# Une autre preuve topologique de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers

Jhixon Macías

## 1. Introduction et préliminaires

En [2], on introduit une nouvelle topologie $\tau$ sur l'ensemble des entiers positifs $\mathbb{N}$ engendrée par la base $\beta := \{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\}$, où $\sigma_n := \{m \in \mathbb{N} : \mathrm{pgcd}(n, m) = 1\}$. En effet, ci-dessous est présentée une preuve de ce fait.

**Théorème 1** ([2]). *L'ensemble $\beta$ est une base pour une certaine topologie sur $\mathbb{N}$.*

*Preuve.* Il est clair que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n = \sigma_1 = \mathbb{N}$. D'un autre côté, notons que quels que soient $x, n$ et $m$ des entiers positifs, on a $\mathrm{pgcd}(x, n) = \mathrm{pgcd}(x, m) = 1$ si et seulement si $\mathrm{pgcd}(x, nm) = 1$, et par conséquent $\sigma_{nm} = \sigma_n \cap \sigma_m$. Donc $\beta$ est une base pour une certaine topologie sur $\mathbb{N}$.

$\square$

**Remarque 1.** Notons que

$$\sigma_n = \bigcup_{\substack{1\leq m\leq n \\ \mathrm{pgcd}(m,n)=1}} n\,(\mathbb{N} \cup \{0\}) + m,$$

puisque pour tout entier $x$, on a que $\mathrm{pgcd}(n, m) = \mathrm{pgcd}(n, nx + m)$ ; voir [12, Théorème 1.9]. On déduit aisément de là que $\sigma_n$ est infini pour tout entier positif $n$. De plus, on en déduit que la topologie $\tau$ est strictement plus grossière que la topologie de Golomb.

L'espace topologique $X := (\mathbb{N}, \tau)$ ne satisfait pas l'axiome $T_0$, est hyperconnexe et ultraconnexe. Entre autres propriétés, une propriété qui sera utile est présentée dans le lemme suivant.

**Lemme 1** ([2]). *Si $p$ est un nombre premier, alors $\mathrm{cl}_X(\{p\}) = p\mathbb{N}$. Ici, $\mathrm{cl}_X(\{p\})$ est la fermeture dans $X$ de l'ensemble singleton $\{p\}$.*

*Preuve.* Soit $x \in \mathrm{cl}_X(\{p\})$. Maintenant, si $x \notin p\mathbb{N}$, alors $\mathrm{pgcd}(x, p) = 1$. Par conséquent, $x \in \sigma_p$, ce qui implique que $p \in \sigma_p$, ce qui est une contradiction. Donc, $x \in p\mathbb{N}$. D'un autre côté, supposons que $x \in p\mathbb{N}$. Alors, $x = np$ pour un certain entier positif $n$. Maintenant, prenons $\sigma_k \in \beta$ tel que $x \in \sigma_k$. Cela implique que $\mathrm{pgcd}(np, k) = \mathrm{pgcd}(x, k) = 1$, donc $\mathrm{pgcd}(p, k) = 1$, et par conséquent, $p \in \sigma_k$. Donc, $x \in \mathrm{cl}_X(\{p\})$.

**Remarque 2.** Si $n = 1$, alors $\mathrm{cl}_X(\{n\}) = \mathbb{N}$. De plus, en utilisant le lemme 1, on peut prouver que pour tout entier positif $n > 1$, on a $\mathrm{cl}_X(\{n\}) = \cap_{p|n}\, p\mathbb{N}$.

L'objectif de cette courte note est de fournir une nouvelle preuve topologique de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers, distincte des preuves topologiques présentées par Fürstenberg [6]

Département de mathématiques, Université de Porto Rico, Mayaguez, Puerto Rico.
https://arxiv.org/pdf/2402.03356v3.
Traduction : Denise Vella-Chemla, septembre 2024.

et Golomb [7], qui, en fait, sont similaires, excepté pour la topologie qu'elles utilisent. De plus, on caractérise topologiquement l'infinitude de tout ensemble de nombres premiers ; voir le théorème 4.

