Sur les séries de Lambert
et leurs propriétés importantes
1773
Leonhard Euler[1]

§ 1. Ce nom est donné à l'une des plus célèbres des séries, au moyen de laquelle l'éminent Lambert décrivit le premier l'expression des racines d'une équation trinomiale dans les Acta Helvetica Volum. III (Note 1).

Cette série, si ces termes peuvent être modifiés un peu, peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} S = 1 + nv \quad & + \frac{1}{2}n(n+\alpha+\beta)v^2 \\ & + \frac{1}{6}n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^3 \\ & + \frac{1}{24}n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^4 \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

C'est une série dont la somme S dépend donc de la résolution de l'équation trinomiale :

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha-\beta)vx^{\alpha+\beta}, \quad \text{pour que} \quad S = x^n$$

où, dans la mesure où cette équation peut avoir plusieurs racines, x doit être compris comme étant la racine la plus grande ou bien la racine la plus petite, suivant ce qui est requis par les circonstances. De plus, il semble adéquat de fournir cette série sous la forme présente, puisque les lettres α et β peuvent être échangées, de telle façon que tout ce qui peut être observé pour l'une des deux racines peut également l'être pour l'autre.

§ 2. Les propriétés particulières de cette série dépendent donc de ceci, pour que sa somme puisse toujours être rendue égale à la puissance d'exposant n, à laquelle n'importe quelle quantité déterminée est élevée (Note 2). De ceci, il découle que : si pour sa valeur propre avec n'importe quel exposant $n = p$, la série est prise égale à $= P$; et si, de plus, pour n'importe quelle autre valeur $n = q$, la somme de la série est prise comme étant égale à $= Q$; alors, comme on a $P = x^p$ et $Q = x^q$, il sera clair que $P^q = Q^p$ ou $\frac{\log P}{\log Q} = \frac{p}{q}$ et dans ces circonstances, dès que la somme de la série est connue pour un cas particulier de l'exposant n, alors la série est connue pour n'importe quelle autre valeur, en supposant que les quantités restantes α, β, et v gardent leur valeur. Il faut donc en connaître le plus possible, pour que la propriété significative du caractère de la série elle-même puisse être montré.

[1]Euler, L. *De serie Lambertina, plurimisque eius insignibus proprietatibus.* Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae 1779, 1783, p. 29-51, Classification Enestrom E532. https://denisevellachemla.eu/Euler-Lambertina-en-latin.pdf.

Traduction en français : Denise Vella-Chemla (janvier 2025) de la traduction du latin à l'anglais de Sam Gallagher, Drexel University ; la préface du traducteur est reportée à la fin de ce document.

§ 3. Ici donc, avant tous les autres cas, un cas important mérite d'être noté, celui dans lequel $n = 0$ et la somme $S = 1$. Alors, quand on a $S = x^n$, on sait bien que dans ce cas où $n = 0$, la formule $\frac{x^n-1}{n}$ se réduit au logarithme hyperbolique de x, ce qui fait que ce cas se réduit immédiatement lorsqu'on se rappelle que (Note 3) :

$$\begin{aligned}\log x = v \quad & +\frac{1}{2}(\alpha+\beta)v^2 \\ & +\frac{1}{6}(\alpha+2\beta)(2\alpha+\beta)v^3 \\ & +\frac{1}{24}(\alpha+3\beta)(2\alpha+2\beta)(3\alpha+\beta)v^4 \\ & +\frac{1}{120}(\alpha+4\beta)(2\alpha+3\beta)(3\alpha+2\beta)(4\alpha+\beta)v^5 \\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

Mais si alors, la somme de la série peut être explorée, en la dénommant Δ, plutôt que $\log x = \Delta$, on aura $x = e^{\Delta}$, en notant e le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$. Donc, en connaissant cette valeur Δ pour tout nombre, la somme de la série proposée sera $e^{n\Delta}$ dont, par conséquent, toutes les valeurs des autres séries peuvent être obtenus ; de façon évidente :

$$S = 1 + n\Delta + \frac{1}{2}n^2\Delta^2 + \frac{1}{6}n^3\Delta^3 + \frac{1}{24}n^4\Delta^4 + \text{ etc.}$$

Ainsi, de façon certaine, puisque $\Delta = \log x$, en même temps on a l'équation :

$$\begin{gathered} e^{\alpha\Delta} - e^{\beta\Delta} = (\alpha-\beta)ve^{(\alpha+\beta)\Delta)}, \quad \text{ou} \\ e^{-\beta\Delta} - e^{-\alpha\Delta} = (\alpha-\beta)v \end{gathered}$$

Cette équation nous permet de découvrir la valeur de Δ.

§ 4. De plus, la somme générale de la série proposée peut alors aussi être exprimée de la façon suivante, si on pose :

$$v = \frac{x^{-\beta} - x^{-\alpha}}{\alpha - \beta}$$

La somme de la série devrait être $S = x^n$ et en fait, n'importe quelles valeurs peuvent être affectées aux lettres α et β, si seulement on note, comme on le verra, que si lorsque x prend plusieurs valeurs différentes, la même valeur de v est obtenue, alors pour la somme $S = x^n$, le minimum ou le maximum devront être pris. Maintenant que ces éléments généraux ont été notés, on peut étudier quelques cas particuliers, suivant le ratio des lettres α et β, par lesquels la conception de notre série sera rendue relativement claire.

Cas I : $\beta = 0$

§ 5. Puisque les lettres α et β sont interchangeables, alors soit α soit β peut disparaître. Par conséquent, posons $\beta = 0$ et notre série prend par conséquent la forme

$$\begin{aligned} S = 1 + nv \quad & + \frac{1}{2}n(n+\alpha)v^2 \\ & + \frac{1}{6}n(n+\alpha)(n+2\alpha)v^3 \\ & + \frac{1}{24}n(n+\alpha)(n+2\alpha)(n+3\alpha)v^4 \\ & + \frac{1}{120}n(n+\alpha)(n+2\alpha)(n+3\alpha)(n+4\alpha)v^5 \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

dont la somme sera donc $S = x^n$ dès que x est pris de l'équation $x^\alpha - 1 = \alpha v x^\alpha$, d'où il découle que $x^\alpha = \frac{1}{1-\alpha v}$ et identiquement $x = (1-\alpha v)^{-1/\alpha}$, cas par lequel la série prend sa forme connue remarquable.

§ 6. Maintenant, si on fait s'évanouir cet exposant, ce type de série se réduira à celle du logarithme, telle que

$$\log x = v + \frac{1}{2}\alpha v^2 + \frac{1}{3}\alpha\alpha v^3 + \frac{1}{4}\alpha^3 v^4 + \frac{1}{5}\alpha^4 v^4 + \text{ etc.}$$

Donc en utilisant

$$x = (1-\alpha v)^{-1/\alpha}, \quad \text{on a } \log x = -\frac{1}{\alpha}\log(1-\alpha v)$$

Notons pourtant,

$$\log(1-\alpha v) = -\alpha v - \frac{1}{2}\alpha^2 v^2 - \frac{1}{3}\alpha^3 v^3 - \frac{1}{4}\alpha^4 v^4 - \text{ etc.}$$

Une série qui, lorsqu'on la multiplie par $-\frac{1}{\alpha}$ donne la série juste découverte (Note 4).

