\widehat{B}^n$ et que $\lambda : V(T) \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$ est un étiquetage antipodal sur la frontière. La démonstration repose essentiellement sur un argument de parité, mais non sans subtilité ; il nous faut considérer des simplexes de toutes dimensions. Nous allons isoler une classe de simplexes dans T pour lesquels λ se comporte d'une certaine manière, les simplexes "heureux", définir un graphe sur ces simplexes et aboutir à une contradiction en montrant que ce graphe possède exactement un sommet de degré impair.

Pour un simplexe $\sigma \in T$, notons $\lambda(\sigma) := \{\lambda(v) : v \text{ est un sommet de } \sigma\}$. Nous définissons également un autre ensemble $S(\sigma)$ d'étiquettes (sans lien avec les valeurs de λ sur σ). Plus précisément, nous choisissons un point x dans l'intérieur relatif de σ et posons

$$S(\sigma) = \{+i : x_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{-i : x_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Puisque T est une triangulation particulière, tout choix de x donne le même $S(\sigma)$. Géométriquement parlant, $S(\sigma)$ est l'ensemble des sommets du simplexe de $\diamond^{n-1}$ où σ est transformé par la projection centrale à partir de 0 (et les simplexes "exceptionnels" $\emptyset$ et $\{0\}$ reçoivent $\emptyset$).

Maintenant, on dit qu'un simplexe est heureux si $S(\sigma) \subseteq \lambda(\sigma)$. C'est-à-dire qu'on peut voir $S(\sigma)$ comme l'ensemble des "étiquettes prescrites" pour σ , et σ est heureux si toutes ces étiquettes apparaissent effectivement sur ses sommets. Les simplexes heureux sont mis en évidence dans l'image suivante :



Nous examinons d'abord certaines propriétés des simplexes heureux. Soit σ un simplexe heureux et posons $k = |S(\sigma)|$. Alors, σ appartient au sous-espace linéaire k -dimensionnel L_σ engendré par les k axes de coordonnées x_i tels que $i \in S(\sigma)$ ou $-i \in S(\sigma)$. Donc $\dim \sigma \leq k$. D'autre part, $\dim \sigma \geq k - 1$, puisqu'au moins k étiquettes de sommets sont nécessaires pour rendre σ heureux. Nous qualifions σ d'étroit si $\dim \sigma = k - 1$; c'est-à-dire si toutes les étiquettes de sommets sont nécessaires pour rendre σ heureux. Sinon, si $\dim \sigma = k$, nous qualifions σ de lâche. Pour un simplexe heureux lâche σ , une étiquette de sommet peut apparaître deux fois, ou il peut y avoir une étiquette supplémentaire qui n'apparaît pas dans $S(\sigma)$.

Un simplexe heureux au bord est nécessairement serré, tandis qu'un simplexe heureux hors bord peut être étroit ou lâche. Le simplexe $\{0\}$ est toujours heureux (et lâche).

On définit un graphe (non orienté) G dont les sommets sont tous des simplexes heureux, et dans lequel les sommets $\sigma, \tau \in T$ sont connectés par une arête si

- (a) σ et τ sont des simplexes antipodaux au bord ($\sigma = -\tau \subset \partial \widehat{B}^n$); ou
- (b) σ est une face de τ (c'est-à-dire une face de dimension $(\dim \tau - 1)$) avec $\lambda(\sigma) = S(\tau)$; c'est-à-dire que les étiquettes de σ seules rendent déjà τ heureux.

Le simplexe $\{0\}$ a un degré de 1 dans G , puisqu'il est connecté exactement à l'arête de la triangulation qui est rendue heureuse par l'étiquette $\lambda(0)$. Nous prouvons que s'il n'y a pas d'arête complémentaire, alors tout autre sommet σ du graphe G a un degré de 2. Puisqu'un graphe (fini) ne peut pas contenir un seul sommet de degré impair, cela établira le lemme de Tucker.

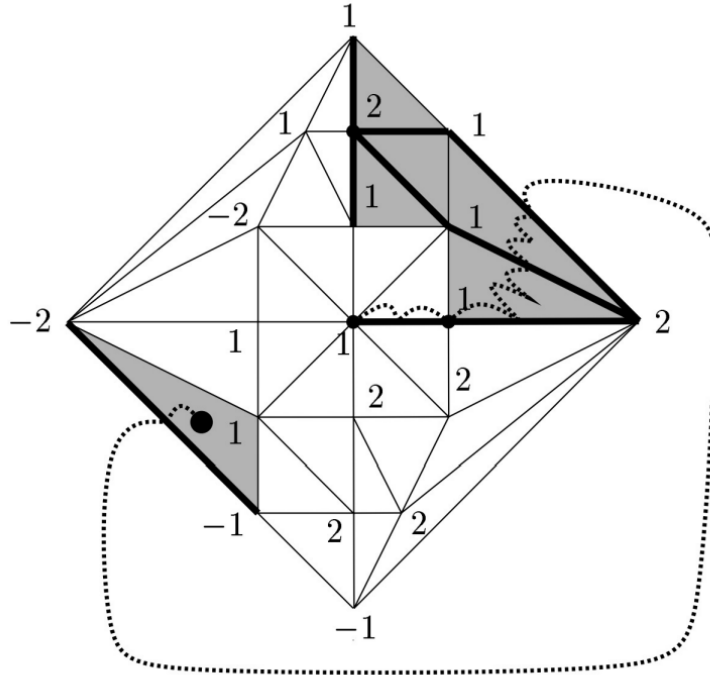
Nous distinguons plusieurs cas.

1. σ est un simplexe heureux étroit. Alors tout voisin τ de σ est soit égal à $-\sigma$ soit a σ comme face. Nous avons deux sous-cas :
 - 1.1 σ se trouve sur la frontière $\partial \widehat{B}^n$. Alors $-\sigma$ est l'un de ses voisins. Tout autre voisin τ , ayant σ comme face et rendu heureux par ses étiquettes, doit se trouver dans le sous-espace de coordonnées L_σ mentionné ci-dessus, de dimension $k := \dim \sigma + 1$. L'intersection $L_\sigma \cap \widehat{B}^n$ est un hyperoctaèdre de dimension k , et les simplexes de T contenus dans L_σ le triangulent. Maintenant, si σ est un simplexe de frontière de dimension $(k - 1)$ dans une triangulation de $\widehat{B}^k$, alors c'est une face d'un seul k -simplexe.
 - 1.2 σ ne se trouve pas sur la frontière. En raisonnant d'une manière similaire au cas précédent, nous voyons que c'est une face d'exactly deux simplexes, rendu heureux par ses étiquettes, et ces faces sont ses deux voisins.
2. σ est un simplexe heureux lâche. Les sous-cas sont :
 - 2.1 Nous avons $S(\sigma) = \lambda(\sigma)$, et donc l'une des étiquettes apparaît deux fois sur σ . Alors σ est adjacent à exactement deux de ses faces (et il ne peut pas s'agir d'une face d'un simplexe heureux).
 - 2.2 Il y a une étiquette supplémentaire $i \notin S(\sigma)$. Nous notons que $-i \notin S(\sigma)$ également, car sinon, nous aurions une arête complémentaire. L'un des voisins de σ est la face de σ ne contenant pas le sommet avec l'étiquette supplémentaire i . De plus, σ est une face d'exactly un simplexe lâche σ' rendu heureux par les étiquettes de σ ; à savoir, un simplexe tel que $S(\sigma') = \lambda(\sigma) = S(\sigma) \cup \{i\}$. Nous entrons dans ce σ' si nous allons d'un

point intérieur de σ dans la direction de l'axe $x_{|i|}$, dans la direction positive pour $i > 0$ et dans la direction négative pour $i < 0$.

Donc, pour chaque possibilité, nous avons exactement deux voisins, ce qui donne une contradiction. $\square$

Remarque. La démonstration ci-dessus procède par l'absurde, mais elle peut facilement être transformée en un algorithme pour trouver une arête complémentaire. D'après l'argument précédent, un simplexe σ est de degré 2 dans G à moins qu'on ait $\sigma = \{0\}$ ou bien σ contient une arête complémentaire. On peut donc partir de $\{0\}$ et suivre un chemin dans G jusqu'à atteindre un simplexe possédant une arête complémentaire. Un tel chemin est indiqué sur la figure suivante :



Notes.

L'étude de Steinlein³ répertorie plus de 10 références avec des preuves combinatoires du théorème de Borsuk-Ulam via le lemme de Tucker ou des lemmes apparentés.

