

Suites de zéros et uns engendrées par des règles de production particulières N.G. de Bruijn

1. Introduction

Considérons la règle suivante pour la production de suites (finies ou infinies) de 0 et 1 : prenons une suite quelconque et remplaçons chaque 0 par 10 et chaque 1 par 100. Exemple : la suite finie 10010 se transforme en 100101010010. La nouvelle suite est appelée successeur de l'ancienne, et l'ancienne est appelée prédécesseur de la nouvelle. Le processus de remplacement de 0 par 10 et de 1 par 100 sera appelé déflation. L'action inverse, appelée inflation, ne s'applique qu'aux suites subdivisibles en groupes de suites de lettres égales à 10 ou à 100. (Les termes inflation et déflation ne sont pas très évocateurs dans ce contexte. Ils ont été choisis en raison de leur correspondance avec les opérations des pavages de Penrose mentionnés ci-dessous.)

Nous devons être un peu plus prudents quant à la définition de la déflation dans le cas de séquences doublement infinies, c'est-à-dire de séquences indexées par les éléments de \mathbb{Z} , puisque l'indexation de la séquence successeur doit être convenue. On définit le successeur principal par la condition que le chiffre 0 ou 1 à l'indice 0 soit remplacé par un bloc de deux ou trois chiffres (10 ou 100) commençant à l'indice 0. En indiquant l'indice 0 par un soulignement, on donne un exemple : la séquence

$$\dots 010\underline{1}001010\dots$$

a pour successeur principal.

$$\dots 1010010\underline{1}0010101001010010\dots$$

Toute séquence pouvant être obtenue à partir du successeur principal d'une séquence p par un décalage sera appelée successeur de p . (Un décalage transforme une séquence s en une séquence t telle que $s(n) = t(n+k)$ pour tout n , pour un k fixé). Toute suite q ayant p comme successeur est appelée prédécesseur de p .

La question centrale de cet article est de déterminer quelles suites p ont des prédécesseurs de tous ordres $p_{-1}, p_{-2}, p_{-3}, \dots$ ($p_0 = p$, et p_{-n} est un successeur de p_{-n-1}). Ces suites p seront caractérisées complètement au moyen d'une formule simple. Les entiers de ces suites sont donnés au moyen d'une formule impliquant la fonction "plafond".

$$(1.1) \quad p_\gamma(z) = [\gamma + (z+1)(\sqrt{2}-1)] - [\gamma + z(\sqrt{2}-1)] \quad (z \in \mathbb{Z}),$$

où γ est une constante réelle (le cas où γ est de la forme $m + n(\sqrt{2}-1)$ avec les entiers m et n est légèrement exceptionnel ; voir section 6). Et il s'avère que le successeur de cette suite p_γ est p_δ , où

Actes de Mathématiques A 84 (1), 20 mars 1981

Département de Mathématiques, Université de Technologie d'Eindhoven, B.P. 513, 5600 MB Eindhoven, Pays-Bas.

Communiqué lors de la réunion du 27 septembre 1980

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla, juillet 2025.

$$\delta = (\gamma - [\gamma])(1 - \sqrt{2}).$$

L'intérêt pour ces problèmes a été éveillé par l'étude des pavages non périodiques du plan de R. Penrose. Les suites p_γ ci-dessus en forment une sorte d'analogie unidimensionnel. Plusieurs des propriétés intrigantes découvertes par R. Penrose et par J.H. Conway (voir [4, 7]) ont leurs analogues pour ces suites avec des prédécesseurs de tous ordres. Inversement, l'auteur a pu montrer que les motifs de Penrose dans le plan peuvent être obtenus au moyen de formules similaires à (1.1).

La section 10 présente d'autres règles de production permettant d'obtenir les mêmes résultats. C'est principalement pour des raisons explicatives que l'auteur s'est limité à la règle particulière $1 \rightarrow 100, 0 \rightarrow 10$ dans les neuf premières sections.