Cas II : $\beta = \alpha$

§ 7. Ce cas est le plus notable, parce que l'équation, dont la valeur de x devrait découler, est inconsistante, clairement $x^\alpha - x^\alpha = 0vx^{2\alpha}$, ou $0 = 0$; pour éviter ce problème, on prend $\alpha = \beta + \omega$ avec ω infiniment petit, et notre équation devient :

$$x^{\beta+\omega} - x^\beta = \omega v x^{2\beta+\omega}, \quad \text{ou}$$

$$\frac{x^\omega - 1}{\omega} = v x^{\beta+\omega}.$$

Il est bien connu pourtant que si ω s'évanouit, on a $\frac{x^\omega - 1}{\omega} = \log x$, de telle façon que dans ce cas, $\log x = v x^{\beta+\omega} = v x^\alpha$, qui est une équation de laquelle on peut déduire x.

§ 8. Pourtant, avec β pris comme étant $= \alpha$, on arrive à la série suivante :

$$\begin{aligned} S = 1 + nv \quad & + \frac{1}{2}n(n+2\alpha)v^2 + \frac{1}{6}n(n+3\alpha)^2v^3 \\ & + \frac{1}{24}n(n+4\alpha)^3v^4 + \frac{1}{120}n(n+5\alpha)^4v^5 \\ & + \frac{1}{720}n(n+6\alpha)^5v^6 + \text{ etc.} \end{aligned}$$

une série qui mérite toute notre attention, parce que non seulement les exposants croissent continuellement, mais de plus, les quantités étant élevées à la puissance d'elles-mêmes, apparaissent en progression arithmétique, dans une série à peine étudiée par les géométres jusque là. Néanmoins, on a appris ici que la somme de la série est $S = x^n$, dès que la valeur d'un des x respecte l'équation $\log x = vx^\alpha$ bien qu'il soit seulement possible d'obtenir cette valeur par une approximation.

§ 9. Maintenant si on pose $n = 0$, de ce qui a été montré précédemment, la série suivante peut être déduite

$$\log x = v + \alpha v^2 + \frac{3^2}{6}\alpha\alpha v^3 + \frac{4^3}{24}\alpha^3v^4 + \frac{5^4}{120}\alpha^4v^5 + \frac{6^5}{720}\alpha^5v^6 + \text{ etc.}$$

Par conséquent, en posant $\log x = vx^\alpha$, on a

$$x^\alpha = 1 + \frac{2^1}{1.2}\alpha v + \frac{3^2}{1.2.3}\alpha^2v^2 + \frac{4^3}{1.2.3.4}\alpha^3v^3 + \frac{5^4}{1.2...5}\alpha^4v^4 + \frac{6^5}{1...6}\alpha^5v^5 + \text{ etc.}$$

Posons $\alpha v = u$, ainsi $\alpha\log x = ux^\alpha$. Si on pose $x^\alpha = y$, alors $\alpha\log x = \log y$; donc notre équation devient $\log y = uy$, et pour cette raison, on obtient cette somme :

$$y = 1 + \frac{2^1}{1.2}u + \frac{3^2}{1.2.3}uu + \frac{4^3}{1.2.3.4}u^3 + \frac{5^4}{1.2...5}u^4 + \frac{6^5}{1...6}u^5 + \text{ etc.}$$

auquel cas $u = \dfrac{\log y}{y}$.

§ 10. Comme dans cette série, les exposants des nombres vont décroissant des nombres eux-mêmes d'un en un, on les réduit à l'égalité par la méthode suivante : en multipliant chaque côté par u et en différenciant, cela devient

$$\frac{d\log y}{du} = \frac{dy}{ydu} = 1 + \frac{2^2}{1.2}u + \frac{3^3}{1.2.3}uu + \frac{4^4}{1.2.3.4}u^3 + \frac{5^5}{1.2...5}u^4 + \frac{6^6}{1...6}u^5 + \text{ etc.}$$

De plus, on pose $\log y = uy$, alors $\frac{dy}{y} = udy + ydu$, d'où il découle $\frac{dy}{du} = \frac{yy}{1-uy}$ quoi que puisse être la somme $= \frac{y}{1-uy}$. En multipliant les deux côtés par u, et parce que $uy = \log y$, on arrive à cette somme plus importante :

$$\frac{\log y}{1 - \log y} = u + \frac{2^2}{1.2}u^2 + \frac{3^3}{1.2.3}u^3 + \frac{4^4}{1.2.3.4}u^4 + \frac{5^5}{1.2...5}u^5 + \text{ etc.}$$

Sous la condition que $u = \dfrac{\log y}{y}$.

§ 11. Cette dernière série mérite qu'on lui porte attention du fait de son élégance et de son utilité, donc nous allons étudier ses propriétés propres plus attentivement. Donc d'abord, il est évident, si l'on peut supposer $u = 1$ ou $u > 1$ que la série produite est divergente ; comme dans la forme générale $\frac{n^n}{1.2...n}$, le numérateur croît continuellement plus que le dénominateur, et donc les termes dont le signe est celui de la somme imaginaire croitront à l'infini ; par cela, la formule $u = \frac{\log y}{y}$ est clairement démontrée, puisque le logarithme d'aucun nombre ne peut devenir plus grand que le nombre en question. Quand pourtant u est moindre que l'unité, la somme de la série peut plus certainement produire une valeur finie, dès que bien sûr la formule $\frac{\log y}{y}$ prend une valeur finie, ce qui arrive quand $\log y < 1$ ou $y < e$. Pourtant, si on suppose que $y = e$ de telle façon que l'on ait $u = \frac{1}{e}$, notre série aura encore une somme infinie, même si nos termes décroissent continuellement, celle-ci finira par s'évanouir.

§ 12. En cela, cependant, une série remarquable arrive immédiatement parce que, si u passe au-dessus de $\frac{1}{e}$, seulement un peu, ils s'élèvent finalement infiniment au-dessus des termes, ce qui concorde bien avec ces choses, que j'ai observées d'abord autour de la valeur du produit $1.2.3...n$ dans *Calculo Differentiali* p. 466 (Note 5). Et si l'on pose également $T = \frac{n^n}{1.2...n}$, de telle façon que

$$\log T = n \log n - \log 1 - \log 2 - \log 3.... - \log n$$

Dans le travail qui vient d'être cité, il est démontré que

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \log 4..... + \log n$$

$$= \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \text{ etc.}$$

d'où découle le produit lui-même

$$1.2.3....n = \frac{\sqrt{2\pi} \times n^{n+\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \text{ etc.}}}{e^n}$$

dès qu'on a

$$T = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}.e^{n - \frac{1}{12n} + \frac{1}{360n^3} - \text{etc}}.$$

Donc, quand n est un très grand nombre, tous les termes de notre série deviennent $Tu^n = \frac{e^n u^n}{\sqrt{2n\pi}}$, forme dont il est clair que, dès que $eu > 1$ ou $u > \frac{1}{e}$, alors ce terme devient infini ; mais si cependant soit $eu = 1$ soit, $eu < 1$ strictement, ou si $u < \frac{1}{e}$, alors ce terme s'évanouit.

§ 13. On peut illustrer cette somme par un unique exemple, en ayant posé $\log y = \frac{1}{2}$, comme la somme de la série devient $= 1$; alors on a $u = \frac{1}{2\sqrt{e}}$ et par conséquent, on obtient

$$1 = u + \frac{2^2}{1.2}u^2 + \frac{3^3}{1.2.3}u^3 + \frac{4^4}{1...4}u^4 + \text{ etc.}$$

De plus, avec $e = 2.71828$, les valeurs de cette première série de termes se trouveront dans les décimales fractionnaires que j'ai copiées :

$$u = 0.303269$$

$$2u^2 = 0.183944$$

$$\frac{9}{2}u^3 = 0.125515$$

$$\frac{32}{3}u^3 = 0.090228$$

$$\frac{5^4}{1.2.3.4}u^4 = 0.066805$$

$$\frac{3^2.6^2}{5}u^6 = 0.050413$$

Cette série converge ainsi aussi doucement que possible, et même jusqu'à une somme totale qui est déterminée comme n'excédant pas l'unité.