Le lemme de Tucker provient de cette référence⁴. Cet article contient une version bidimensionnelle, et une version pour une dimension arbitraire apparaît dans le livre de S. Lefschetz *Introduction to topology*⁵ (voir la section suivante).

3. H. Steinlein. *Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications : a survey*, A. Granas éd. Méthodes topologiques en analyse non-linéaire, vol. 95, Colloqu. Sémin. Math. Sup. Semin. Sci. OTAN p. 166-235, Montréal, 1985, Univ. de Montréal Press.

4. A. W. Tucker, *Some topological properties of disk and sphere*, Proc. First Canadian Math. Congress, Montréal, 1945, p. 285-309, Toronto, 1946, University of Toronto Press.

5. Princeton, 1949.

La preuve présentée ci-dessus est basée sur Freund et Todd⁶. Les auteurs visaient une preuve algorithmique. De tels algorithmes sont d'un grand intérêt et ont effectivement été utilisés pour le calcul numérique des zéros de fonctions.

2.4 Une autre preuve du lemme de Tucker

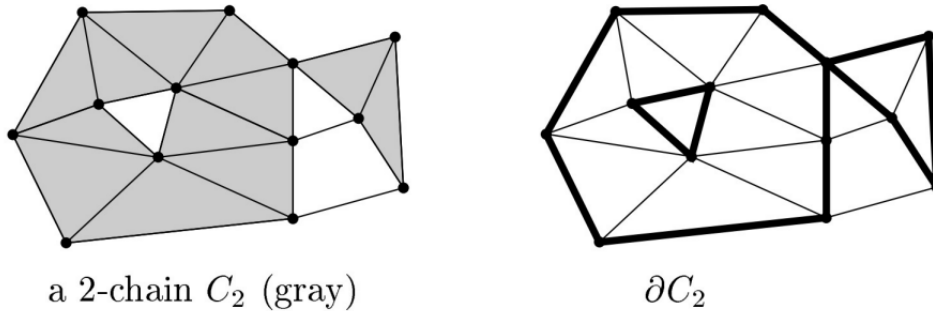
Préliminaires sur les chaînes et les bords. Nous introduisons plusieurs notions simples qui nous permettront de formuler la preuve à venir de manière claire et concise. Les lecteurs familiers avec l'homologie simpliciale les reconnaîtront immédiatement. Puisque nous travaillons (implicitement) avec des coefficients dans $\mathbb{Z}_2$, de nombreux concepts se simplifient par rapport aux introductions habituelles à l'homologie.

Soit K un complexe simplicial. Une k -chaîne désigne un ensemble C_k constitué de certains simplexes de dimension k de K , avec $k = 0, 1, \dots, \dim K$. (La dimension est généralement indiquée par l'indice). Notons qu'une k -chaîne ne contient que des simplexes de dimension k et n'est donc pas un complexe simplicial.

La k -chaîne vide est notée 0 , plutôt que $\emptyset$.

Si C_k et D_k sont des k -chaînes, leur somme $C_k + D_k$ est la k -chaîne qui est la différence symétrique de C_k et D_k (cette addition correspond donc à l'addition des vecteurs caractéristiques modulo 2). En particulier, $C_k + C_k = 0$.

Si $F \in K$ est un simplexe de dimension k , la frontière de F est, pour les besoins de cette section, la $(k-1)$ -chaîne ∂F constituée des faces de F (donc ∂F a $k+1$ simplexes). Pour une k -chaîne $C_k = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$, la frontière est définie comme $\partial C_k = \partial F_1 + \partial F_2 + \dots + \partial F_m$. Elle est donc constituée des $(k-1)$ -simplexes qui apparaissent un nombre impair de fois comme faces des simplexes dans C_k :



Les propriétés importantes de l'opérateur de bord sont :

- il commute avec l'addition de chaînes : $\partial(C_k + D_k) = \partial C_k + \partial D_k$. Ceci est évident d'après la définition.

6. R. M. Freund, M. J. Todd, *A constructive proof of Tucker's combinatorial lemma*, J. Combinatorial Theory, sér. A, 30 : 321 – 325, 1981.

- nous avons $\partial\partial C_k = 0$ pour toute k -chaîne C_k . Il suffit de le vérifier pour C_k constitué d'un seul k -simplexe, et ceci est évident.

Une application simpliciale f d'un complexe simplicial K dans un complexe simplicial L induit une application $f_{\#k}$ envoyant les k -chaînes de K dans les k -chaînes de L . Plus précisément, si $C_k = \{F\}$ est une k -chaîne constituée d'un seul simplexe, on définit $f_{\#k}(C_k)$ comme $\{f(F)\}$ si $f(F)$ est un simplexe de dimension k (de L), et comme 0 sinon (donc si F est "aplati" par f , il ne contribue pas). Ensuite, on étend linéairement à des chaînes arbitraires :

$$f_{\#k}(\{F_1, F_2, \dots, F_m\}) = f_{\#k}(\{F_1\}) + f_{\#k}(\{F_2\}) + \dots + f_{\#k}(\{F_m\}).$$

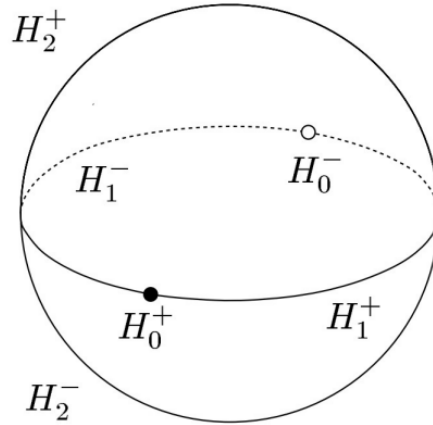
Le dernier fait général avant d'aborder la preuve du lemme de Tucker est que ces applications de chaînes commutent avec l'opérateur de bord, au sens suivant : $f_{\#k-1}(\partial C_k) = \partial f_{\#k}(C_k)$, pour toute k -chaîne C_k . Il suffit à nouveau de le vérifier pour C_k contenant un seul simplexe.

Exigences sur la triangulation. Dans la preuve à venir, nous avons également besoin d'une condition supplémentaire sur la triangulation T de B^n dans le lemme de Tucker. Pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, on définit

$$H_k^+ = \{x \in S^{n-1} : x_{k+1} \geq 0, x_{k+2} = x_{k+3} = \dots = x_n = 0\},$$

$$H_k^- = \{x \in S^{n-1} : x_{k+1} \leq 0, x_{k+2} = x_{k+3} = \dots = x_n = 0\}.$$

Voici une image pour $n = 3$:



Ainsi, H_{n-1}^+ et H_{n-1}^- sont les hémisphères "nord" et "sud" de S^{n-1} , $H_{n-2}^+ \cup H_{n-2}^-$ est l'"équateur" $(n-2)$ -dimensionnel, etc., et enfin H_0^+ et H_0^- sont une paire de points antipodaux. Nous supposons que T respecte cette structure : c'est-à-dire que pour chaque $i = 0, 1, \dots, n-1$, il existe des sous-complexes qui triangulent H_i^+ et H_i^- , respectivement.

Nous démontrons le lemme de Tucker dans la version avec une application simpliciale dans $\diamond^{n-1}$ (théorème 2.3.2). Pour cette démonstration, il n'est pas vraiment important que l'application λ aille dans $\diamond^{-1}$; elle peut également être dans n'importe quelle triangulation antipodale symétrique

L de S^{n-1} . Nous démontrons les trois affirmations suivantes.

2.4.1 Proposition. Soit T une triangulation de B^n telle que décrite ci-dessus, soit K la partie (antipodale symétrique) de T triangulant S^{n-1} , et soit L une autre triangulation (finie) antipodale symétrique de S^{n-1} . Soit $f : V(K) \rightarrow V(L)$ une application simpliciale antipodale envoyant K dans L . Alors nous avons :

- (i) Soit A_{n-1} la $(n-1)$ -chaîne constituée de tous les simplexes $(n-1)$ -dimensionnels de K . Alors la $(n-1)$ -chaîne $C_{n-1} := f_{\#n-1}(A_{n-1})$ est soit vide, soit elle est constituée de tous les $(n-1)$ -simplexes de L . Autrement dit, soit chaque $(n-1)$ -simplexe de L a un nombre pair d'antécédents, soit chacun a un nombre impair d'antécédents.

Dans le premier cas (nombre pair d'antécédents), on dit que f a un degré pair et on écrit $\deg_2(f) = 0$, et dans le second cas, on dit que f a un degré impair, en écrivant $\deg_2(f) = 1$.