Les suites que nous produisons comme exemples dans la section 2 sont d'un type qui a été largement étudié. Nous nous référons à [10] pour l'article de synthèse de K.B. Stolarsky et à la thèse de doctorat de F.M. Dekking [1]. (L'auteur remercie M. Dekking pour ces références, et M. Stolarsky pour avoir souligné que [3] contient de nombreuses références qui n'étaient pas citées dans son article de synthèse). Il semble cependant que personne ne se soit demandé quelles suites ont une infinité de prédécesseurs.

Les outils centraux de cet article sont les théorèmes 5.1, 5.2 et 5.3. Ceux-ci sont apparus avec divers degrés de généralité dans la littérature. La forme la plus proche de celle présentée ici se trouve dans J. Lambek et L. Moser [6] (bien qu'à première vue elle semble complètement différente), mais nous pouvons également nous référer à R. Sprague [9], à E.N. Gilbert [5] et à A.S. Fraenkel [2]. La forme bilatérale donnée dans les théorèmes 5.1, 5.2 et 5.3, utilisant à la fois des planchers et des plafonds, semble très bien adaptée aux problèmes de cet article.

2. Construction de suites avec des prédécesseurs de tous ordres

Commençons par la suite constituée d'un seul élément 1 et trouvons ses successeurs :

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 \\ p_1 &= 100 \\ p_2 &= 1001010 \\ p_3 &= 10010101001010010 \\ &\dots\dots\dots \dots \dots\dots \end{aligned}$$

Puisque p_1 est une extension de p_0 (c'est-à-dire que p_0 est un segment initial de p_1), on en déduit que pour tout n , p_{n+1} est une extension de p_n . En continuant ainsi indéfiniment, on obtient une suite infinie

$$p = 1001010100101001010010100101001010010\dots$$

qui est son propre successeur et a donc des prédécesseurs de tous ordres.

On peut également obtenir une suite doublement infinie de cette manière. Pour avoir des prédécesseurs,

chaque 1 de la suite doit être précédé de 0, on commence donc par 01 (et on souligne le 1) :

$$\begin{array}{rcl}
 q_0 & = & 0\underline{1} \\
 q_1 & = & 10\underline{1}00 \\
 q_2 & = & 10010\underline{1}001010 \\
 & \dots & \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{array}$$

Là encore, la première ligne est un segment central de la seconde, et chaque ligne prolonge donc la précédente. La répétition infinie de la déflation produit une suite doublement infinie qui est son propre successeur principal :

$$(2.1) \quad \dots 010010100101010010\underline{1}00101010010100101001010010 \dots$$

Cette suite a pour n -ième entrée

$$(2.2) \quad [(n + 1)(\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{2}\sqrt{2}] - [n(\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{2}\sqrt{2}].$$

Cela découle du fait que la suite d'entrées (2.2) est son propre successeur principal (théorème 6.1) et que q_0 est une sous-suite.

D'autres séquences avec des prédécesseurs de tous ordres peuvent être construites en combinant la procédure ci-dessus avec des décalages. Commençons par les lignes ci-dessus q_0, q_1, q_2, \dots . Nous appliquons des décalages horizontaux arbitraires à ces lignes, à condition que le q_k décalé (appelons-le r_k) utilise au moins les positions d'index $-k, \dots, k$. Appliquons ensuite la méthode de diagonalisation. Sélectionnons une sous-séquence r_{k_1}, r_{k_2}, \dots telle que la colonne 0 soit constante à partir d'un certain point. Sélectionnons ensuite une sous-séquence telle que les colonnes indexées $-1, 0, 1$ soient constantes à partir d'un certain point. Par diagonalisation, nous obtenons une sous-séquence telle que chaque colonne soit constante à partir d'un certain point. Ces constantes forment une suite avec des prédécesseurs de tous ordres.

Ce qui se passe réellement peut être décrit plus facilement par des interprétations "diophantiennes" comme (2.2), mais nous avons présenté cette méthode de déflation, de décalages et de diagonalisation avec autant de détails, car elle est plus ou moins identique à la construction par Conway d'un nombre indénombrable de pavages de Penrose différents.

