Métriques non-archimédiennes en topologie
J. De Groot

1. On se demande sous quelles conditions un espace topologique est mesurable d'une façon non-archimédienne, i.e. sous quelles conditions on peut décrire la structure topologique de l'espace en définissant une métrique adéquate qui satisfait - au lieu de l'axiome du triangle - l'axiome plus fort

$$\rho(\xi, \eta) \leq \max[\rho(\xi, \zeta), \rho(\eta, \zeta)]. \tag{1}$$

Nous trouverons les conditions nécessaires et suffisantes suivantes :

I. l'espace est mesurable (cf. Nagata [1], Smirnof [2]),

II. l'espace est *fortement de dimension* 0.

La propriété II signifie que n'importe quels deux ensembles disjoints fermés dans l'espace peuvent être séparés (par l'ensemble vide). Nous prouverons de plus que les conditions I et II sont équivalentes aux propriétés topologiques suivantes : l'espace est un espace de Hausdorff ayant une NS-base de dimension 0.

On appelle une base ouverte de l'espace une *NS-base*, si c'est la somme d'un nombre dénombrable de familles localement finies (une famille d'ensembles ouverts est localement finie, si tout point de l'espace est contenu dans un ensemble ouvert qui intersecte au plus un nombre fini d'ensembles de la famille). Si les ensembles de cette base sont à la fois ouverts et fermés, nous l'appelons une *NS-base de dimension 0.*

Dans un espace métrique M, une métrique non-archimédienne peut par conséquent être introduite (d'une manière topologiquement équivalente) si et seulement si M est fortement de dimension 0. Cela définit un problème soulevé par A. F. Monna [4] il y a quelques années. La question reste irrésolue de savoir si la condition de forte dimension 0 peut être remplacée par une forme plus faible de dimension 0 (n'importe quel point et un ensemble fermé, mutuellement disjoints, peuvent être séparés). Bien sûr, la réponse est positive dans le cas d'espaces mesurables séparables, car les deux notions sont alors équivalentes (cf. [3, p. 15]). Pourtant, il me semble probable que ces notions ne sont pas équivalentes dans les espaces métriques généraux (cf. [3, appendice], pour le cas des espaces topologiques plus généraux). Existe-t-il un espace métrique de dimension (faiblement) 0 dans lequel deux ensembles fermés disjoints donnés ne peuvent pas être séparés ? Dans un tel espace il serait impossible d'introduire une métrique non-archimédienne.

Les mesures non-archimédiennes sont de quelque intérêt en topologie car, *si* elles peuvent être introduites, le traitement d'un certain nombre de problèmes devient beaucoup plus simple (essentiellement parce que les ϵ-voisinages de deux points différents sont soit disjoints soit identiques).

Dans le §2 nous donnons - à cause de sa simplicité - une solution du théorème de caractérisation pour le cas bien connu des espaces métriques *séparables.* Pour prouver un théorème de caractérisation

---

Reçu par les éditeurs le 2 juin 1955.
Traduction Denise Vella-Chemla, 13.4.2022.

dans les espaces métriques généraux, nous définissons dans le §3, pour tout nombre cardinal β, un espace de Hilbert généralisé N^β tel qu'un espace arbitraire mesurable fortement de dimension 0 puisse être intégré dans N^β si β est choisi de façon adéquate. Cet espace de Hilbert, une fois défini, amène à une preuve du Théorème I, suggérée par les méthodes utilisées par Urysohn et Smirnof. Dans le §5, nous donnons au théorème de caractérisation sa forme finale.

2. **Le cas séparable.** Soit S un espace topologique satisfaisant

(1°) S est un espace de Hausdorff (ou plus généralement, un T_0-espace).

(2°) Dans S, il existe une base dénombrable consistant en des ensembles à la fois ouverts et fermés $\{B_i\}, (i = 1, 2, \ldots)$.