Sur la solution de l'équation $\log x = vx^\alpha$

§ 14. Parce que pour le second cas, dans lequel $\beta = \alpha$, la somme de notre série dépend de l'équation $\log x = vx^\alpha$, alors, quelque soit la valeur de v, la quantité x devrait être obtenue : avant toute autre chose, il est bon d'observer que des valeurs jumelles de x peuvent correspondre à n'importe quelle valeur de v. Pour montrer cela, on peut prendre $x^\alpha = y$ et $\alpha v = u$, de telle façon qu'on ait l'égalité : $\log y = uy$, ou $u = \frac{\log y}{y}$; d'où il est clair que le nombre u ne peut pas être positif, à moins qu'on ne garantisse que $y > 1$. Pourtant, alors, on a toujours $u < \frac{1}{e}$ selon la valeur que prend le maximum de la formule $\frac{\log y}{y}$ si on suppose $y = e$, de telle façon que, que l'on prenne y plus grand ou plus petit que e, on a toujours $u < \frac{1}{e}$. Ainsi, il est clair que la série que l'on avait trouvée pour le second cas ne peut pas être une somme finie ; dès que $u > \frac{1}{e}$, ou $v > \frac{1}{\alpha e}$, alors v doit être une quantité positive ; car s'il était négatif, la somme aurait toujours été finie en raison du signe alterné.

§ 15. Par conséquent, il découle encore que, à chaque fois qu'on a $u < \frac{1}{e}$, y peut prendre deux valeurs : une plus grande bien sûr que e, l'autre moindre, et la même valeur de $u = \frac{\mathrm{lo}\, y}{y}$ est produite dans les deux cas. Exactement de la même manière, si on prend $y = 2$ ou $y = 4$, les deux côtés produisent $u = \log\frac{2}{2}$. La même chose se produit dans l'exemple, si on pose $y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$, ou $y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, parce que les deux côtés produisent $u = \frac{8}{9}\log\frac{3}{2}$. La même chose apparaît également si on suppose $y = \left(\frac{4}{3}\right)^4$ ou $y = \left(\frac{4}{3}\right)^3$, puisqu'alors les deux côtés donnent $u = \frac{3^4}{4^3}\log\frac{4}{3}$.

§ 16. Pour trouver une paire de valeurs pour y, appelons p et q deux telles valeurs, par lesquelles il advient que $u = \frac{\log p}{p} = \frac{\log q}{q}$. On pose maintenant $q = pr$, et il est convenable d'obtenir

$$\frac{\log p}{p} = \frac{\log pr}{pr} = \frac{\log p + \log r}{pr},$$

ou $r\log p = \log p + \log r$, d'où il découle $\log p = \frac{\log r}{r-1}$ et donc $p = r^{\frac{1}{r-1}}$, et puis $q = r^{\frac{r}{r-1}}$ pour lequel, pour que des formules plus pratiques soient retournées, on pose $\frac{1}{r-1} = m$, de telle façon que $r = \frac{m+1}{m}$, d'où les deux valeurs de y, qu'on a appelées p et q, seront maintenant : soit $y = p = \left(\frac{m+1}{m}\right)^m$, soit $y = q = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}$; les deux côtés ont pour conséquence $u = \frac{m^{m+1}}{(m+1)^m}\log \frac{m+1}{m}$.

§ 16. (Note 6). Avec cet exposant, une question de la plus haute importance surgit : laquelle de ces deux valeurs de y devrait-elle être assignée à la somme de cette série :

$$y = 1 + \frac{2^1}{1.2}u + \frac{3^2}{1.2.3}uu + \frac{4^3}{1.2.3.4}u^3 + \frac{5^4}{1.2...5}u^4 + \text{ etc.}$$

Pour trouver la réponse à cette question, supposons d'abord que $u = 1/e$ de telle façon que les deux valeurs de y soient égales à e ; car rien n'est incertain dans ce cas en posant $y = e$. Certainement maintenant, si on doit avoir $u < \frac{1}{e}$, il est clair que la somme de la série est plus petite que e. À cause de quoi comme pour y, on trouve deux valeurs, l'une plus grande et l'autre plus petite que e, il est évident que la plus petite valeur doit être prise pour la somme de la série exprimée. Donc si $u = \frac{m^{m+1}}{(m+1)^m}\log\frac{m+1}{m}$, la valeur de y que l'on doit supposer est $y = \left(\frac{m+1}{m}\right)^m$, qui est naturellement toujours inférieure à e, sinon, on prend $y = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}$, qui est plus grande que e.

Théorème.

§ 17. Si les quantités x et v dépendent l'une de l'autre, de telle façon que $\log x = vx$ et si de plus, les valeurs de x correspondent aux valeurs jumelles de v, l'une plus grande et l'autre plus petite que e, alors dans les sommes suivantes :

$$\text{I.} \qquad \frac{x^n - 1}{n} = v + \frac{n+2)}{1.2}v^2 + \frac{(n+3)^2}{1.2.3}v^3 + \frac{(n+4)^3}{1.2.3.4}v^4 + \text{ etc.}$$

$$\text{II.} \qquad \frac{x^n}{1-\log x} = 1 + \frac{n+1}{1}v + \frac{(n+2)^2}{1.2}v^2 + \frac{(n+3)^3}{1.2.3}v^3 + \frac{(n+4)^4}{1.2.3.4}v^4 + \text{ etc.}$$

à la place de x, la plus petite valeur devrait être prise, qui est clairement plus petite que xe. Pour cette raison, nous aurons deux séries dpnt l'évolution est évidente et provient de l'explication du cas $\alpha = 1$ dans la série du § 8.

§ 18. La dernière série est clairement produite en différenciant la première ; en fait, en divisant par dv et en différentiant, on arrive à

$$\frac{x^{n-1}dx}{dv} = 1 + \frac{n+2}{1}v + \frac{(n+3)^2}{1.2}v^2 + \frac{(n+4)^3}{v}1.2.3v^3 + \text{ etc.}$$

De plus, en posant $v = \dfrac{\log x}{x}$, on a $dv = \dfrac{dx}{xx}(1 - \log x)$, dont il découle que

$$\frac{x^{n-1}dx}{dv} = \frac{x^{n+1}}{1-\log x}$$

Par conséquent, si à la place de n, on écrit $n-1$, cette somme devient :

$$\frac{x^n}{1-\log x} = 1 + \frac{n+1}{1}v + \frac{(n+2)^2}{1.2}v^2 + \frac{(n+3)^3 v}{1.2.3}v^3 + \text{ etc.}$$

qui est notre dernière série elle-même.

§ 19. Ces deux séries de plus devraient être considérées comme méritant la plus grande attention, parce qu'elles sont beaucoup plus simples et élégantes que la série générale de Lambert ; et enfin par-dessus tout, parce qu'on ne voit aucun autre moyen évident de démontrer directement leur vérité. Car malgré la vérité de la série de Lambert, elle a elle-même été maintenant démontrée : néanmoins les méthodes, par lesquelles la démonstration est soutenue, ne peuvent gérer le cas de la présente série par aucun moyen, ce en quoi un paradoxe particulièrement significatif est observé, parce qu'on peut fortifier une telle proposition générale par une démonstration, mais néanmoins elle ne peut pas toujours être appliquée à un cas quelconque.