Nous donnons un exemple simple de production par décalages. Nous commençons par $0\underline{1}0$. À chaque étape, nous effectuons une déflation suivie d'un décalage vers la droite.

$$\begin{array}{c}
 01\underline{0} \\
 1010\underline{0}10 \\
 100101001\underline{0}1010010 \\
 1010010100101010\underline{0}1010010100101010010 \\
 \dots \dots \dots
 \end{array}$$

Les lignes 1, 3, 5, ... convergent maintenant vers

$$(2.3) \quad \dots 0010100101001\underline{0}101001010010\dots$$

et les lignes 2, 4, 6, ... convergent vers

$$(2.4) \quad \dots 0010100101010\underline{0}101001010010\dots$$

Ces suites sont obtenues l'une à partir de l'autre par déflation plus décalage. Notons la symétrie des deux, si l'on néglige les entrées indexées par -1 et -2 (où les suites diffèrent). Si $n \geq 0$, les entrées n -ième et $(-3 - n)$ -ième sont identiques.

L'entrée n -ième de (2.3) peut être montrée comme étant

$$p_0(n+1) = \lceil (n+2)(\sqrt{2}-1) \rceil - \lceil (n+1)(\sqrt{2}-1) \rceil$$

et l'entrée n -ième de (2.4) est

$$q_0(n+1) = \lfloor (n+2)(\sqrt{2}-1) \rfloor - \lfloor (n+1)(\sqrt{2}-1) \rfloor.$$

(Pour $\lceil \cdot \rceil$, voir la section 4 ; pour la définition de p_0 et q_0 , voir la section 8). On remarque que le successeur principal de q_0 est p_0 , et que le successeur principal de p_0 est obtenu en décalant q_0 d'une place vers la droite.

3. Relations avec l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Si l'on étudie le nombre de 0 et le nombre de 1 dans les suites infinies produites à la section 2, le nombre $\sqrt{2}$ apparaît comme le rapport de la densité des 0 sur la densité des 1. Si l'on note provisoirement ces densités par a et b , on observe que la déflation les transforme en nombres proportionnels à $a + 2b$ et $a + b$. Les vecteurs propres de la transformée $a^* = a + 2b$, $b^* = a + b$ sont $(\sqrt{2}, 1)$ et $(\sqrt{2}, -1)$.

La production de p_0, p_1, \dots (définie au début de la section 2) est liée aux fractions continues. Si a_n est le nombre de 0 dans p_n , b_n le nombre de 1, alors nous avons $a_n = 2c_n$, $a_n + b_n = c_n + d_n$, où c_n/d_n est la n -ième convergente de $\sqrt{2} - 1$:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{12}{29}, \dots$$

Comme ces fractions convergent très rapidement, il n'est pas trop difficile de montrer que, dans la suite infinie p , le nombre de 1 parmi les N premiers éléments est $N(\sqrt{2} - 1) + O(1)$. Nous ne le faisons pas, car il semble plus intéressant de commencer par l'autre extrémité, à savoir avec les formules explicites de la section 6.

4. Plancher et plafond

Si x est un nombre réel, alors le "plancher de x " (notation $\lfloor x \rfloor$) est le plus grand entier $\leq x$ (généralement appelé partie entière de x , notée $[x]$, mais dans cet article, nous préférons la notation $\lfloor \cdot \rfloor$ pour des raisons de symétrie), et le "plafond de x " (notation $\lceil x \rceil$) est le plus petit entier

$\geq x$. Nous avons donc

$$(4.1) \quad \lfloor x \rfloor \geq x \leq \lceil x \rceil, \quad \lfloor x \rfloor + \lceil -x \rceil = 0.$$

$$(4.2) \quad \lfloor (\lceil x \rceil - x) \rfloor = \lceil (\lfloor x \rfloor - x) \rceil = 0.$$

On note également que pour $x, y \in \mathbb{R}$

$$(4.3) \quad x + y \in \mathbb{Z} \implies \lfloor x \rfloor + \lceil y \rceil = x + y.$$