- (ii) Si $\bar{f}$ est une application simpliciale quelconque de T dans L , et f est la restriction de $\bar{f}$ sur la frontière (c'est-à-dire sur $V(K)$), alors $\deg_2(f) = 0$.
- (iii) Si f est une application simpliciale antipodale quelconque de K dans L , alors $\deg_2(f) = 1$.

Par conséquent, une application simpliciale λ de T dans L qui est antipodale sur la frontière ne peut pas exister, puisqu'elle aurait un degré pair d'après (ii) et un degré impair d'après (iii), ce qui prouve le lemme de Tucker.

Démonstration de (i). Ceci est géométriquement assez intuitif, et le lecteur peut probablement inventer une preuve géométrique directe. Ici, nous commençons à pratiquer le langage des chaînes.

Si C_{n-1} n'est ni vide ni tout, alors il existe deux $(n-1)$ -simplexes partageant une face telle que l'un d'eux est dans C_{n-1} et l'autre ne l'est pas. Alors leur face commune est dans ∂C_{n-1} . En même temps, on calcule

$$\partial C_{n-1} = \partial f_{\#n-1}(A_{n-1}) = f_{\#n-2}(\partial A_{n-1}) = 0,$$

puisque tout $(n-2)$ -simplexe de K est une face d'exactly deux simplexes de A_{n-1} . Ceci est une contradiction. $\square$

Démonstration de (ii). C'est encore une fois intuitif (pensons à un argument géométrique informel) et facile. Soit A_n la n -chaîne composée de tous les n -simplexes de T . Alors $A_{n-1} = \partial A_n$. En même temps, $\bar{f}_{\#n}(A_n) = 0$, simplement parce que L n'a pas de n -simplexes.

Ainsi, $C_{n-1} = f_{\#n-1}(A_{n-1}) = \partial \bar{f}_{\#n}(A_n) = \partial 0 = 0$. $\square$

Démonstration de (iii). C'est la partie difficile. Soit A_k^+ la k -chaîne composée de tous les k -simplexes de K contenus dans l'"hémisphère" k -dimensionnel H_k^+ introduit dans les conditions sur T , et de même pour A_k^- . Nous posons également $A_k := A_k^+ + A_k^-$.

Pour $k = 1, 2, \dots, n-1$, nous avons

$$\partial A_k^+ = \partial A_k^- = A_{k-1}$$

(voir l'image de la décomposition de S^{n-1} en $H_i^\pm$). Si nous posons $C_k^+ = f_{\#k}(A_k^+)$, et de même pour C_k^- et C_k , nous obtenons ainsi

$$\partial C_k^+ = \partial C_k^- = C_{k-1}.$$

Notre objectif est de prouver que $C_{n-1} \neq 0$. Par l'absurde, supposons $C_{n-1} = C_{n-1}^+ + C_{n-1}^- = 0$. Alors nous obtenons $C_{n-1}^+ = C_{n-1}^-$. Maintenant, l'antipodalité entre en jeu : puisque A_{n-1}^+ est antipodal à A_{n-1}^- , et puisque f est une application antipodale, C_{n-1}^+ est également antipodal à C_{n-1}^- , et puisqu'ils sont également égaux, la chaîne $D_{n-1} := C_{n-1}^+ = C_{n-1}^-$ est antipodalement symétrique. Par conséquent, $C_{n-2} = \partial C_{n-1}^+ = \partial D_{n-1}$ est la frontière d'une chaîne antipodalement symétrique.

C'est une bonne hypothèse d'induction pour aller plus loin. C'est-à-dire supposons pour un certain $k > 0$ que

$$C_k = \partial D_{k+1}$$

pour une chaîne à symétrie antipodale D_{k+1} , et déduisons-en une affirmation similaire pour C_{k-1} .

À cette fin, nous notons que la chaîne à symétrie antipodale D_{k+1} peut être partitionnée en deux chaînes, $D_{k+1} = E_{k+1} + E_{k+1}^{\text{antip}}$, telles que E_{k+1}^{antip} soit antipodale à E_{k+1} (nous divisons les simplexes de D_{k+1} en paires antipodales et séparons chaque paire entre E_{k+1} et E_{k+1}^{antip}). Nous avons donc $C_k = C_k^+ + C_k^- = \partial(E_{k+1} + E_{k+1}^{\text{antip}})$. En réarrangeant, on obtient $C_k^+ + \partial E_{k+1} = C_k^- + E_{k+1}^{\text{antip}}$. Puisque le membre de gauche est antipodal au membre de droite, $D_k := C_k^+ + \partial E_{k+1}$ est une chaîne à symétrie antipodale. L'application de l'opérateur de bord donne

$$\partial D_k = \partial C_k^+ + \partial \partial E_{k+1} = \partial C_k^+ = C_{k-1},$$

et l'étape d'induction est terminée.

En descendant jusqu'à $k = 1$, on constate que C_0 devrait être la frontière d'une 1-chaîne à symétrie antipodale. Or, C_0 est constitué de deux points antipodaux (0-simplexes), tandis que la frontière de toute 1-chaîne à symétrie antipodale est constituée d'un nombre pair de paires antipodales (c'est juste ?). Cette contradiction conclut la démonstration. $\square$

Notes. Nous avons ici essentiellement reproduit la démonstration de Tucker telle que présentée dans Lefschetz⁷. Une autre démonstration du théorème de Borsuk-Ulam basée sur la théorie du degré est esquissée dans la section 6.2.

Le degré d'une application entre sphères (ou, plus généralement, entre variétés) est un concept très utile. Intuitivement, le degré est impair si un point "générique" de l'image de l'application a un nombre impair de préimages. Nous avons défini rigoureusement le degré modulo 2 d'une application simpliciale entre deux triangulations de S^{n-1} . Pour étendre la définition à une application continue arbitraire f , on définit d'abord une application simpliciale $\bar{f}$ homotopique à f (une approximation simpliciale).

Une méthode similaire peut être utilisée pour définir le degré comme un paramètre entier, mais il faut tenir compte de l'orientation des simplexes. Autrement dit, nous considérons S^{n-1} comme

7. S. Lefschetz, *Introduction to topology*, Princeton, 1949.

la frontière de B^n , ce qui définit une orientation de ses $(n-1)$ -simplexes (en gros, tous les $(n-1)$ -simplexes sont orientés “vers l’intérieur”). Pour obtenir le degré de f , nous comptons le nombre des préimages de n’importe quel $(n-1)$ -simplexe σ , où chaque préimage τ telle que $f(\tau)$ a la même orientation que σ est comptée comme $+1$, tandis que les préimages τ telles que $f(\tau)$ est orientée de manière opposée sont comptées comme -1 .

Définir rigoureusement le degré et établir ses propriétés fondamentales (par exemple, l’invariance par homotopie) demande un travail considérable. Si la théorie élémentaire de l’homologie a déjà été abordée, une définition pratique est homologique : puisque le n -ième groupe d’homologie $H_n(S^n, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, l’homomorphisme $f_* : H_n(S^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(S^n, \mathbb{Z})$ induit par f peut être considéré comme un homomorphisme de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, agissant ainsi comme la multiplication par un entier d , et ce d est défini comme le degré de f . Dodson et Parker⁸ démontrent le théorème de Borsuk-Ulam en utilisant cette définition.

Une autre définition du degré, plus universelle, utilise le comptage algébrique des racines x de $f(x) = y$ en un point image “générique” y . L’orientation des préimages est définie à l’aide du signe du jacobien de l’application. Une démonstration du théorème de Borsuk-Ulam utilisant le degré d’une application lisse est esquissée dans la référence de⁹, p. 253].

8. C. T. J. Dodson, P. E. Parker, *User’s Guide to Algebraic Topology*, vol. 387 de Mathematics and its applications, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1997, Sec. 4.3.2.

9. G. Bredon, *Topology and geometry*, Graduate texts in mathematics, 139, Springer-Verlag, Berlin etc. 1993.

1981 : Une preuve constructive du lemme combinatoire de Tucker

Robert M. Freund¹⁰

Michael J. Todd¹¹

Résumé : Le lemme combinatoire de Tucker concerne certains étiquetages des sommets d'une triangulation de la n -boule. Il peut être utilisé comme base pour la preuve des théorèmes des points antipodaux de la même manière que le lemme de Sperner donne le théorème de Brouwer. Nous donnons ici une preuve constructive, qui donne ainsi des algorithmes pour les problèmes de points antipodaux. Notre méthode est basée sur un algorithme de Reiser.