§ 20. Je montrerai à une autre occasion, où une solution similaire a été étendue à une équation polynomiale de n'importe quel degré souhaité, comment la série de Lambert peut être déduite de l'équation trinomiale

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha-\beta)vx^{\alpha+\beta}.$$

Inversement, la façon dont la série de Lambert peut aussi être développée en une équation trinomiale, semble être un problème beaucoup plus difficile ; par conséquent, il serait bénéfique d'avoir mené une telle analyse, et pour que le travail en découle plus facilement, je propose d'abord le problème suivant.

Problème.

Démontrer l'accord d'une série de Lambert proposée avec cette équation trinomiale

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha-\beta)vx^{\alpha+\beta}$$

Solution.

§ 21. En dénotant la somme de cette série par S, je suppose en effet ici que cette somme est égale à une puissance de n'importe quelle sorte x^n, puisque nous devons seulement trouver la relation entre la quantité x et les quantités qui déterminent la série elle-même, qui sont α, β et v. Comme il est facile de le voir, le fait que la somme S puisse être produite avec une telle forme x^n ne peut en aucune façon se déduire d'un tel raisonnement avant de l'avoir démontré (parce qu'avant toute autre chose, cela mériterait d'avoir été démontré). Ceci une fois garanti, on peut établir le raisonnement de la façon suivante.

§ 22. En fait, après avoir posé $S = x^n$ à la première place de l'exposant indéterminé n, on pose la valeur fixée $n = -\alpha$, et on obtient donc la série suivante :

$$
\begin{aligned}
x^{-\alpha} &= 1 - \alpha v - \frac{1}{2}\alpha\beta v^2 - \frac{1}{6}\alpha.2\beta(\alpha+\beta)v^3 \\
&- \frac{1}{24}\alpha.3\beta(\alpha+2\beta)(2\alpha+\beta)v^4 \\
&- \frac{1}{120}\alpha.4\beta(\alpha+3\beta)(2\alpha+2\beta)(3\alpha+\beta)v^5 - \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

Par un raisonnement similaire, si on pose $n = -\beta$, on arrive à la série suivante :

$$
\begin{aligned}
x^{-\beta} &= 1 - \beta v - \frac{1}{2}\beta\alpha v^2 - \frac{1}{6}\beta.2\alpha(\beta+\alpha)v^3 \\
&- \frac{1}{24}\beta.3\alpha(\beta+2\alpha)(2\beta+\alpha)v^4 \\
&- \frac{1}{120}\beta.4\alpha(\beta+3\alpha)(2\beta)(2\alpha)(3\beta+\alpha)v^5 - \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

§ 23. Maintenant, on soustrait la première de ces deux séries de la dernière, et ainsi, on obtient cette équation : $x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (\alpha - \beta)v$ parce qu'à part les seconds termes, tous les suivants s'annulent clairement les uns les autres. Mais si maintenant on multiplie l'équation résultante par $x^{\alpha+\beta}$, l'équation trinomiale supposée est produite

$$x^{\alpha} - x^{\beta} = (\alpha - \beta)vx^{\alpha+\beta}$$

§ 24. Par conséquent, en supposant qu'il est possible de démontrer que la somme de la série de Lambert est égale à la puissance $n^{\text{ième}}$ de n'importe quelle quantité x, qui est indépendante de n, l'analyse précédente devrait absolument fournir une preuve suffisante. J'essaierai de corriger ce défaut dans le problème suivant.

Problème principal.

Exposer les opérations analytiques, qui peuvent mener directement à la compréhension de la véritable somme de la série de Lambert.

Solution.

§ 25. Comme dans la série de Lambert proposée interviennent quatre quantités α, β, v et n, on suppose que les trois premières α, β et v sont constantes et données, alors que la quatrième n est variable ; et de cette façon, on peut supposer que la somme désirée S est une fonction de la quantité

n, et pour respecter la tradition en terme de notations, on note cela : $S = \Phi : n$, donc on pose

$$\begin{aligned}
\Phi : n \quad &= 1 + nv + \frac{1}{2}n(n+\alpha+\beta)v^2 \\
&+\frac{1}{6}n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^3 \\
&+\frac{1}{24}n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^4 \\
&+\frac{1}{120}n(n+\alpha+4\beta)(n+2\alpha+3\beta)(n+3\alpha+2\beta)(n+4\alpha+\beta)v^5 + \text{ etc.}
\end{aligned}$$

§ 26. Par conséquent, comme cette équation doit être vraie, quel que soit le nombre que l'on peut écrire à la place de n, on prend plutôt $n-\alpha$ à la place de n et on obtient

$$\begin{aligned}
\Phi : (n-\alpha) \quad &= 1 + (n-\alpha)v + \frac{1}{2}(n-\alpha)(n+\beta)v^2 \\
&+\frac{1}{6}(n-\alpha)(n+2\beta)(n+\alpha+\beta)v^3 \\
&+\frac{1}{24}(n-\alpha)(n+3\beta)(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^4 \\
&+\frac{1}{120}(n-\alpha)(n+4\beta)(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^5 + \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Et bien sûr on peut obtenir de façon similaire

$$\begin{aligned}
\Phi \ : \ (n-\beta) \quad &= 1 + (n-\beta)v + \frac{1}{2}(n-\beta)(n+\alpha)v^2 \\
&+\frac{1}{6}(n-\beta)(n+2\alpha)(n+\alpha+\beta)v^3 \\
&+\frac{1}{24}(n-\beta)(n+3\alpha)(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^4 \\
&+\frac{1}{120}(n-\beta)(n+4\alpha)(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^5 + \text{ etc.}
\end{aligned}$$

§ 27. On soustrait maintenant la première de ces deux séries de la seconde, et puisque pour des termes de n'importe quel ordre, en supprimant le facteur commun, on devrait obtenir

$$(n-\beta)(n+\lambda\alpha) - (n-\alpha)(n+\lambda\beta) = (\lambda+1)n(\alpha-\beta)$$

avec cette observation, en soustrayant, on obtiendra

$$\Phi : (n-\beta) - \Phi : (n-\alpha)$$

$$= (\alpha-\beta)v + \frac{2}{2}(\alpha-\beta)nv^2 + \frac{3}{6}(\alpha-\beta)n(n+\alpha+\beta)v^3$$

$$+ \frac{4}{24}(\alpha-\beta)n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^4$$

$$+ \frac{5}{120}(\alpha-\beta)n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^5 + \text{etc.}$$

§ 28. Parce que dans cette série, tous les termes contiennent le facteur $(\alpha-\beta)v$, en divisant par ce facteur, on obtient cette équation :

$$\frac{\Phi : (n-\beta) - \Phi : (n-\alpha)}{(\alpha-\beta)v} = 1 + nv + \frac{1}{2}n(n+\alpha+\beta)v^2$$

$$+\frac{1}{6}n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^3$$

$$+\frac{1}{24}n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^4 + \text{ etc.}$$

une série qui est la chose elle-même, comme on l'a noté dans la définition de $\Phi : n$, pour la somme qui doit être substituée, on arrive à cette équation:

$$\Phi : (n-\beta) - \Phi : (n-\alpha) = (\alpha-\beta)v\ \Phi : n.$$

§ 29. Tout ce travail amène donc à cette question : quelle sorte de valeur de n devrait-on prendre pour $\Phi : n$, pour que cette équation soit satisfaite ? Il sera bientôt évident pourtant, même par un examen rapide, qu'elle peut être satisfaite par une substitution telle que $\Phi : n = Ak^n$, où en effet ni A ni k ne dépendent de n ; alors en fait, on a

$$\Phi : (n-\alpha) = Ak^{n-\alpha} \quad \text{et} \quad \Phi : (n-\beta) = Ak^{n-\beta}$$