5. Suites de zéros et uns reliées à des paires de fonctions monotones

Soit f une fonction non décroissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . À f on peut associer les sous-ensembles Φ_f et Ψ_f de \mathbb{Z} , donnés par

$$(5.1) \quad \Phi_f = \{z \in \mathbb{Z} \mid \lfloor f(z+1) \rfloor = \lfloor f(z) \rfloor\},$$

$$(5.2) \quad \Psi_f = \{z \in \mathbb{Z} \mid \lceil f(z+1) \rceil = \lceil f(z) \rceil\}$$

Théorème 5.1. *Soient f et g des fonctions non décroissantes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , avec $f(x) + g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\Phi_f \cap \Psi_g = \emptyset, \quad \Phi_f \cup \Psi_g = \mathbb{Z}.$$

Preuve. Soit $z \in \mathbb{Z}$. Par (4.3), on a

$$\lfloor f(z+1) \rfloor + \lceil g(z+1) \rceil = z + 1, \quad \lfloor f(z) \rfloor + \lceil g(z) \rceil = z.$$

En posant

$$\lfloor f(z+1) \rfloor - \lfloor f(z) \rfloor = a, \quad \lceil g(z+1) \rceil - \lceil g(z) \rceil = b,$$

on déduit $a + b = 1$. Par monotonie $a \geq 0, b \geq 0$. Puisque a et b sont des entiers, on a soit $a = 0, b = 1$, soit $a = 1, b = 0$. Cela signifie que z appartient exactement à l'un des deux ensembles Φ_f, Ψ_g .

La situation du théorème 5.1 est caractérisée par une fonction f telle que $f(x)$ et $x - f(x)$ soient non décroissantes. À une telle fonction f , on peut associer une suite q_f de 0 et 1 définie par

$$q_f(z) = \lfloor f(z+1) \rfloor - \lfloor f(z) \rfloor \quad (z \in \mathbb{Z}).$$

Donc q_f prend ses 0 parmi les éléments de Φ_f et ses 1 parmi les éléments de Ψ_g , où $g(x) = x - f(x)$. Si de plus

$$p_f(z) = \lceil f(z+1) \rceil - \lceil f(z) \rceil \quad (z \in \mathbb{Z}),$$

alors $p_f(z) + q_g(z) = 1$ (voir la preuve ci-dessus), donc p_f prend ses 0 parmi les éléments de Ψ_f et ses 1 parmi les éléments de Φ_g .

Le théorème suivant montre comment paramétrer ces ensembles.

Théorème 5.2. Soient f et g des fonctions continues strictement croissantes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , avec $f(x) + g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On suppose

$$(5.3) \quad f(x) \rightarrow \infty, \quad g(x) \rightarrow \infty, \quad f(-x) \rightarrow \infty, \quad g(-x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Soit h la fonction réciproque de f , et k la fonction réciproque de g . Alors, pour les ensembles de 0 et 1 de q_f et de p_f :

$$\begin{aligned} \text{ensemble de 0 de } q_f &= \text{ensemble de 1 de } p_g &= \Phi_f &= \{ \lfloor k(n) \rfloor \mid n \in \mathbb{Z} \}, \\ \text{ensemble de 1 de } q_f &= \text{ensemble de 0 de } p_g &= \Psi_g &= \{ \lceil h(n) \rceil - 1 \mid n \in \mathbb{Z} \}, \\ \text{ensemble de 1 de } p_f &= \text{ensemble de 0 de } q_g &= \Phi_g &= \{ \lceil h(n) \rceil \mid n \in \mathbb{Z} \}, \\ \text{ensemble des 0 de } p_f &= \text{ensemble des 1 de } q_g &= \Psi_f &= \{ \lceil k(n) \rceil - 1 \mid n \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $g(k(n)) = n$, d'où