Introduction

Soit B^n la n -boule $\{x \in R^n \mid \|x\| \leq 1\}$, où $\|x\|$ est la l_1 -norme $\sum_i |x_i|$, et soit S^{n-1} sa frontière $\{x \in R^n \mid \|x\| = 1\}$. Nous qualifierons de spéciale une triangulation à symétrie centrale de B^n qui affine la subdivision octaédrique. Le résultat suivant a été démontré pour $n = 2$ dans [9] ; pour le cas général, voir [4, pp. 134-141].

LEMME COMBINATOIRE DE TUCKER. *Attribuons les étiquettes $\{\pm 1, \dots, \pm n\}$ aux sommets d'une triangulation spéciale T de B^n . Si des sommets antipodaux de T sur S^{n-1} reçoivent des étiquettes complémentaires (étiquettes dont la somme est nulle), alors T contient un 1-simplexe complémentaire dont les sommets ont des étiquettes complémentaires.*

Tucker a énoncé son lemme sous une forme différente ; la non-existence d'un tel étiquetage sans 1-simplexe complémentaire a été affirmée. (Dans [4] et un résumé antérieur [10], une assertion positive connexe est donnée ; cependant, nous n'avons pas été en mesure de trouver une preuve constructive de ce lemme). Nous prouvons ci-dessous qu'un 1-simplexe complémentaire existe en concevant un algorithme qui en trouvera un. L'algorithme est basé sur une méthode de Reiser pour le problème de complémentarité non linéaire [6].

Non seulement le lemme de Tucker est énoncé dans [9] en termes de non-existence ; on déduit de ce lemme des théorèmes de points antipodaux par une démonstration par l'absurde. Nous indiquons brièvement ci-dessous comment des preuves constructives de deux théorèmes de points antipodaux

10. Université de Stanford, Stanford, Californie 94305.

Les travaux de cet auteur ont été financés en partie par le contrat DAAG-29-78-G-0026 de l'Army Research Office-Durham, le contrat DE-AS03-76SF00034 du Département de l'Énergie et les subventions MCS-77-05623 et SOC-78-16811 de la National Science Foundation.

11. Université Cornell, Ithaca, New York 14853.

Les travaux de cet auteur ont été financés en partie par la subvention ENG76-08749 de la National Science Foundation.

Article communiqué par les rédacteurs en chef, reçu le 1er août 1979.

découlent de notre algorithme.

THÉORÈME DE BORSUK-ULAM. *Si une fonction continue envoie S^n dans R^n , au moins une paire de points antipodaux est envoyée sur un seul point.*

Preuve : Soit $f : S^n \rightarrow R^n$ la fonction et $g : B^n \rightarrow R^n$ définie par $g(x) = f(x, 1 - \|x\|) - f(-x, \|x\| - 1)$; on remarque que $g(-x) = -g(x)$ pour $x \in S^{n-1}$. Pour toute triangulation spéciale T de B^n , on étiquette le sommet v | i ($-i$) si $|g_i(v)| = \max_j |g_j(v)|$ et $g_i(v)$ est positif (négatif) (si $g(v) = 0$, le processus est terminé). En cas d'égalité, on choisit le plus petit indice. Cet étiquetage satisfait les conditions du lemme et T contient donc un 1-simplexe complémentaire. Soit x^* un point limite quelconque de tels 1-simplexes complémentaires pour une suite de triangulations spéciales dont les maillages tendent vers zéro. Un argument de continuité implique que $g(x^*) = 0$, et donc $(x^*, 1 - \|x^*\|)$ et son antipode sont envoyés par f sur le même point.

Un argument similaire (voir [3]) établit ce qui suit :

THÉORÈME DE LUSTERNIK-SCHNIRELMAN. *Si S^n est recouvert de $n + 1$ ensembles fermés, au moins l'un d'eux contient une paire de points antipodaux.*

Meyerson et Wright [5] et Barany [1] ont également proposé des algorithmes pour le théorème de Borsuk-Ulam. Tous deux utilisent l'étiquetage vectoriel, et leurs algorithmes devraient être plus efficaces pour les problèmes pratiques; cependant, aucune méthode calculatoirement efficace n'est encore connue pour implémenter leurs techniques afin de traiter la possibilité théorique de dégénérescence. Todd et Wright [8] proposent un algorithme d'étiquetage vectoriel complet et implémentable; malheureusement, il est très complexe. Notons que dans un algorithme, il serait préférable d'utiliser la n -boule induite par la l_∞ -norme, $B_\infty^n = \{x \in R^n \mid |x_i| \leq 1 \text{ pour tout } i\}$; plusieurs triangulations spéciales efficaces de B_∞^n existent, par exemple K_1 et J_1 , voir, par exemple, [7, chap. III]. Cohen [2] propose une nouvelle preuve du lemme de Tucker qui est inductive et semi-constructive.

Preuve du lemme combinatoire de Tucker

Nous avons d'abord besoin de quelques notations. Nous notons par $\text{sgn}(1)$ le signe $(0, +1 \text{ ou } -1)$ de tout nombre réel λ ; de même, pour un vecteur $x = (x_i) \in R^n$, $\text{sgn}(x)$ est le vecteur $(\text{sgn}(x_i))$. Pour tout vecteur signe $s \in R^n$ (c'est-à-dire, tout vecteur dont chaque composante s_i vaut $0, +1$ ou -1), $C(s)$ désigne la fermeture de $\{x \in R^n \mid \text{sgn}(x) = s\}$, c'est-à-dire l'ensemble des x pour lesquels x_i est non négatif, nul ou non positif selon que s_i vaut $1, 0$ ou -1 , pour chaque i . On appelle $C(s)$ un orthant; il s'agit en fait d'un orthant d'un sous-espace de coordonnées. Toute triangulation T particulière induit des triangulations de $C(s) \cap B^n$ pour chaque s . Soit σ un simplexe de T ; alors $\text{sgn}(x)$ est le même pour tout x dans l'intérieur relatif de σ ; on dénote par $\text{sgn}(\sigma)$ ce vecteur signe. Clairement, $C(\text{sgn}(\sigma))$ est le plus petit orthant contenant σ . Puisque T est symétrique au centre, tout simplexe σ vivant dans S^{n-1} a un simplexe antipodal $-\sigma = \{-x \mid x \in \sigma\}$.

DÉFINITION. Pour tout vecteur signe s , un simplexe $\sigma \in T$ est s -étiqueté si, chaque fois que s_i est non nul, $s_i \cdot i$ est une étiquette d'un certain sommet de σ . Si σ est $\text{sgn}(\sigma)$ -étiqueté, on dit que σ est complètement étiqueté.

Notons que le 0-simplexe $\{0\}$ est toujours complètement étiqueté par défaut puisque son vecteur signe est nul. De plus, si $\sigma \subseteq S^{n-1}$ est complètement étiqueté, son simplexe antipodal l'est aussi.

L'algorithme procède en traçant un chemin dans un graphe G dont les nœuds sont des simplexes complètement étiquetés jusqu'à ce qu'il trouve un 1-simplexe complémentaire. Le graphe est donné par ce qui suit :

DÉFINITION. Deux simplexes complètement étiquetés σ et τ sont adjacents dans G s'ils sont tous deux dans S^{n-1} et sont antipodaux, ou si l'un est une face de l'autre et $\sigma \cap \tau$ est $\text{sgn}(\sigma \cup \tau)$ -étiqueté. Le degré d'un simplexe complètement étiqueté est le nombre de simplexes complètement étiquetés qui lui sont adjacents dans G .

PROPOSITION.

- (a) Le 0-simplexe $\{0\}$ est de degré 1 ;
- (b) chaque simplexe complètement étiqueté contenant un 1-simplexe complémentaire est de degré 1 ;
- (c) tout autre simplexe complètement étiqueté est de degré 2.

Démonstration. Soit s le vecteur signe du simplexe complètement étiqueté σ et supposons que s ait k composantes non nulles. Alors σ appartient à l'orthant k -dimensionnel $C(s)$. De plus, les sommets de σ doivent contenir au moins k étiquettes distinctes, puisque σ est s -étiqueté. Par conséquent, σ est un $(k-1)$ -simplexe ou un k -simplexe.

Supposons d'abord que σ est un $(k-1)$ -simplexe. Si σ ne se trouve pas dans S^{n-1} , c'est une face de précisément deux k -simplexes dans $C(s)$, tous deux complètement étiquetés puisque σ l'est. Si σ se trouve dans S^{n-1} , c'est une face d'un k -simplexe complètement étiqueté dans $C(s)$, et son antipode est complètement étiqueté. Dans les deux cas, σ est de type (c) et de degré 2.