Donc, en substituant ces valeurs, l'équation trouvée aura cette forme :

$$A(k^{n-\beta} - k^{n-\alpha}) = (\alpha-\beta)vAk^n$$

qui, divisée par Ak^n se transforme en celle-ci : $k^{-\beta} - k^{-\alpha} = (\alpha-\beta)v$; en effet, si on multiplie par $k^{\alpha+\beta}$ et qu'à la place de n, on écrit x, on aura déduit cette équation trinomiale qu'on avait notée : $x^\alpha - x^\beta = (\alpha-\beta)v^{\alpha+\beta}$.

§ 30. Donc, de cette façon, il est montré de façon plus rigoureuse que la somme d'une série de Lambert peut être exprimée par une telle formule, puisqu'indubitablement, $S = Ak^n$ ou $S = Ax^n$ où dans le cas de $n = 0$, la somme de la série doit être égale à $= 1$, donc clairement A doit être $= 1$, et la somme de la série elle-même est directement, comme nécessité : c'est-à-dire que $S = x^n$, dès que la quantité x est déterminée par cette équation : $x^{\alpha} - x^{\beta} = (\alpha - \beta)vx^{\alpha+\beta}$.

§ 31. On pourrait objecter à cette solution que l'équation trouvée

$$\Phi\ :\ (n - \beta) - \Phi\ :\ (n - \alpha) = (\alpha - \beta)v\Phi\ :\ n$$

pourrait être satisfaite par d'autres moyens que par la valeur $\Phi\ :\ n = k^n$, ce qui en effet ne peut être nié, car ces types d'équations admettent en général plusieurs solutions. Cette valeur peut s'avérer suffisante, elle satisfait absolument la contrainte, et précisément alors, ni A ni k ne sont dépendants de n : néanmoins, la même chose peut également être confirmée à partir des principes de l'analyse de l'infini de la façon suivante.

§ 32. Puisque $S = \Phi\ :\ n$ est une fonction de n, avec cette quantité variable que l'on a supposée, à partir de principes bien connus, elle sera égale à (Note 7)

$$\Phi\ :\ (n - \alpha) = S - \frac{\alpha dS}{dn} + \frac{\alpha^2 ddS}{1.2.dn^2} - \frac{\alpha^3 d^3S}{1.2.3.dn^3} + \frac{\alpha^4 d^4S}{1.2.3.4.dn^4} - \text{ etc..}$$

et d'une façon similaire

$$\Phi(n - \beta) = S - \frac{\beta dS}{dn} + \frac{\beta^2 ddS}{1.2.dn^2} - \frac{\beta^3 d^3S}{1.2.3.dn^3} + \frac{\beta^4 d^4}{S1.2.3.4.dn^4} - \text{ etc.}$$

ces éléments ayant été substitués, on est amené à une équation différentielle infinie :

$$(\alpha - \beta)vS = (\alpha - \beta)\frac{dS}{dn} - (\alpha\alpha - \beta\beta)\frac{ddS}{1.2.dn^2} + (\alpha^3 - \beta^3)\frac{d^3S}{1.2.3.dn^3} - (\alpha^4 - \beta^4)\frac{d^4S}{1.2.3.4.dn^4} + \text{ etc.}$$

dont on peut déduire la valeur de la quantité S.

§ 33. Pourtant, puisque dans chacun des termes de cette équation, la variable S prend une seule dimension partout, il a été démontré par le calcul intégral qu'une telle équation : $S = Ce^{\lambda n}$ ne peut être satisfaite que par des valeurs de ce genre, si on pose $e^{\lambda} = k$, cela devient $S = Ck^n$, si nous l'établissons, ce sera exactement ce que nous avons supposé auparavant, donc on ne peut rien souhaiter de plus concernant la série de Lambert (Note 8).

Une confirmation plus utile de la solution donnée.

§ 34. Si l'on considère seulement la condition qui vient d'être trouvée, que l'on doit avoir

$$\Phi\ :\ (-\beta) - \Phi\ :\ (n - \alpha) = (\alpha - \beta)v\Phi\ :\ n,$$

certainement, elle peut être satisfaite d'une façon plus générale. En particulier, si les lettres p, q, r, s etc. représentent les racines de cette équation : $x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (\alpha - \beta)v$, il est clair que la valeur :

$$\Phi\ : n = Ap^n + Bq^n + Cr^n + Ds^n + \text{ etc.}$$

satisfait la même condition. Donc la valeur de la somme S de la série de Lambert sera contenue de façon évidente dans cette formule, qui du fait de sa définition dépend seulement des quantités

α, β, v, et n, on cherchera comment ces indéterminées A, B, C, D etc. peuvent être définies, pour amener à l'égalité $S = \Phi \,:\, n$.

§ 35. Ici, pourtant, immédiatement, deux cas se présentent, dans lesquels soit une seule racine détermine la somme S, soit en fait toutes les racines coïncident, et deux cas sont à examnier avec attention. On observe d'abord que si toutes les racines p, q, r, s, etc. doivent être utilisées simultanément, alors elles méritent d'être considérées sans aucun doute avec un même regard, car il n'y a pas de raison d'avoir une préférence pour aucune d'entre elles : pour cette raison, rendons les coefficients A, B, C, D, etc. égaux entre eux, et alors

$$S = A(p^n + q^n + r^n + s^n + \text{ etc.}) \, ;$$

par conséquent, puisqu'on est dans le cas $n = 0$, il faut prendre $S = 1$ si le nombre de racines est $= i$, dans ce cas, c'est $S = Ai$, donc $A = \frac{1}{i}$.

§ 36. De plus, pourtant, notre série est ainsi constituée qu'en prenant $v = 0$, on obtient également pour notre somme la valeur $S = 1$. Maintenant en fait, avec le cas $v = 0$, notre équation devient $x^{-\beta} - x^{-\alpha} = 0$ ou $x^{\alpha-\beta} - 1 = 0$ dont l'unique racine est $= 1$, et la somme de toutes ces racines est toujours $= 0$, le seul cas exceptionnel étant lorsque $\alpha - \beta = 1$. Ainsi, dès qu'on suppose $n = 1$, on a $S = \frac{1}{i}(p + q + r + s + \text{ etc.}) = 0$, puisque la somme est encore $= 1$, de telle façon que l'hypothèse est contredite.

§ 37. La même issue brille plus clairement encore, si on pose $n = 1$ en général, comme on le voit, dans le cas où l'on pose $S = \frac{1}{i}(p+q+r+s+ \text{ etc.})$, où $p+q+r+s+$ etc. est la somme des racines de l'équation trinomiale

$$x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (\alpha - \beta)v$$

et donc, elle sera égale au coefficient du second terme, après que l'équation ait vu son ordre réduit, ce qui échoue fréquemment, la somme de la série étant également nulle ; ainsi il est contradictoire, cela a suffisamment étéé démontré, que toutes les racines de l'équation trinomiale ne puissent être en accord avec la somme S à établir.