À chaque point $x \in S$ attachons une séquence ordonnées d'entiers $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ telle que $x_i = 0$ si $x \notin B_i$ et $x_i = 1$ si $x \in B_i$. La distance $\rho(x, y)$ entre deux points est définie par

$$\rho(x, y) = \max_n \left\{ \frac{1}{n} \left| x_n - y_n \right| \right\}.$$

Il est facile de voir que cette fonction de distance est non-archimédienne. Puisque, inversement, tout espace métrique séparable non-archimédien satisfait trivialement les propriétés (1°) et (2°), *les espaces mesurables séparables non-archimédiens sont ainsi topologiquement équivalents aux espaces de Hausdorff ayant une base dénombrable consistant en des ensembles à la fois ouverts et fermés.*

Cela donne, incidemment, une solution simple au problème de la mesurabilité dans le cas des *espaces séparables de dimension 0.*

3. **Un espace de Hilbert généralisé non-archimédien N^β.** Soit $\beta \geq \aleph_0$ le cardinal d'un ensemble d'indices $\{\alpha\}$. L'ensemble des paires ordonnées $\{n\alpha\}$, où n parcourt les entiers naturels, a le même cardinal β. Un point de N^β est n'importe quelle fonction caractéristique $\xi_{na} = \xi(n\alpha)$ (qui par conséquent ne prend que les valeurs 0 et 1) définie sur l'ensemble $\{n\alpha\}$. La distance entre deux fonctions $\xi(n\alpha)$ et $\eta(n\alpha)$ est définie par

$$\rho(\xi, \eta) = \max_{n,\alpha} \left\{ \frac{1}{n} |\xi(n\alpha) - \eta(n\alpha)| \right\}. \tag{2}$$

De façon évidente, N^β est semi-métrique.

Pour prouver (1), pour des points différents ξ et η et un certain $n = m$, on note que

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{1}{m} |\xi(m\alpha) - \eta(m\alpha)| = \frac{1}{m}$$

et donc

$$\xi(m\alpha) = 1 \text{ ou } 0, \qquad \eta(m\alpha) = 0 \text{ ou } 1.$$

Maintenant, de façon évidente

$$\max \{ |\xi(m\alpha) - \zeta(m\alpha)|, |\eta(m\alpha) - \zeta(m\alpha)| \} = 1,$$

dont (1) découle.

4. Théorème I. *Un espace topologique est mesurable de façon non-archimédienne si et seulement si c'est un espace de Hausdorff (ou même un T_0-espace) ayant une NS-base de dimension 0.*

Preuve. Un espace métrique non-archimédien M est bien sûr un espace de Hausdorff. Pour définir une NS-base de dimension 0 dans M, appelons $\{U_\epsilon\}$ (ϵ arbitraire mais fixé) un recouvrement de M par des ϵ-voisinages disjoints (ouverts et fermés) de certains points. L'existence d'un tel recouvrement découle d'une induction transfinie aisée, en considérant le fait que les ϵ-voisinages de deux points différents sont soit disjoints soit identiques. Par conséquent, la somme d'un nombre arbitraire (fini ou transfini) de ϵ-voisinages disjoints est ouverte et fermée et est à une distance $\geq \epsilon$ de son complémentaire dans M. Maintenant la somme d'un nombre dénombrable de familles $\{U_{1/n}\}(n = 1, 2, \ldots)$ est de façon évidente la NS-base requise de dimension 0.