Supposons maintenant que σ soit un k -simplexe. Il possède alors $k+1$ sommets, avec une étiquette supplémentaire en plus des k qu'il est obligé d'avoir par complétude. Cette autre étiquette est soit un doublon de l'un des k , soit le complément de l'un des k , soit $\pm j$ avec $s_j = 0$. Dans le premier cas, σ a deux faces avec toutes les k étiquettes et les deux sont complètement étiquetées ; σ est de type (c) et de degré 2. Dans le deuxième cas, σ n'a qu'une seule face avec les k étiquettes requises ; σ est de type (b) et de degré 1. Dans le dernier cas, supposons que l'étiquette supplémentaire soit $+j$ ($-j$) et soit t un vecteur signe concordant avec s sauf que $t_j = +1$ (-1). Alors σ est une face d'un unique $(k+1)$ -simplexe dans $C(t)$ et ce simplexe est complètement étiqueté. De plus, σ possède une face avec les k étiquettes requises ; la seule exception est lorsque σ est le 0-simplexe $\{0\}$. Par conséquent, σ est soit $\{0\}$ et de degré 1, soit de type (c) et de degré 2. La proposition est maintenant démontrée.

Le lemme combinatoire découle directement de la proposition, puisque tout graphe possède un nombre pair de nœuds de degré impair. En effet, nous avons un résultat plus fort : il existe un nombre impair de simplexes complètement étiquetés contenant un 1-simplexe complémentaire. Cependant, puisque certains 1-simplexes complémentaires ne sont contenus dans aucun simplexe complètement étiqueté et d'autres dans plusieurs, nous ne pouvons rien dire de la parité des 1-simplexes

complémentaires.

Plus qu'une simple démonstration, nous avons maintenant un algorithme : suivre un chemin de simplexes complètement étiquetés adjacents à partir du 0-simplexe $\{0\}$. D'après la proposition, le chemin ne peut se terminer que lorsqu'il rencontre un 1-simplexe complémentaire. Pour un énoncé explicite de l'algorithme, voir Freund et Todd [3].¹²

L'algorithme

La figure 1 illustre les simplexes complètement étiquetés et l'adjacence pour $n = 2$.

Algorithme

Étape 0 (Initialisation). Définir $s = v = 0 \in R^n, \sigma = \{v\}$. Aller à l'étape 1.

Étape 1 (Étiquetage). Trouver l'étiquette ε_i de v , $\varepsilon = \pm 1$, $1 \leq i \leq n$. Si c'est le complémentaire de l'étiquette d'un autre sommet de σ , arrêter. Si $s_i = 0$, aller à l'étape 2, sinon à l'étape 3.

Étape 2 (Augmentation de la dimension). Définir $s_i = \varepsilon$. Soit τ le simplexe de $C(s)$ avec σ comme face, et v son nouveau sommet. Définir $\sigma \leftarrow \tau$ et aller à l'étape 1.

Étape 3 (Suppression d'un sommet). Trouver le sommet $w \neq v$ de σ avec l'étiquette ε_i . Soit τ la face de l'opposé w de σ . Si τ se trouve dans S^{n-1} , définir $\sigma \leftarrow -\sigma$, $s \leftarrow -s$, $v \leftarrow -w$ et aller à l'étape 1. Si $\text{sgn}(\tau) = s$, soit ρ le simplexe dans $C(s)$ avec τ comme face distincte de σ et soit v son nouveau sommet ; définir $\sigma \leftarrow \rho$ et aller à l'étape 1. Sinon, aller à l'étape 4.

Étape 4 (Diminution de la dimension). Trouver i avec $(\text{sgn}(\tau))_i = 0$ et $s_i \neq 0$. Définir $\sigma \leftarrow \tau$, $\varepsilon \leftarrow s_i$, $s \leftarrow \text{sgn}(\tau)$, $v \leftarrow w$ et aller à l'étape 3.

Sous cette forme, l'algorithme génère $\rho_0, \tau_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_6, \sigma_9, \sigma_{11}, \sigma_{12}$ et τ_{14} comme σ successifs dans la figure 1.

Notons que la seule exigence concernant l'étiquetage est que les sommets antipodaux de S^{n-1} aient des étiquettes complémentaires ; la structure de coordonnées de B^n est sans importance. Par conséquent, les étiquettes peuvent être permutées de sorte que les étiquettes complémentaires restent complémentaires et l'algorithme exécuté à nouveau. Il s'agit d'une méthode possible pour obtenir plusieurs 1-simplexes complémentaires, mais il n'est évidemment pas garanti d'en trouver plus d'un. Dans la figure 1, si nous échangeons les étiquettes 1 et -2 , -1 et 2, alors le simplexe complètement étiqueté $\hat{\sigma}$ contenant le 1-simplexe complémentaire $\hat{\tau}$ est généré.

12. Note de la traductrice : Nous traduisons et l'incluons ci-après l'algorithme en question fourni dans une autre référence très similaire à la présente de Freund et Todd.

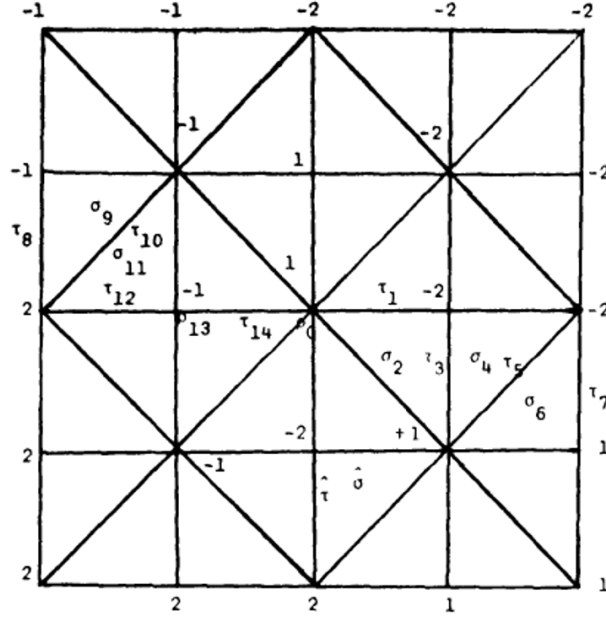


FIGURE 1

Tous les simplexes marqués sont entièrement étiquetés. Les σ sont des 2-simplexes, les τ des 1-simplexes et les ρ des 0-simplexes. τ_{14} et $\hat{\tau}$ sont complémentaires. Tous les simplexes d'indices consécutifs sont adjacents. Puisque $\hat{\tau}$ n'est pas étiqueté $(1, -1)$, $\hat{\sigma}$ et $\hat{\tau}$ ne sont pas adjacents.

Références

1. Barany, Théorème de Borsuk par pivotage complémentaire, Math. Programming 18 (1980), 84-88.
2. D. I. A. Cohen, Sur les lemmes de points antipodaux combinatoires, J. Combin. Theory Ser. B 27 (1979), 87-91.
3. R. M. Freund, M. J. Todd, "Une preuve constructive du lemme combinatoire de Tucker", Rapport technique n° 403, École de recherche opérationnelle et de génie industriel, Faculté d'ingénierie, Université Cornell, Ithaca, N.Y.
4. S. Lefschetz, "Introduction à la topologie", Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1949.
5. M. Meyerson, A. Wright, Une nouvelle preuve constructive du théorème de Borsuk-Ulam, Amer. Math. Soc. 73 (1979), 134-136.
6. P. M. Reiser, "Un étiquetage entier modifié pour les algorithmes de complémentarité", Manuscrit, Université de Zurich, 1978.
7. M. J. Todd, "Le calcul des points fixes et ses applications", Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1976.
8. M. J. Todd, A. H. Wright, Un algorithme simplicial de dimension variable pour les théorèmes de point fixe antipodaux, Num. Funct. Anal. Optim., sous presse.
9. A. W. Tucker, Some topological properties of disk and sphere, in "Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress (Montreal, 1945)," pp. 285-309.