§ 38. Par conséquent en éliminant ce cas, dans lequel toutes les racines se sont avérées égales, le premier cas subsiste, dans lequel la somme S est déterminée par seulement l'une de ses racines, comme dans la solution que nous avons supposée. Il est clair de plus que la racine sera soit le maximum soit le minimum : ici en fait la même distinction se produit, dans la résolution de toutes les équations de séries récurrente (Note 9), de même, à partir de cette méthode, on ne trouve généralement qu'une seule racine de l'équation, soit la racine maximale, soit la racine minimale, à condition que la solution que nous avons donnée soit déjà établie sans aucun doute. Cependant, à l'occasion de la méthode que nous avons utilisée, il ne serait pas inutile d'ajouter le problème suivant.

Problème.

Trouver toutes les fonctions de la quantité variable n, pour lesquelles la condition générale peut être satisfaite :

$$\Phi \,:\, n = a\Phi \,:\, (n + \alpha) + b\Phi \,:\, (n + \beta) + c\Phi \,:\, (n + \gamma) + \text{ etc.}$$

Solution.

§ 39. Mais par le raisonnement que nous avons trouvé pour résoudre le problème précédent, il sera facile de voir que pour satisfaire cette condition, on doit poser $\Phi\ :\ nAk^n$, où A et k sont des quantités constantes. De plus, faire cette substitution produit l'équation suivante :

$$Ak^n = Aak^{k+\alpha} + Abk^{n+\beta} + Ack^{n+\gamma} + +Adk^{n+\delta} + \text{ etc.}$$

qui divisée par Ak^n donne

$$1 = ak^\alpha + bk^\beta + ck^\gamma + dk^\delta + \text{ etc.}$$

où k désigne une certaine racine de cette équation, dont précisément les racines prises ensemble sont suffisantes pour que soit satisfaite la condition précédemment écrite. On peut même combiner ces différentes solutions les unes avec les autres d'une quelconque manière. Donc si p, q, r, s, etc. dénotent les racines de cette équation, il est suffisant pour résoudre notre problème en général d'avoir posé

$$\Phi\ :\ n = Ap^n + Bq^n + Cr^n + \text{ etc.}$$

dans laquelle nous pouvons choisir librement les valeurs des lettres A, B, C, D, etc. ; et on peut choisir aussi la solution générale du problème de cette analyse ; et on a là la solution générale du problème étudié, et cela pourra souvent donner lieu à une utilisation remarquable.

§ 40. Mais retournons à la série de Lambert et également, montrons, de cette manière, la façon dont on peut montrer que ce grand nombre d'autres séries peuvent être reliées.

Problème.

Soit une série de Lambert donnée, que pour raccourcir le propos, nous donnons sous la forme suivante

$$S = 1 + Av + Bv^2 + Cv^3 + Dv^4 + etc.$$

dont on a noté qu'elle est égale à $= x^n$, et où il faudra supposer que soit la racine est le maximum soit la racine est le minimum de cette équation trinomiale : $x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)vx^{\alpha+\beta}$ à partir de laquelle un grand nombre d'autres séries peuvent être reliées entre elles, contraindre la somme à prendre une certaine valeur.

Solution.

§ 41. (Note 10). Par conséquent, ces lettres A, B, C, D etc. à des fins de brièveté ont été mises sous les formes suivantes :

$$A = n\ ;\ B = \frac{1}{2}n(n+\alpha+\beta)\ ; C = \frac{1}{6}n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)\ ;$$

$$D = \frac{1}{24}n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)\ ;$$

$$E = \frac{1}{120}n(n+\alpha+4\beta)(n+2\alpha+3\beta)(n+3\alpha+2\beta)(n+4\alpha+\beta)etc.$$

Ces valeurs ayant été notées, on peut établir deux manières principales bien connues qui permettraient d'obtenir les autres séries : soit en procédant par différentiation, soit en procédant par intégration.

§ 42. Car si on pose $(\alpha-\beta)v = x^{-\beta} - x^{-\alpha}$, on aura

$$(\alpha-\beta)dv = -\beta x^{-\beta-1}dx + \alpha x^{-\alpha-1}dx$$

ou

$$(\alpha-\beta)dv = \frac{dx(\alpha x^{\beta} - \beta x^{\alpha})}{x^{\alpha+\beta+1}}$$

par conséquent, si on différencie notre série et si on la divise par dv, on obtient la somme suivante :

$$\frac{(\alpha-\beta)nx^{n+\alpha+\beta}}{\alpha x^{\beta} - \beta x^{\alpha}} = A + 2B + 3Cvv + 4Dv^3 + 5Ev^4 + 6Fv^5 + \text{ etc.}$$

§ 43. On aurait pu également multiplier la série proposée par n'importe quelle puissance de v d'abord, comme on le trouve par différentiation ; et multiplier ensuite par v^{λ} pour obtenir

$$v^{\lambda}x^n = v^{\lambda} + Av^{\lambda+1} + Bv^{\lambda+2} + Cv^{\lambda+3} + Dv^{\lambda+4} + \text{ etc.}$$

cette série différenciée elle-aussi divisée par dv donne

$$\lambda v^{\lambda-1}x^n + nv^{\lambda}x^{n-1}\frac{dx}{dv}$$
$$= \lambda v^{\lambda-1} + (\lambda+1)Av^{\lambda} + (\lambda+2)Bv^{\lambda+1} + (\lambda+3)Cv^{\lambda+2} + (\lambda+4)Dv^{\lambda+3} + (\lambda+5)Ev^{\lambda+4} + \text{ etc.}$$

Diviser l'expression par $v^{\lambda-1}$ donne la somme :

$$\lambda x^n + nvx^{n-1}\frac{dx}{dv} = \lambda + (\lambda+1)Av + (\lambda+2)Bv^2 + (\lambda+3)Cv^3 + (\lambda+4)Dv^4 + \text{ etc.}$$

de cette façon, il est clair que

$$\frac{nx^{n-1}dx}{dv} = \frac{(\alpha-\beta)nx^{\lambda+\alpha+\beta}}{\alpha x^{\beta} - \beta x^{\alpha}}$$

avec la valeur substituée, cette somme devient

$$= \lambda x^n + \frac{nx^{n+\alpha} - nx^{n+\beta)}}{\alpha x^{\beta} - \beta x^{\alpha}} = \frac{x^n}{\alpha x^{\beta} - \beta x^{\alpha}}((\lambda\alpha - n)x^{\beta} - (\lambda\beta - n)x^{\alpha}).$$

§ 44. Mais si maintenant on multiplie cette série à nouveau par v^{λ} et que l'on différencie à nouveau, de nombreuses nouvelles séries sont découvertes, dont les sommes à nouveau suivent la même règle. Et en répétant cela de cette manière, on peut continuer plus avant ; pourtant, poursuivre encore ce travail n'est pas nécessaire.

§ 45. D'une manière similaire par intégration, on peut esquisser de nouvelles séries. Si on multiplie la série proposée par

$$dv = \frac{\alpha x^{-\alpha-1}dx}{\alpha-\beta} - \frac{\beta x^{-\beta-1}dx}{\alpha-\beta},$$

et qu'on intègre des deux côtés, on arrive à la somme suivante :

$$\frac{\alpha x^{n-\alpha}}{(\alpha-\beta)(n-\alpha)} - \frac{\beta x^{n-\beta}}{(\alpha-\beta)(n-\beta)} = v + \frac{1}{2}Avv + \frac{1}{3}Bv^3 + \frac{1}{4}Cv^4 + \frac{1}{5}Dv^5 + \text{ etc.} + \text{ const.}$$

où pour déterminer une telle constante, le cas $v = 0$ est considéré, de telle façon que $x = 1$ et par conséquent la constante est égale à $\dfrac{n}{(n-\alpha)(n-\beta)}$.