Inversement, soit H un T_0-espace, dans lequel le nombre dénombrable de familles localement finies $\{U_{n\alpha}\}(n = 1, 2, \ldots)$ est donné, tels que le système de tous les $U_{n\alpha}$ à la fois ouverts et fermés est une base de H. Soit β le cardinal de l'ensemble $\{\gamma\}$ de tous les indices possibles $\gamma = n\alpha$. On pose $U_{n(n\alpha)} = U_{n\alpha}, U_{n(m\alpha)} = 0 (n \neq m)$. Les familles $\{U_{n\gamma}\}$ restent localement finies. On définit pour tout $x \in H$ et toute paire $n\gamma$ une fonction $\xi(x)$

$$\xi_{n\gamma}(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in U_{n\gamma}, \\ \\ 0, \text{ si } x \in H \backslash U_{n\gamma}. \end{cases}$$

On envoie n'importe quel $x \in H$ sur $f(x) \in N^\beta$ avec $f(x) = \{\xi_{n\gamma}(x)\}$.

L'application f est bijective puisque, à chaque paire de points différents x et y, il correspond un $U_{n\alpha}$ contenant x et ne contenant pas y. Donc $\xi_{n\alpha}(x) = 1, \xi_{n\alpha}(y) = 0$, et $f(x) \neq f(y)$.

L'application f est continue. Soit O_ϵ un ϵ-voisinage avec $\epsilon = 1/m$ (m suffisamment grand) dans N^β d'un point $f(x) = \{\xi_{n\alpha}(x)\}$. Pour $n \leq m$ il y a seulement un nombre fini d'ensembles $U_{n\alpha}$ qui intersectent un certain voisinage $O(x)$ de x. Ces $U_{n\alpha}$ sont de deux sortes : les $U_{k\alpha}$ qui contiennent x, et les $U_{l\alpha}$ qui ne contiennent pas x. Soit

$$V(x) = \left[\bigcap_{k \leq m} U_{k\alpha} \backslash \bigcup_{l \leq m} U_{l\alpha}\right] \cap O(x).$$

$V(x)$ est de façon évidente un voisinage ouvert de x. Nous allons montrer que

$$f(V(x)) \subset O_\epsilon.$$

En effet pour tout point $y \in V(x)$ et $n \leq m$: $\xi_{n\alpha}(x) - \xi_{n\alpha}(y) = 0$ puisque x et y sont tous les deux dans $U_{n\alpha}$ ou dans son complémentaire. Maintenant la relation

$$\rho(f(x), f(y)) = \rho(\xi_{n\alpha}(x), \xi_{n\alpha}(y)) \leq \frac{1}{m+1}$$

est triviale, puisque (2) contient le facteur $1/n$.

L'application f est ouverte. Considérons un ensemble ouvert $O \subset H$ et soit $x \in O$. Il y a un certain $U_{s\alpha}$ avec $x \in U_{s\alpha} \subset O$. Par conséquent $\xi_{s\alpha}(x) = 1$. Maintenant, si la condition $\rho(f(x), f(y)) < 1/s$ est remplie pour un certain point $y \in H$, il s'ensuit de (2) que $\xi_{s\alpha}(y) = 1$, ce qui nous donne $y \in U_{s\alpha} \subset O$. L'ensemble $f(O)$ est donc ouvert dans $f(H)$.

L'application f étant topologique introduit ainsi la métrique non-archimédienne requise dans H en considérant $f(H)$ plutôt que H.

5. Théorème II. *Un espace mesurable est mesurable de façon non-archimédienne si, et seulement s'il est fortement de dimension 0.*

Corollaire. *Une métrique non-archimédienne peut être introduite dans un espace métrique si, et seulement si, l'espace métrique est fortement de dimension 0.*

Preuve. Selon [1; 2] un espace topologique R est mesurable si, et seulement si, R est régulier et a une NS-base $\{O_{n\alpha}\}$[1]. Soit $O = O_{n\alpha}$ un ensemble arbitraire ouvert de cette NS-base. Si R est fortement de dimension 0, O peut être considéré comme la somme d'un nombre dénombrable d'ensembles mutuellement disjoints à la fois ouverts et fermés

$$O = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Pour prouver cela, introduisons une métrique dans R et considérons les ϵ-voisinages V_ϵ avec $\epsilon = 1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ de $R \backslash O$