10. A. W. Tucker, Antipodal-point theorems proved by an elementary lemma, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), 681.
-

1952 : Une généralisation du lemme combinatoire de Tucker avec applications topologiques

Ky Fan

(Reçu le 1er octobre 1951)

A. W. Tucker [2] (Voir aussi Lefschetz, [1], pp. 134-141) a découvert un lemme combinatoire très intéressant. Grâce à son utilisation, il a donné des preuves élémentaires et élégantes de diverses propriétés topologiques bien connues de la n -sphère, telles que le théorème du point antipodal de Borsuk-Ulam, celui de Lusternik-Schnirelmann et bien d'autres. Le but de cet article est de présenter une généralisation du lemme combinatoire de Tucker, ainsi que deux nouveaux théorèmes du point antipodal généralisant les théorèmes de Borsuk-Ulam et de Lusternik-Schnirelmann.

1. Lemme combinatoire

Soit $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ les coordonnées d'un espace euclidien à n dimensions E^n . Nous noterons par D^n le n -disque, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ de E^n tels que $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq 1$. Par S^n nous noterons la n -sphère de E^{n+1} , c'est-à-dire l'ensemble de tous les points $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1})$ de E^{n+1} satisfaisant $\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i^2 = 1$. Par subdivision octaédrique de D^n (ou de S^{n-1}), nous entendons la subdivision de D^n en 2^n n -simplexes (ou la subdivision de S^{n-1} en 2^n $(n-1)$ -simplexes) au moyen des n hyperplans de coordonnées de E^n .

Nous présentons le lemme combinatoire sous deux formes différentes, dont on voit aisément qu'elles sont équivalentes. Bien que la seconde forme soit certainement une meilleure formulation, la première forme est plus adaptable à notre démonstration.

LEMME COMBINATOIRE POUR LE n -DISQUE. Soit K une subdivision barycentrique dérivée¹³ de la subdivision octaédrique du n -disque D^n . Soit m un entier positif fixé, indépendant de n . À chaque sommet de K , soit l'un des $2m$ nombres $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$ attribué de telle sorte que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- (i) Les nombres attribués à deux sommets antipodaux quelconques de K situés sur la frontière S^{n-1} de D^n ont une somme nulle.
- (ii) Pour tout 1-simplexe dans K , les nombres attribués à ses deux sommets ont une somme non nulle.

Soit $\alpha(j_1, j_2, \dots, j_{n+1})$ le nombre total de ces n -simplexes dans K , dont les $n+1$ sommets

Ce travail a été soutenu en partie par le Bureau de la recherche navale.

13. "Dérivé barycentrique" signifie "dérivé par l'application successive d'un nombre fini de subdivisions barycentriques".

reçoivent les nombres $j_1, j_2, \dots, j_{n+1}$ ¹⁴. Alors

$$\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{n+1} \leq m} \{\alpha(k_1, -k_2, k_3, -k_4, \dots, (-1)^n k_{n+1}) + \alpha(-k_1, k_2, -k_3, k_4, \dots, (-1)^{n+1} k_{n+1})\} \equiv 1 \pmod{2}. \quad (1)$$

En particulier, m est nécessairement $\geq n + 1$.

Démonstration. Considérons d'abord le cas $n = 1$. Soient p_1 et p_2 les deux extrémités du segment D^1 . Nous utiliserons les notations suivantes dans la démonstration de ce cas $n = 1$:

- $\gamma(j) = 1$ ou 0 , selon que le sommet p_1 a ou non le numéro j .
- $\delta(j) =$ le nombre de sommets de K différents de p_1 et p_2 et recevant le numéro j .

Soit k_1 un entier positif fixé $\leq m$. Considérons le nombre d'incidences sommet-segment dans K impliquant des sommets d'étiquette k_1 . En comptant ce nombre d'incidences de deux manières différentes, nous obtenons

$$\gamma(k_1) + \gamma(-k_1) + 2\delta(k_1) = 2\alpha(k_1, k_1) + \sum_{0 < k_2 \neq k_1} [\alpha(k_1, k_2) + \alpha(k_1, -k_2)]$$

et donc

$$\gamma(k_1) + \gamma(-k_1) \equiv \sum_{0 < k_2 \neq k_1} [\alpha(k_1, k_2) + \alpha(k_1, -k_2)] \pmod{2}.$$

Puisque $\sum_{k_1=1}^m [\gamma(k_1) + \gamma(-k_1)] = 1$, on a alors

$$\sum_{1 \leq k_1 \leq m} \sum_{0 < k_2 \neq k_1} \alpha(k_1, -k_2) \equiv 1 \pmod{2},$$

Mais, de façon évidente,

$$\sum_{1 \leq k_1 \leq m} \sum_{0 < k_2 \neq k_1} \alpha(k_1, k_2) \equiv 0 \pmod{2},$$

on a donc

$$\sum_{1 \leq k_1 \leq m} \sum_{0 < k_2 \neq k_1} \alpha(k_1, -k_2) \equiv 1 \pmod{2},$$

ce qui peut s'écrire

$$\sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq m} [\alpha(k_1, -k_2) + \alpha(-k_1, k_2)] \equiv 1 \pmod{2},$$

Ainsi, notre lemme dans le cas $n = 1$ est démontré.

14. Les simplexes ne sont pas orientés, et les nombres $j_1, j_2, \dots, j_{n+1}$ dans le symbole $\alpha(j_1, j_2, \dots, j_{n+1})$ ne sont pas ordonnés.

Nous procédons maintenant par récurrence sur n . En supposant que le lemme est vrai pour D^{n-1} , nous allons montrer qu'il est également valable pour D^n . À cette fin, nous utilisons maintenant les notations suivantes :

$$S_+^{n-1} = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in E^n \mid \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1, \xi_n \geq 0\}.$$

$\gamma(j_1, j_2, \dots, j_n)$ = le nombre de ces $(n-1)$ -simplexes de K qui sont contenus dans S_+^{n-1} et dont les n sommets reçoivent les nombres $j_1, j_2, \dots, j_n$.

$\delta(j_1, j_2, \dots, j_n)$ = le nombre de ces $(n-1)$ -simplexes de K qui ne sont pas entièrement contenus dans la frontière S_+^{n-1} de D^n et dont les n sommets reçoivent les nombres $j_1, j_2, \dots, j_n$.

Considérons la partie S_+^{n-1} de D^n , et la subdivision de S_+^{n-1} induite par K , ainsi que l'étiquetage des sommets de S_+^{n-1} par les $2m$ nombres. Comme notre lemme est supposé vrai pour les $(n-1)$ -disques, nous pouvons l'appliquer au $(n-1)$ -disque S_+^{n-1} . En particulier, nous en déduisons que $m \geq n$ (voir note ¹⁵).

Soient $k_1, k_2, \dots, k_n$ n'importe quels n entiers fixés tels que $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq m$. Considérons le nombre d'incidences d'un n -simplexe dans K avec un $(n-1)$ -simplexe tel que le $(n-1)$ -simplexe impliqué ait ses n sommets étiquetés $k_1, -k_2, k_3, -k_4, \dots, (-1)^{n-1}k_n$. En comptant ce nombre d'incidences de deux manières différentes, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \gamma(k_1, -k_2, k_3, \dots, (-1)^{n-1}k_n) + \gamma(-k_1, k_2, -k_3, \dots, (-1)^n k_n) + 2\delta(k_1, -k_2, k_3, \dots, (-1)^{n-1}k_n) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \alpha(k_1, -k_2, k_3, \dots, (-1)^{n-1}k_n, (-1)^{i-1}k_i) + \sum_{h \neq \pm k_1, \dots, \pm k_n} \alpha(k_1, -k_2, k_3, \dots, (-1)^{n-1}k_n, h) \end{aligned}$$

et donc ¹⁶

$$\begin{aligned} & \gamma(k_1, -k_2, k_3, \dots, (-1)^{n-1}k_n) + \gamma(-k_1, k_2, -k_3, \dots, (-1)^n k_n) \\ & \equiv \sum_{h \neq \pm k_1, \dots, \pm k_n} \alpha(k_1, -k_2, k_3, \dots, (-1)^{n-1}k_n, h) \pmod{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

En sommant (2) sur tous les n -uplets $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ satisfaisant $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq m$, et en appliquant à nouveau notre hypothèse de récurrence à S_+^{n-1} , nous obtenons

$$\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} \sum_{h \neq \pm k_1, \dots, \pm k_n} \alpha(k_1, -k_2, k_3, \dots, (-1)^{n-1}k_n, h) \equiv 1 \pmod{2}. \quad (3)$$

Pour abréger notre écriture, posons

$$\Omega_1 = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} \sum_{\substack{j \neq k_1, \dots, k_n \\ j > 0}} \alpha(k_1, -k_2, k_3, \dots, (-1)^{n-1}k_n, (-1)^n j). \quad (4)$$

¹⁵. Plus tard, à l'étape (3), nous verrons que $m \geq n + 1$.