§ 46. (Note 11). On aurait dû également multiplier par v^λ avant d'intégrer ; en vérité, de cette manière, on est tombé sur des calculs excessivement laborieux, qui nous ont suffi pour découvrir une source, d'où un nombre incalculable de nouvelles séries de nombreux types différents peuvent être définis (Note 12).

Préface de Sam Gallagher

Initialement publiée en 1779, la note d'Euler “De Serie Lambertina” fournit l'un des premiers exemples de la fonction de Lambert W, une fonction spéciale utilisée dans la résolution de certaines équations transcendantes. En poursuivant le travail de Johann Heinrich Lambert en 1759, qui présente une série solution d'une équation polynomiale en série générale, et en particulier la solution d'une équation trinomiale générale, Euler décrit une forme symétrique d'équation trinomiale et de sa série solution. Euler étudie les cas particuliers des séries et leurs propriétés générales, et leur utilisation pour résoudre certaines équations transcendantes. Il fournit plusieurs démonstrations de la validité du développement en série pour résoudre l'équation trinomiale, et ce faisant, il révèle plusieurs développements en série notables de fonctions telles que la fonction logarithme naturel et la factorielle.

J'ai d'abord entendu parler de la fonction W en effectuant de l'algèbre, et j'ai souhaité lire le travail original d'Euler. À ce moment-là, je ne connaissais pas le latin, et j'ai fourni un certain effort pour éviter de l'apprendre, mais finalement, après avoir épuisé toutes mes ressources disponibles, je décidais que je devrais effectuer cette traduction moi-même. Elle est le résultat de plusieurs mois de travail, d'abord pour apprendre la langue, puis pour effectivement traduire. J'ai essayé de fournir le contexte pour certains des éléments les plus opaques de “De Serie Lambertina” dans des notes explicitant ma propre compréhension du contenu, et dont j'espère qu'elles suffiront à permettre aux lecteurs avec un bagage mathématique modeste de suivre la totalité de cette traduction.

Apprendre le latin n'est pas une tâche simple. Sans l'aide de mon frère Charlie, me ramenant dans le droit chemin et me donnant des conseils de traduction, je ne peux imaginer que j'aurais eu autant de succès que ce ne fut le cas. Dans ce processus, j'ai aussi rencontré d'incroyables personnes, qui ont été assez gentilles pour répondre à mes nombreuses questions au sujet de l'écriture d'Euler. En particulier, je voudrais remercier Sebastian Koppehel, la communauté des internautes Latin StackExchange, et la communauté Latin subreddit. Je voudrais également remercier l'inimitable Alan Bruce d'être un exemple inspirant pour tous ceux qui s'intéressent à la traduction et à l'histoire des mathématiques et de la physique. Enfin, je voudrais remercier les communautés Euleriana et Euler Archive de m'avoir fourni l'opportunité de voir ma traduction révisée et publiée, de façon à ce que le travail d'Euler rencontre une plus large audience.

Notes

1. Johann Heinrich Lambert (1728-1777) y publia “Observationes Variae in Mathesin Puram” (Observations diverses en mathématiques pures) dans les *Acta Helvetica Physico-Mathematico-Botanico-Medica* Vol. III, 1758 (p. 128-168). Dans l'article, il considère une série solution générale pour trouver les racines d'un polynôme

réel de n'importe quel degré. J'essaierai de reproduire son raisonnement ici.

Dans le § 29, Euler considère le polynôme général,

$$0 = x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - ... + Hx^2 - Ix + K,$$

où $x = \alpha, \beta, \gamma, \delta,$ etc. sont les m racines de l'équation.

Prenez la somme des racines, la somme de leur carré, celle de leur cube, etc., et appelez la somme des racines $\sum r$, la somme des carrés $\sum r^2$, etc. Donc,

$$\begin{aligned}
&\alpha + \beta + \gamma + \delta + ... = \sum r \\
&\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + ... = \sum r^2 \\
&\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + ... = \sum r^3 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Ensuite, substituez les racines dans l'expression originale ainsi :

$$\begin{aligned}
&0 = \alpha^m - A\alpha^{m-1} + B\alpha^{m-2} - ... + H\alpha^2 - I\alpha + K, \\
&0 = \beta^m - A\beta^{m-1} + B\alpha^{m-2} - ... + H\gamma^2 - I\beta + K. \\
&0 = \gamma^m - A\gamma^{m-1} + B\gamma^{m-2} - ... + H\gamma^2 - I\gamma + K. \\
&0 = \delta^m - A\delta^{m-1} + B\delta^{m-2} - ... + H\delta^2 - I\delta + K. \\
&\dots
\end{aligned}$$

Toutes ces équations ensemble permettent d'obtenir

$$0 = \sum r^m - A\sum r^{m-1} + B\sum r^{m-2} - ... + H\sum r^2 - I\sum r + mK.$$

Et ainsi, on peut résoudre $\sum r^m$

$$\sum r^m = A\sum r^{m-1} - B\sum r^{m-2} + ... - H\sum r^2 + I\sum r - mK.$$

Prenons m entier parmi $1, 2, 3,...,$ on a des expressions pour les différentes sommes,

$$\begin{aligned}
&\sum r = A \\
&\sum r^2 = A\sum r - 2B \\
&\sum r^3 = A\sum r^2 - B\sum r + 3C \\
&\sum r^4 = A\sum r^3 - B\sum r^2 + C\sum r - 4D \\
&\sum r^5 = A\sum r^4 - B\sum r^3 + C\sum r^2 - D\sum r + 5E. \\
&\dots
\end{aligned}$$

On peut substituer récursivement, ainsi

$$\begin{aligned}
&\sum r = A \\
&\sum r^2 = A^2 - 2B \\
&\sum r^3 = A^3 - 3AB + 3C \\
&\sum r^4 = A^4 - 4A^2B + 2B^2 + 4AC - 4D\dots
\end{aligned}$$

mais ces expressions ne nous donnent toujours pas les racines directement.

À la place, Lambert fait une supposition spéciale : supposons qu'il existe une racine qui est purement réelle, et qui a une partie réelle plus grande que toutes les parties réelles des autres racines. (La supposition de Lambert devient la condition pour que la solution de sa série converge.) Alors, en prenant le ratio de deux sommes, à la limite lorsque $m \to \infty$, tous les termes tendent vers zéro sauf les puissances dominantes.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + ...}{\alpha^{m-1} + \beta^{m-1} + \gamma^{m-1} + \delta^{m-1} + ...} = \frac{\alpha^m}{\alpha^{m-1} = \alpha.}$$

La représentation en série de cette racine s'avère être :

$$S = \frac{A\sum r^{m-1} - B\sum r^{m-2} + ... - H\sum r^2 + I\sum r - mK}{A\sum r^{m-2} - B\sum r^{m-3} + ... + H\sum r^2 - I\sum r + (m-1)K}.$$

En utilisant cela pour résoudre l'équation trinomiale,

$$x^m + px = q$$

Lambert obtient la série solution,

$$x = \frac{q}{p} - \frac{q^m}{p^{m+1}} + m\frac{q^{2m-1}}{p^{2m+1}} - m\frac{3m-1}{2!}\frac{q^{3m-2}}{p^{3m+1}} + m\frac{(4m-1)(4m-2)}{3!}\frac{q^{4m-3}}{p^{4m+1}} - \dots$$

que j'ai mise sous la forme d'une somme :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{q^{k(m-1)+1}}{p^{km+1}} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-2}(km-j).$$

Les détails de la dérivation effective peuvent être consultés dans "Observationes" § 38.

