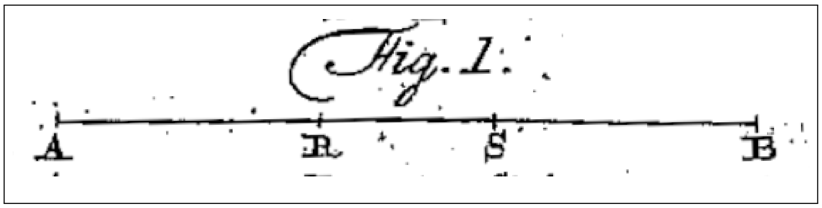
.

Trouvé dans *How Euler did even more* de C. Edward Sandifer [1] :
Un lemme d'Euler (pour un problème oublié de Fermat)

Lemme. *Si la droite AB est coupée de quelque manière que ce soit en deux points (Fig. 1), R et S, l'aire du rectangle ayant un côté de longueur AB et un côté de longueur RS, ajoutée à l'aire d'un rectangle ayant un côté de longueur AR et un côté de longueur BS est égale à l'aire d'un rectangle dont les côtés sont de longueurs respectives AS et BR* :

$$AB.RS + AR.BS = AS.BR.$$



Preuve :

$$AB = AS + BS$$

Multiplions par RS :

$$AB.RS = AS.RS + BS.RS$$

Ajoutons

$$\begin{array}{ccccc} AB.RS & = & AS.RS & + & BS.RS \\ AR.BS & = & & & AR.BS \\ \hline AB.RS + AR.BS & = & AS.RS & + & BS.RS + AR.BS \end{array}$$

ce qui est égal à : BS.RS + AR.BS = BS(RS + AR) = BS.AS.

De façon similaire,

$$AS.RS + BS.AS = AS(RS + BS) = AS.BR.$$

Par conséquent, on a

$$AB.RS + AR.BS = AS.BR$$

Q.E.D.

Scholion (seconde preuve) : Faisons une copie du segment $ARSB$ qu'on appelle $arsB$. Utilisons ce second segment pour former le carré $ABab$ visible sur la figure 2.

Ce lemme peut également être démontré de la manière suivante à l'aide d'une figure géométrique uniquement. Sur la droite AB donnée, divisée quelconquement aux points R et S, soit le carré $ABab$ construit et le côté Ba coupé de manière analogue aux points r et s de sorte que

$$Bs = BS, \qquad sr = SR \qquad \text{et} \qquad ar = AR.$$

Ensuite, si les droites Rh, Sg, sc et rd sont tracées parallèlement aux côtés du carré, les segments Ss et cg du carré seront situés de part et d'autre de la diagonale Bb, et donc on aura