¹⁶. Comme toutes les congruences considérées sont par rapport au modulo 2, nous omettrons souvent "(mod 2)" après les congruences.

et

$$\Omega_2 = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} \sum_{\substack{j \neq k_1, \dots, k_n \\ j > 0}} \alpha(k_1, -k_2, k_3, \dots, (-1)^{n-1} k_n, (-1)^{n-1} j). \quad (5)$$

de sorte que (3) devienne

$$\Omega_1 + \Omega_2 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Poursuivons notre discussion en deux cas distincts selon la parité de n .

Le cas de n impair : Dans ce cas, nous écrivons

$$\begin{aligned} \Omega_1 = & \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} \sum_{\substack{1 \leq j < k_1 \\ \text{ou } j > k_n}} \alpha(k_1, -k_2, k_3, \dots, k_n, -j) \\ & + \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} \sum_{\substack{k_{2i-1} < j < k_{2i+1} \\ j \neq k_{2i}}} \alpha(k_1, -k_2, k_3, \dots, k_n, -j). \end{aligned}$$

Maintenant, pour chaque i fixé ($1 \leq i \leq \frac{1}{2}(n-1)$), on a

$$\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} \sum_{\substack{k_{2i-1} < j < k_{2i+1} \\ j \neq k_{2i}}} \alpha(k_1, -k_2, k_3, \dots, k_n, -j) \equiv 0 \pmod{2}.$$

En fait, chaque terme $\alpha(k_1, \dots, k_{2i-1}, -k_{2i}, k_{2i+1}, \dots, k_n, -j)$ de la dernière somme double est dupliqué de manière biunivoque par le terme $\alpha(k_1, \dots, k_{2i-1}, -j, k_{2i+1}, \dots, k_n, -k_{2i})$, qui apparaît dans la même somme double. Par conséquent,

$$\Omega_1 \equiv \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} \sum_{\substack{1 \leq j < k_1 \\ \text{ou } j > k_n}} \alpha(k_1, -k_2, k_3, \dots, k_n, -j). \quad (6)$$

Ensuite, si nous écrivons

$$\begin{aligned} \Omega_2 = & \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} \sum_{\substack{1 \leq j < k_2 \\ j \neq k_1}} \alpha(k_1, -k_2, k_3, \dots, k_n, j) \\ & + \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} \sum_{\substack{j > k_{n-1} \\ j \neq k_n}} \alpha(k_1, -k_2, k_3, \dots, k_n, j) \\ & + \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-3)} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} \sum_{\substack{k_{2i} < j < k_{2i+2} \\ j \neq k_{2i+1}}} \alpha(k_1, -k_2, k_3, \dots, k_n, j) \end{aligned}$$

alors nous constatons que chacune de ces $\frac{1}{2}(n+1)$ sommes doubles est $\equiv 0 \pmod{2}$. Par conséquent,

$$\Omega_2 \equiv 0 \pmod{2}. \quad (7)$$

Enfin, en observant que le membre de gauche de (1) est identique au membre de droite de (7), (1) est obtenu en combinant (6), (7), (8).

Cas de n pair : Par un raisonnement similaire à celui utilisé dans le cas de n impair, on peut prouver que pour n pair :

$$\Omega_1 = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} \sum_{j > k_n} \alpha(k_1, -k_2, k_3, \dots, -k_n, j) \quad (8)$$

et

$$\Omega_2 = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} \sum_{1 \leq j < k_1} \alpha(k_1, -k_2, k_3, \dots, -k_n, -j) \quad (9)$$

À partir de (6), (9) et (10), nous obtenons à nouveau la congruence souhaitée (1).

La démonstration de notre lemme est ainsi complète.

Dans le lemme ci-dessus, m est indépendant de n dans l'hypothèse, et l'inégalité $m \geq n+1$ est démontrée comme conséquence des conditions (i) et (ii). Si seulement $2n$ nombres $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ sont utilisés pour étiqueter les sommets de K de telle sorte que (i) soit satisfaite, alors, selon le lemme ci-dessus, (ii) ne peut pas être satisfaite. C'est le contenu du lemme combinatoire de Tucker tel que publié dans [2], p. 303.

Il est clair que le lemme qui vient d'être établi peut être énoncé sous la forme suivante :

LEMME COMBINATOIRE POUR LA n -SPHÈRE. *Soit K une subdivision barycentrique dérivée de la subdivision octaédrique de la n -sphère S^n . Soit m un entier positif fixé, indépendant de n . À chaque sommet de K , soit l'un des $2m$ nombres $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$ attribué de telle sorte que les deux conditions suivantes soient satisfaites :*

- (i) *La somme des nombres attribués à deux sommets antipodaux quelconques de K est nulle.*
- (ii) *Pour tout 1-simplexe de K , la somme des nombres attribués à ses deux sommets est non nulle.*

Soit $\beta(j_1, j_2, \dots, j_{n+1})$ le nombre total de n -simplexes dans K dont les $n+1$ sommets reçoivent les nombres $j_1, j_2, \dots, j_{n+1}$. Alors

$$\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_{n+1} \leq m} \beta(k_1, -k_2, k_3, -k_4, \dots, (-1)^n k_{n+1}) \equiv 1 \pmod{2}. \quad (10)$$

Dans le cas particulier où $m = n+1$, ce lemme pour S^n se réduit au lemme de Tucker tel que formulé dans [1], p. 135. *En particulier, m est nécessairement $\geq n+1$.*

2. Théorèmes de point antipodal

En tant qu'applications du lemme combinatoire ci-dessus, nous allons établir deux nouveaux théorèmes de point antipodal pour la n -sphère.

THÉORÈME 1. *Soient n et m deux entiers positifs quelconques. Soient F_i ($i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$) certains $2m$ sous-ensembles fermés de la n -sphère S^n satisfaisant les deux conditions suivantes :*

- (a) *Pour n'importe quels deux points antipodaux quelconques $p, -p$ de S^n , il existe au moins un indice i parmi les $2m$ indices $1, 2, \dots, m$ tels que $p \in F_i, -p \in F_{-i}$.*
- (b) *$p_i \neq F_i$ pour chaque $i \geq 1, 2, \dots, m$.*

Alors il existe $n + 1$ indices $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$ tels que $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{n+1} \leq m$ et

$$F_{k_1} \cap F_{-k_2} \cap F_{k_3} \cap F_{-k_4} \cap \dots \cap F_{(-1)^n k_{n+1}} \neq \emptyset. \quad (11)$$

En particulier, m est nécessairement $\geq n + 1$.

Démonstration. Pour chaque $i = 1, 2, \dots, m$, soit d_i la distance entre F_i et F_{-i} . Soit d_0 le nombre de Lebesgue du système $\mathcal{F} = \{F_1, F_{-1}, \dots, F_m, F_{-m}\}$. Choisir une subdivision barycentrique K dérivée de la subdivision octaédrique de S^n telle que le maillage de K soit inférieur à $\min(d_0, d_1, d_2, \dots, d_m)$.

Nous attribuons à chaque sommet p de K un nombre $\pi(p)$ qui est l'un des $2m$ nombres $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$ et qui satisfait les deux conditions suivantes :

- (a') Pour deux sommets antipodaux quelconques $p, -p$ de K , nous avons $\pi(p) + \pi(-p) = 0$.
- (a'') $p \in F_{\pi(p)}$ pour chaque sommet p de K .

L'existence d'une telle fonction π est assurée par l'hypothèse (a). (a') est précisément la condition (i) de notre lemme combinatoire pour S^n . De (a'') et du fait que le maillage de K est inférieur à chaque d_i , nous voyons que la condition (ii) de ce lemme combinatoire est également satisfaite. Par conséquent, d'après le même lemme, il existe un n -simplexe $p_1 p_2 \dots p_{n+1}$ dans K et $n + 1$ entiers $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$ tels que $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{n+1} \leq m$ et $\pi(p_1) = k_1, \pi(p_2) = -k_2, \pi(p_3) = k_3, \dots, \pi(p_{n+1}) = (-1)^n k_{n+1}$. En vertu de (a''), il s'ensuit que le n -simplexe $p_1 p_2 \dots p_{n+1}$ a un sommet dans chacun des ensembles $F_{k_1}, F_{-k_2}, F_{k_3}, \dots, F_{(-1)^n k_{n+1}}$. Par conséquent, l'intersection de ces $n + 1$ ensembles n'est pas vide, puisque le maillage de K est moindre que le nombre de Lebesgue de $\mathcal{F} = \{F_1, F_{-1}, \dots, F_m, F_{-m}\}$.