## 2. La preuve topologique

Dénotons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Le théorème suivant caractérise l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers dans $X$.

**Théorème 2.** Il y a une infinité de nombres premiers si et seulement si $\mathcal{P}$ est dense dans $X$.

*Preuve.* Supposons qu'il y ait une infinité de nombres premiers. Alors pour tout entier positif $n > 1$, on peut trouver un nombre premier $p$ tel que $p > n$, et par conséquent, $p \in \sigma_n$ puisque $\operatorname{pgcd}(n, p) = 1$. Donc, $\mathcal{P}$ est dense dans $X$. D'un autre côté, supposons que $\mathcal{P}$ est dense dans $X$. Soient $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ une collection finie de nombres premiers et considérons l'élément de base non vide $\sigma_x$ où $x = p_1 \cdot p_2 \ldots p_k$. Notons qu'aucun des $p_i$ n'appartient à $\sigma_x$, mais puisque $\mathcal{P}$ est dense dans $X$, il doit y avoir un autre nombre premier $q$, différent de chaque $p_i$, tel que $q \in \sigma_x$. Par conséquent, il y a une infinité de nombres premiers. $\square$

Le théorème 2 indique que nous avons seulement besoin de démontrer la densité de $\mathcal{P}$ dans $X$ pour établir l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers. C'est précisément ce que nous allons démontrer.

Pour parvenir à notre objectif, considérons l'ensemble $\mathbb{N}_1 := \mathbb{N}\backslash\{1\}$ et la topologie du sous-espace

$$\tau_1 := \{\mathbb{N}_1 \cap \mathcal{O} : \mathcal{O} \in \tau\} \text{ engendré par la base } \beta_1 := \{\mathbb{N}_1 \cap \sigma_n : \sigma_n \in \beta\}.$$

Considérons également le sous-espace topologique $X_1 := (\mathbb{N}_1, \tau_1)$ et le lemme suivant,

**Lemme 2.** Si $\mathcal{P}$ est dense dans $X_1$, alors il est dense dans $X$.

*Preuve.* Il est clair que $X_1$ est dense dans $X$. Donc, par la propriété transitive de la densité, si $\mathcal{P}$ est dense dans $X_1$, alors $\mathcal{P}$ est dense dans $X$. Maintenant démontrons que $\mathcal{P}$ est dense dans $X_1$.

Théorème 3. *L'ensemble des nombres premiers est dense dans $X_1$.*

*Preuve.* Dans n'importe quel espace topologique, on a que l'union des fermetures des sous-ensembles de cet espace est contenu dans la fermeture de l'union des ensembles en question. Par conséquent $\bigcup_{p\in\mathcal{P}} \operatorname{cl}_{X_1}(\{p\}) \subset \operatorname{cl}_{X_1}\left(\bigcup_{p\in\mathcal{P}}\{p\}\right) = \operatorname{cl}_{X_1}(\mathcal{P}) \subset \mathbb{N}_1$. D'un autre côté, du lemme 1, il découle que $\bigcup_{p\in\mathcal{P}} \operatorname{cl}_{X_1}(\{p\}) = \bigcup_{p\in\mathcal{P}} (\operatorname{cl}_X(\{p\}) \cap \mathbb{N}_1) = \bigcup_{p\in\mathcal{P}} (p\mathbb{N} \cap \mathbb{N}_1) = \bigcup_{p\in\mathcal{P}} p\mathbb{N}$. Pourtant, en utilisant le théorème fondamental de l'arithmétique, on peut facilement démontrer que $\bigcup_{p\in\mathcal{P}} p\mathbb{N} = \mathbb{N}_1$, et donc, on conclut que $\operatorname{cl}_{X_1}(\mathcal{P}) = \mathbb{N}_1$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}$ est dense dans $X_1$.