$$V_\epsilon = V_\epsilon(R \backslash O).$$

Si les ensembles disjoints ouverts et fermés $U_i \subset O (i \leq n-1)$ sont déjà définis, nous procèdons ainsi pour définir les $U_n \subset O$ de la manière suivante. Les ensembles disjoints fermés $R \backslash O$ et

$$S = [R \backslash V_{1/n}] \bigcup \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} U_i \right]$$

peuvent être séparés. Soit T un ensemble à la fois ouvert et fermé contenant S et contenu dans O. Alors

$$U_n = T \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i.$$

De cette manière, tout $O_{n\alpha}$ est décomposé en un nombre dénombrable de $U_{in\alpha}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ disjoints à la fois ouverts et fermés. Le nombre dénombrable de familles $\{U_{in\alpha}\} = \{U_{k\alpha}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, engendré par l'énumération des paires $k = (i, n)$ est une NS-base de dimension 0 de manière évidente. Maintenant nous pouvons appliquer le Théorème I. R est par conséquent mesurable de façon non-archimédienne.

Inversement, il est facile de voir que tout espace métrique non-archimédien est fortement de dimension 0 en introduisant une NS-base de dimension 0 (ce qui est possible selon le Théorème I) et en

[1] Dans la définition d'une NS-base dans le §1 nous considérons des "familles", alors que Smirnof [2] parle de "recouvrements", i.e. des familles qui sont des recouvrements. La différence n'est pas pertinente, puisque toute famille devient un recouvrement (localement fini) en ajoutant l'espace entier comme un élément à chaque famille.

utilisant la normalité d'un espace métrique.

Ajouté à la preuve. Le présent manuscrit a été préparé il y a plusieurs années. Depuis, un court résumé, contenant également quelques applications a été publié par H. de Vries et l'auteur (Ind. Math. vol. 17 (1955) p. 222-224). Entre temps, deux articles sur la théorie de la dimension dans les espaces métriques ont été amenés à la connaissance de l'auteur (M. Katětov, Čz. Mat. Ž. Tsjechoslov. Mat. Zj. vol. 2 (77) (1952) p. 333-368 (en Russe) et K. Morita, Math. Ann. vol. 128 (1954) p. 350-362). Maintenant il est clair - et cela a déjà été remarqué par A. H. Stone (*in litt.*) - que les théorèmes sur la mesurabilité de Nagata et Smirnof peuvent s'appliquer à certains résultats sur les espaces de dimension 0 contenus dans ces articles (voir e.g. §10 dans l'article de Morita ; tous les espaces dans cet article sont supposés être métriques), ce qui amène une preuve alternative (mais pas forcément plus simple) de nos résultats (fortement de dimension zéro se dit de dimension zéro dans les articles en question ; pourtant, le problème mentionné en 1 reste non résolu).

Récemment, J. Nagata (Proc. Jap. Ac. vol. 32 (1956) p. 237-243), en s'appuyant fortement sur des résultats en théorie de la dimension dans les espaces métriques généraux a prouvé une généralisation intéressante d'une grande portée de nos résultats en caractérisant la dimension (finie) d'un espace mesurable en utilisant la possibilité d'assigner une certaine mesure à l'espace (cette métrique devient non-archimédienne dans le cas de la dimension zéro).

Références

1. J. Nagata, On a necessary and sufficient condition of metrizability, J. Inst. Polyt. Osaka vol. 1 (1950) p. 93-100.

2. J. Smirnof, A necessary and sufficient condition for metrizability of a topological space, Doklady Akademii Nauk SSSR. (N.S.) vol. 77 (1951) p. 197-200.

3. W. Hurewicz and H. Wallman, Dimension theory, Princeton, 1941. 4. A. F. Monna, Remarques sur les métriques non-archimédiennes, I, Neder. Akad. Wetensch. vol. 53 (1950) p. 470-481.

Université d'Amsterdam.