L'hypothèse du théorème 1 reste la même si nous échangeons les deux ensembles d'une paire quelconque F_i, F_{-i} . Par conséquent, si nous supposons $m = n + 1$ dans le théorème 1, alors nous pouvons conclure que chacune des 2^{n+1} intersections $F_{\pm 1} \cap F_{\pm 2} \cap \dots \cap F_{\pm(n+1)}$ est non vide.

COROLLAIRE 1. *Soient $f_1, f_2, \dots, f_m$ n'importe quelles m fonctions continues à valeurs réelles sur S^n telles que*

$$f_i(-p) = -f_i(p) \quad \text{pour tout } p \in S^n \text{ et } 1 \leq i \leq m.$$

Si $f_1, f_2, \dots, f_m$ n'ont pas de zéro commun sur S^n , alors il existe $n + 1$ indices $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$ et un point $p_0 \in S^n$ tels que $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{n+1} \leq m$ et

$$f_{k_i}(p_0) = (-1)^{i+1} \max_{1 \leq j \leq m} |f_j(p_0)| \quad (1 \leq i \leq n+1).$$

En particulier, m est nécessairement $\geq n + 1$.

Démonstration. Pour chaque $i = 1, 2, \dots, m$, soit

$$F_i = \{p \in S^n \mid f_i(p) = \max_{1 \leq j \leq m} |f_j(p)|\},$$

$$F_{-i} = \{p \in S^n \mid -f_i(p) = \max_{1 \leq j \leq m} |f_j(p)|\}$$

Alors le corollaire 1 découle immédiatement de l'application du théorème 1 à ces $2m$ ensembles fermés.

Soient $g_1, g_2, \dots, g_m$ n'importe quelles m fonctions continues à valeurs réelles sur S^n telles qu'aucun point $p \in S^n$ ne satisfasse simultanément les m équations $g_i(p) = g_i(-p)$, ($1 \leq i \leq m$). Si l'on définit f_i par $f_i(p) = g_i(p) - g_i(-p)$, alors le corollaire 1 est applicable aux m fonctions $f_1, f_2, \dots, f_m$ et la conclusion partielle $m \geq n + 1$ donne le célèbre théorème de Borsuk-Ulam (voir [1], p. 139).

Pour son application dans la démonstration du théorème 2, nous énonçons ici le :

Corollaire 2. Soient n et m deux entiers positifs quelconques. Soient A_i ($i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$) certains $2m$ ensembles fermés recouvrant le n -disque D^n et satisfaisant les deux conditions suivantes :

- (a) Pour deux points antipodaux quelconques p et $-p$ sur la frontière S^{n-1} de D^n , il existe un indice i parmi les $2m$ indices $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$ tels que $p \in A_i$ et $-p \in A_{-i}$.
- (b) $A_i \cap A_{-i} = \emptyset$ pour chaque $i = 1, 2, \dots, m$.

Alors il existe $n + 1$ indices $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{n+1} \leq m$ tels qu'au moins une des deux intersections

$$A_{k_1} \cap A_{-k_2} \cap A_{k_3} \cap \dots \cap A_{(-1)^n k_{n+1}}$$

et

$$A_{-k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{-k_3} \cap \dots \cap A_{(-1)^{n+1} k_{n+1}}$$

est non vide.

Ce corollaire 2 est une conséquence immédiate du théorème 1. Il peut également être déduit du lemme combinatoire pour le n -disque.

Théorème 2. Soient n et m deux entiers positifs quelconques. Si m sous-ensembles fermés $F_1, F_2, \dots, F_m$ de la n -sphère S^n recouvrent S^n et si aucun d'eux ne contient une paire de points antipodaux, alors il existe $n + 2$ indices $k_1, k_2, \dots, k_{n+2}$ tels que $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{n+2} \leq m$ et

$$F_{k_1} \cap -F_{k_2} \cap F_{k_3} \cap \dots \cap (-1)^{n+1} F_{k_{n+2}} \neq \emptyset, \quad (12)$$

où $-F_i$ désigne l'ensemble antipodal de F_i . En particulier, m est nécessairement $\geq n + 2$.

Démonstration. Considérons le $(n+1)$ -disque D^{n+1} , dont S^n est la frontière.

Pour chaque $i = 1, 2, \dots, m$, soit A_i l'union de tous les segments reliant l'origine à un point de F_i , et soit $A_{-i} = -F_i$. Alors, en appliquant le corollaire 2 au $(n+1)$ -disque D^{n+1} avec les $2m$ ensembles fermés $A_{\pm i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), il existe $n + 2$ indices $1 \leq k_1 < k_2 < \dots \leq m$, pour lesquels soit

$$A_{k_1} \cap A_{-k_2} \cap A_{k_3} \cap \dots \cap A_{(-1)^{n+1}k_{n+2}} \neq \emptyset,$$

soit

$$A_{-k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{-k_3} \cap \dots \cap A_{(-1)^nk_{n+2}} \neq \emptyset.$$

Comme $A_{-i} = -F_i \subset S^n$ ($1 \leq i \leq m$), l'une ou l'autre de ces deux relations implique (13).

La conclusion partielle $m \geq n + 2$ du théorème 2 donne le théorème classique de Lusternik-Schnirelmann (voir [1], p. 138).

L'hypothèse du théorème 2 est indépendante de l'ordre dans lequel les m ensembles $F_1, F_2, \dots, F_m$ sont disposés. Par conséquent, si $m = n + 2$ dans le théorème 2, alors tout ensemble $\left[\frac{1}{2}(n + 3)\right]$ parmi les $n + 2$ a en commun au moins un point dont l'antipode est commun aux $\left[\frac{1}{2}(n + 2)\right]$ ensembles restants¹⁷. Il s'agit d'un résultat connu dû à Tucker ([2], p. 298-299).

UNIVERSITÉ DE NOTRE-DAME

Références

- [1] S. Lefschetz, Introduction à la topologie, Princeton, 1949.
- [2] A. W. Tucker, Quelques propriétés topologiques du disque et de la sphère, Actes du premier Congrès mathématique canadien (Montréal, 1945), p. 285-309.

17. Comme d'habitude, $\left[\frac{1}{2}(n + 3)\right]$ désigne le plus grand entier $\leq \frac{1}{2}(n + 3)$.

1944 : Résumé du théorème de Tucker, Bulletin de l'AMS, Vol. 50, Numéro 9, septembre 1944.

259. A. W. Tucker : *Théorèmes des points antipodaux démontrés par un lemme élémentaire.*

Soit K le n -simplexe simplicial régulier déterminé dans le $n+1$ -espace euclidien par $\sum |x_a| = 1$, avec $a = 1, 2, \dots, n+1$, et soit K' une subdivision simpliciale quelconque de K possédant une symétrie centrale. Alors, si K' est transformé simplicialement en K de sorte que les sommets antipodaux soient transformés en sommets antipodaux, chaque n -simplexe de K est l'image d'un nombre impair de n -simplexes de K' . Ce lemme peut être démontré par des moyens élémentaires. Il implique les théorèmes des points antipodaux suivants, qui impliquent et sont impliqués par les théorèmes des points antipodaux de Lusternik-Schnirelmann et Borsuk-Ulam (Alexandroff-Hopf, Topologie, pp. 487, 486).

1. Si les vecteurs non nuls du $n+1$ -espace euclidien sont distribués continûment sur un disque à $n+1$ dimensions ($\sum x_a^2 \leq 1$), il existe une paire de points antipodaux dont les vecteurs sont parallèles.
2. Le nerf d'un revêtement d'une sphère à n dimensions ($\sum x_a^2 = 1$) par $n+1$ paires d'ensembles fermés disjoints, dont aucun ne contient deux points antipodaux, est la jointure de $n+1$ paires de sommets (notée K ci-dessus).
3. Un revêtement d'un disque à n dimensions ($\sum x_i^2 \leq 1$, avec $i = 1, 2, \dots, n$) par $n+1$ ensembles fermés, dont aucun ne contient deux points antipodaux, est d'ordre $n+1$.
4. Si une $n-1$ -sphère ($\sum x_i^2 = 1$) est recouverte par $n+1$ ensembles fermés, dont aucun ne contient deux points antipodaux, l'intersection de n'importe quels p ($\leq n$) ensembles contient un point dont l'antipode appartient à l'intersection des $n-p+1$ ensembles restants. (Reçu le 5 juillet 1944).