Chapitre 6 : méthode d'Atle Selberg (extrait du livre de Linnik et Gel'fond *Elementary methods in the analytic theory of numbers*, page 119) [1]

1. Formule asymptotique de Selberg

En 1946, le mathématicien norvégien Atle Selberg a introduit une nouvelle approche élémentaire qui a profondément révolutionné la théorie du crible et ouvert la voie à une preuve élémentaire du théorème des nombres premiers.

Nous commençons par poser $x = 2N$ et spécifier les résidus par le tableau suivant :

$$a_i \equiv 0 \pmod{p_i}, \quad b_i \equiv 2N \pmod{p_i}$$

si $p_i \nmid 2N$, et $a_i = b_i = 0$ si $p_i \mid 2N$. Nous obtenons alors le théorème suivant :

Théorème 1 *Il existe une constante N_0 telle que, pour tout $N > N_0$, il existe toujours une solution à l'équation*

$$2N = q_1 + q_2$$

où q_1 et q_2 sont des nombres presque premiers, ayant chacun au plus 7 facteurs premiers.

Il convient de mentionner que la constante 7 n'est pas la meilleure possible. Elle peut être diminuée par la même méthode, bien que les calculs requis deviennent alors beaucoup plus complexes.

Une borne supérieure pour la fonction

$$P(D, x; p_1, \ldots, p_r)$$

peut être obtenue par une méthode exactement similaire, la seule différence étant que nous commençons à rejeter les nombres "superflus" en nombre impair. Nous obtenons ainsi le résultat :

$$P(2, x, 3, 5, \ldots, p_r) < c \prod_{p \mid N_1} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \frac{x}{\log^2 x}.$$

Il faut également souligner que la constante c obtenue dans cette borne est relativement grande.

2. Estimations fondamentales et densités

Pour évaluer précisément les performances du crible, il est nécessaire d'analyser le comportement moyen des fonctions de choix de poids symbolisées par $P(n)$. On cherche à majorer la somme quadratique associée pour s'assurer de la régularité de la distribution.

Considérons l'inégalité de base sur la somme des carrés :

$$\sum_{n<x} P^2(n) \leq x \sum_{k=(d_x d_y)<x} \frac{k}{(d_1 d_2)^3} + \sum_{d_x d_y < x} \frac{1}{d_1 d_2}$$

1. *Elementary methods in the analytic theory of numbers*, A. O. Gel'fond, Y. V. Linnik, traduction D.E. Brown, éd. I. N. Sneddon, Pergamon Press (Oxford, Londres, etc.), 1966.

$$
\begin{aligned}
&\leq x \sum_{k<x} \frac{1}{k^3} \sum_{v_1 p_k < x} \sum_{v_2 p_k < x} \frac{1}{v_1^2 v_2^2} + \sum_{n<x} \frac{\tau(n)}{n} \\
&\leq x \left(\sum_{k<x} \frac{1}{k^3} \right) \left(\sum_{r<x} \frac{1}{r^2} \right)^2 + c' \log^2 x \leq c'' x,
\end{aligned}
$$

où c'' est une constante absolue et $\tau(n)$ désigne la fonction nombre de diviseurs.

En substituant cette inégalité dans la relation principale (6.2.3), on obtient le contrôle de la variance :

$$\sum_{n<x} P^2(n) \leq c_2 \frac{x^3}{\log^4 x}.$$

Sur la base de ces résultats, on peut affirmer que la suite étudiée possède une *densité positive* au sens de Schnirelmann. Par conséquent, cette famille de nombres peut servir de base pour la suite des entiers positifs.

En d'autres termes, il existe un entier k, dépendant uniquement de α_0, tel que tout entier m peut s'exprimer comme la somme d'au plus k termes de cette suite.