Du théorème 2, du lemme 2 et du théorème 3, on peut conclure qu'il y a une infinité de nombres premiers.

**3. Remarques en conclusion**. Il y a de nombreuses preuves de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers, telles que la preuve de Goldbach [1, p. 3], celle d'Elsholtz [3], celle d'Erdös [4], celle d'Euler [5], et des preuves plus récentes ; voir [13], [8], [10], et [9]. De plus, on peut trouver plus de 200 preuves de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers dans [11]. Pourtant, les preuves de Fürstenberg et de Golomb sont les seules preuves topologiques connues a priori, qui, par essence, comme cela a été mentionné, sont basées sur la même idée, excepté que la topologie qu'elles utilisent est différente. Malgré le fait d'avoir été capable de présenter une preuve topologique qui utilise la même idée topologique (laissée en exercice au lecteur), nous présentons une preuve complètement différente, non seulement à cause de la topologie utilisée mais également par l'idée sous-jacente qui consiste à montrer que $\mathcal{P}$ est dense dans $X$.

Finalement, on laisse au lecteur le théorème suivant.

**Théorème 4.** *Soit $A \subset \mathcal{P}$ non-vide. Alors, $A$ est dense dans $X$, si et seulement si $A$ est infini.*

*Preuve.* Remplaçons $\mathcal{P}$ par $A$ dans la preuve du théorème 2. □

Le théorème 4 entraîne une nouvelle relation entre la théorie des nombres et la topologie, ou du moins l'espérons-nous. En effet, pour répondre à des questions telles que : "y a-t-il une infinité de nombres premiers de Mersenne ?" ou bien "Y a-t-il une infinité de nombres premiers de Fibonacci ?", il suffit de vérifier la densité de ces ensembles sur $X$. Certainement que cela peut ne pas être facile, mais cela est possible. L'avantage de travailler avec $X$ est que cet espace est hyperconnexe, et donc tout sous-ensemble est soit dense soit dense nulle part.

**Remerciements.** L'auteur remercie le Professeur Hillel Furstenberg pour une correspondance par e-mails bénéfique qui a considérablement amélioré ce travail.

**Références**

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler. *Proofs from the Book*, Springer, Berlin, 1999.

[2] E. Aponte, J. Macias, L. Mejías, J. Vielma, Strongly comected topology on the positive Integers, Submitted.

[3] C. Elsholtz, Prime divisors of thin sequences, *Amer. Math. Monthly* 119 (4) (2012), 331-333.

[4] P. Erdös, Über die Reihe $\sum 1/p$. *Mathematica, Zutphen* B7 (1938), 1-2.

[5] L. Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum.* Apud Marcum-Michaelem Bousquet et Socios, Berlin. Germany, 1748.

[6] H. Furstenberg. On the infinitude of primes. *Amer. Math. Monthly* 62 (5) (1955), 353.

[7] S. W. Golomb, A connected topology for the integers, *Amer. Math. Monthly* 66 (8) (1959), 363-665.

[8] H. Göral, $p$-Adic metrics and the infinitude of primes, *Math. Mag.* 93 (1) (2020), 19-22.

[9] H. Göral, The Green-Tao theorem and the infinitude of primes in domains, *Amer. Math. Monthly* 130 (2) (2023), 114-125.

[10] J. Mehta, A short generalized proof of infinitude of primes, *College Math.* J. 53 (1) (2022), 52-53.

[11] R. Meštrović, Euclid's theorem on the infinitude of primes: a historical survey of its proofs (300 BC-2017) and another new proof, preprint, https://arxiv.org/pdf/1202.3670.

[12] I. Niven, H. Zuckerman, and H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers.* John Wiley et fils, New York, 1991.

[13] S. Northshield, Two short proofs of the infinitude of primes, *College Math.* J. 48 (3) (2017), 21-216.