Cette méthode de résolution pour trouver les racines d'une équation est due à Daniel Bernoulli ("Observationes de seriebus recurrentibus", Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Tome III p. 85-100 (1728)). Elle est référencée, par exemple, par Euler dans le chapitre 17 de *Introductio in analysin infinitorum* vol. I. Voir 9.

La solution de Lambert a été utilisée ici pour obtenir la série solution d'une équation trinomiale symétrique, c'est à dire d'une équation trinomiale symétrique en les paramètres α et β de la forme :

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)vx^{\alpha+\beta}.$$

2. C'est-à-dire que, parce que la fonction est symétrique par rapport aux valeurs α et β, la somme d'Euler ci-dessus peut être utilisée pour déterminer non seulement la valeur de x, mais également celle de x élevé à n'importe quelle puissance n.

3. Pour comprendre Euler, ici, notons que dans la série originale, on peut réarranger les termes pour obtenir $\frac{S-1}{n}$, du côté gauche, et $v + \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta)v^2 + ...$ du côté droit ; alors on peut librement poser $n = 0$ et obtenir un résultat nul du côté droit, et une indéterminée du côté gauche. Alors, dans cette limite, l'expression $\lim\limits_{n\to 0} \frac{x^n-1}{n} = \log x$.

4. Le raisonnement ici peut semble légèrement confus. Euler veut simplement dire que, en mettant $\beta = 0$ dans l'équation trinomiale original, on obtient $x^\alpha - 1 = \alpha v x^\alpha$ qui, réarrangé, nous donne la valeur de x en fonction de α et $v, x = (1-\alpha v)^{-1/\alpha}$. En prenant le logarithme hyperbolique, on obtient $\log x = \log\left[(1-\alpha v)^{-1/\alpha}\right]$. En développant le côté droit comme une série (comme montré), et en entrant la série en retour dans l'équation, on trouve $\log x = -\frac{1}{-\alpha v - 1/2\alpha^2 v^2 - \dots}$), et en distribuant le $-1/\alpha$, on retrouve l'expression originale de $\log x$.

5. L'article cité est le § 159 du Volume 2 de l'article d'Euler *Institutiones calculi differentialis*. On le trouve dans le chapitre 6, et il a été complètement traduit par Lan Bruce, et est téléchargeable gratuitement sur le cite 17centurymaths.com. L'article exprime une somme

$$s = \log 1 + \log 2 + \log 3 + \log 4 + ... + \log x.$$

qui est équivalente à

$$s = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right)x\ln x - x + \frac{\mathfrak{A}}{1.2x} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6x^5} - \frac{\mathfrak{D}}{7.8x^7} + \text{ etc.}$$

où $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ sont les nombres de Bernoulli pour $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$ respectivement (avec leur signe respectif inclus dans le somme et non dans les nombres). Cela donne,

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{30}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{42}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{30}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{5}{66}$$

etc.

d'où l'on obtient la série pour la factorielle,

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi}}{e^n} n^{n+\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \text{ etc.}\right)$$

Cette série est de la forme des séries de Stirling, et reliée à l'approximation de Stirling de la factorielle, qui avait été énoncée initialement par Abraham de Moivre (1667-1754). Il est intéressant de noter ici qu'Euler est bien connu pour son développement de la fonction Gamma $\Gamma(x)$ qui interpole lui-aussi la factorielle. Il a d'abord mis la fonction sous la forme d'un produit infini,

$$n! = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{k})^n}{1 + \frac{n}{k}}$$

qu'il a découvert en 1729, bien qu'en janvier 1720, il ait développé la forme intégrale,

$$n! = \int_0^1 (-\ln s)^n ds.$$

6. Cette section est la première de plusieurs sections qui sont mal numérotées dans l'article en latin. C'est la seule erreur que je garde pour maintenir l'ordre des références croisées avec l'article original.

7. Euler utilise ici un développement de Taylor de la fonction $\Phi(n - \alpha)$,

$$\Phi(n - \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k)}{k!} \frac{d^k \Phi(n)}{dn^k}.$$

   Ensuite en substituant $\Phi(n) = S$,

$$\Phi(n - \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k}{k!} \frac{d^k S}{dn^k}.$$

   Et de façon similaire pour $\Phi(n - \beta)$.

8. Cela mérite davantage d'explication. On prend l'équation

$$\Phi(n - \beta) - \Phi(n - \alpha) = (\alpha - \beta)v\Phi(n), \tag{1}$$

et on a $S = \Phi(n)$. En utilisant les désveloppement en série de $\Phi(n-\alpha)$ et de $\Phi(n-\beta)$, cette équation devient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} \frac{d^k S}{dn^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k}{k!} \frac{d^k S}{dn^k} = (\alpha - \beta) v S. \tag{2}$$

Ceci est une équation différentielle linéaire ordinaire à coefficients constants de degré infini.

On suppose une solution de la forme $S = Ce^{\lambda n}$. Alors $\frac{d^k S}{dn^k} = \lambda^k S$, donc (2) devient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda\beta)^k}{k!} S - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda\alpha)^k}{k!} S = (\alpha - \beta) v S,$$

ou, en divisant le terme S,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda\beta)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda\alpha)^k}{k!} = (\alpha - \beta) v.$$

De là, rappelons que le développement en série de Taylor de l'exponentielle est

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

On peut appliquer cela aux deux termes du côté gauche et obtenir

$$(\alpha - \beta) v = e^{-\lambda\beta} - e^{-\lambda\alpha} \tag{3}$$

qui est une expression identique à celle qu'Euler a obtenue dans le § 29, avec k à la place de e^{λ}, et le reste de la dérivation est le même que le sien.

Pourtant, la nécessité n'est pas simplement de montrer que c'est une solution, mais que c'est la seule solution à l'ODE ci-dessus. Euler s'en remet aux résultats du calcul intégral, et ne dit rien de plus en la matière. J'ai fait quelques recherches sur les équations différentielles linéaires de degré infini à coefficients constants, la référence principale étant le livre de R. D. Carmichael *Linear Differential Equations of Infinite Order* (1935). Je n'ai pas trouvé d'exemple dans l'article *Institutionum Calculi Integralis* qui soit également lié à ce sujet. Heureusement, cela a fourni un certain contexte aux résultats d'Euler de cette section.

9. Voir le chapitre 17 de l'article d'Euler *Introductio in analysin infinitorum*, E101, Lausanne : Marc-Michael Bousquet, Volume 1. Opera Omnia Series 1. Volume 8, p. 1-392.

10. Initialement mal numéroté § 31, mais parce que cela n'altère pas les références ultérieures, le nombre erroné est conservé dans la traduction en anglais.

11. Initialement mal numéroté en § 556.

12. Euler termine son article par un passage plus poétique, qui pourrait se traduire par : "dont il est suffisant pour nous d'avoir révélé la source, à laquelle on peut boire un nombre incalculable de nouvelles séries de toutes sortes. La connotation duale donne une phrase bucolique, inhabituelle dans les écrits d'Euler.