$$AE = ae.$$

1. MAA, série Spectrum, 2015.
Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, février 2026.

En ajoutant cf aux deux rectangles, on obtient

$$AE + \square cf = ae + cf,$$

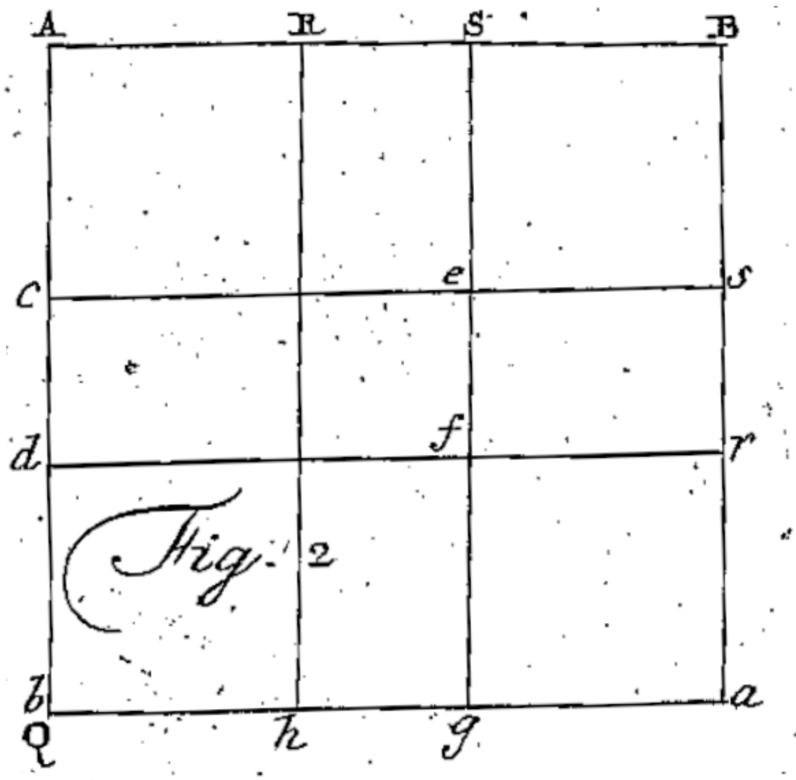


Fig. 2. Seconde preuve de son lemme par Euler

ou bien

$$Af = ae + \square cf.$$

Mais

$$ae = \square af + \square er$$

et donc

$$\begin{aligned} Af &= af + er + cf \\ &= \square af + er. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} Af &= AS.Br = AS.BR \\ \square af &= ar.BS = AR.BS \end{aligned}$$

et

$$cr = AB.rs = AB.RS.$$

dont les valeurs seront substituées pour obtenir

$$AS.BR = AR.BS + AB.RS,$$

ou

$$AB.RS + AR.BS = AS.BR$$

ce qui démontre le lemme.

Référence

[1] Leonhard Euler : Variae Geometricae Demonstrationes E. 135, Nouveaux commentaires de l'Académie pétropolitaine des Sciences I (1747-1748), 1750, p. 49-66, Résumé p. 37-38.

Annexe : *Article original en latin, consultable à la page https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/135/.*

Lemmata.

§. 2. Si linea recta AB vtcunque ſecetur in duobus punctis R et S, erit rectangulum ex tota AB in partem mediam RS vna cum rectangulo ex partibus extremis AR et BS aequale rectangulo ex partibus AS et BR, ſeu erit : $AB.RS + AR.BS = AS.BR$. Fig. 1.

Demonſtratio.

Cum ſit $AB = AS + BS$, erit vtrumque ducendo in RS,

$$AB.RS = AS.RS + BS.RS$$

addatur $AR.BS$ $\quad AR.BS$ vtrinque, et erit

$$AB.RS + AR.BS = AS.RS + BS.RS + AR.BS$$

At eſt $BS.RS + AR.BS = BS(RS + AR) = BS.AS$,

vnde ſit $AB.RS + AR.BS = AS.RS + BS.AS$

Verum eſt $AS.RS + BS.AS = AS(RS + BS) = AS.BR$

Conſequenter habebitur : $AB.RS + AR.BS = AS.BR$

Q. E. D.

Scholion.

Fig. 2. §. 3. Hocce lemma etiam ſequenti modo per ſolam figuram geometricam demonſtrari poteſt. Super data recta AB in punctis R et S vtcunque diuiſa conſtituatur quadratum, $ABab$ et latus Ba ſimili modo ſecetur in punctis r et s, vt ſit $Bs = BS$; $sr = SR$ et $ar = AR$: tum ductis rectis Rb, Sg item sc, rd lateribus quadrati parallelis, erunt partes Ss, cg quadrata circa diagonalem Bb ſita, ideoque erit $\square Ae = \square ae$. Addatur vtrique rectangulum cf, fietque $\square Ae + \square cf = \square ae + \square cf$ ſeu $\square Af = \square ae + \square cf$, ſed $\square ae = \square af + \square er$, vnde $\square Af = \square af + \square er + \square cf = \square af + \square er$. At eſt $\square Af = AS.Br = AS.BR$; et $\square af = ar.BS = AR.BS$ atque $\square cr = AB.rs = AB.RS$, quibus valoribus ſubſtitutis elicietur : $AS.BR = AR.BS + AB.RS$ ſeu $AB.RS + AR.BS = AS.BR$ prorſus vti lemma habet.