$$g(\lfloor k(n) \rfloor) \leq n, \quad n < g(\lfloor k(n) \rfloor + 1).$$

En posant $\lfloor k(n) \rfloor = i$, on en déduit $g(i) \leq n < g(i+1)$, d'où $\lceil g(i) \rceil \leq n < \lceil g(i+1) \rceil$. De (5.2) il résulte que i est extérieur à Ψ_g , donc d'après le théorème 5.1, i appartient à Φ_f . Chaque élément de Φ_f peut être obtenu de cette façon, car si $i \in \Phi_f$ on a $i \notin \Psi_g$, d'où $\lceil g(i) \rceil < \lceil g(i+1) \rceil$. En posant $\lceil g(i) \rceil = n$, on en déduit $g(i) \leq n, g(i+1) > \lceil g(i+1) \rceil - 1 \geq n$, d'où $i \leq k(n) < i+1$. Ceci implique que $\lfloor k(n) \rfloor = i$.

La preuve pour Ψ_g est similaire. Soit $m \in \mathbb{Z}$. On a $f(h(m)) = m$, d'où $f(\lceil h(m) \rceil - 1) < m \leq f(\lceil h(m) \rceil)$. En posant $\lceil h(m) \rceil - 1 = j$, on en déduit $f(j) < m \leq f(j+1)$, d'où $\lfloor f(j) \rfloor < m \leq \lfloor f(j+1) \rfloor = m$. Il s'ensuit que $j < h(m) \leq j+1$, donc $\lceil h(m) \rceil - 1 = j$.

Les affirmations concernant p_f, Φ_g et Ψ_f s'obtiennent en intervertissant les rôles de f et g .

Remarques

1. On remarque que la seconde partie de la démonstration du théorème peut également être obtenue à partir de la première partie, si on l'applique à f^* et g^* , avec $f^*(x) = -f(-x), g^*(x) = -g(-x)$.
2. Il n'est pas difficile de démontrer une généralisation du théorème en abandonnant (5.3), mais la formulation devient peu pratique.

Théorème 5.3. Soient α et γ des réels, $\alpha > 1$. Définir les suites p, q par

$$(5.4) \quad p(z) = \lceil \gamma + (z+1)/\alpha \rceil - \lceil \gamma + z/\alpha \rceil \quad (z \in \mathbb{Z}),$$

$$(5.5) \quad q(z) = \lfloor \gamma + (z+1)/\alpha \rfloor - \lfloor \gamma + z/\alpha \rfloor \quad (z \in \mathbb{Z}).$$

Alors p et q sont des suites de 0 et 1. La suite p prend ses 1 dans l'ensemble $\{ \lfloor \alpha(n - \gamma) \rfloor \mid n \in \mathbb{Z} \}$ et ses 0 dans $\{ \lceil (n + \gamma)\alpha / (\alpha - 1) \rceil - 1 \mid n \in \mathbb{Z} \}$. La suite q prend ses 1 dans l'ensemble $\{ \lceil \alpha(n - \gamma) \rceil - 1 \mid n \in \mathbb{Z} \}$ et ses 0 dans $\{ \lfloor (n + \gamma)\alpha / (\alpha - 1) \rfloor \mid n \in \mathbb{Z} \}$.

Preuve. Posons $\beta = \alpha/(\alpha-1)$, d'où $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$. Définissons f, g, h, k par $f(x) = \gamma + x/\alpha, g(x) = -\gamma + x/\beta, h(y) = \alpha(y - \gamma), k(y) = \beta(y + \gamma)$. Appliquons maintenant le théorème 5.2.

Remarque. En particulier, cela implique que si α est irrationnel, $\alpha > 1, \alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$, alors les ensembles $\{[\alpha n] \mid n \in \mathbb{N}\}, \{[\beta n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ ont \mathbb{N} comme union disjointe. Ce fait a joué un rôle dans la résolution du jeu de Wythoff (voir [8]).

6. Déflation des suites spéciales

Si p est une suite doublement infinie de 0 et 1, il est assez facile d'indiquer les positions des 1 dans le successeur principal s de p . Soit ϕ tel que p soit la différence directe de ϕ ; autrement dit, $p(z) = \phi(z+1) - \phi(z)$ pour tout $z \in \mathbb{Z}$. Les positions d'indice de p peuvent alors être utilisées pour paramétrer l'ensemble des 1 dans le successeur principal s . À $p(n)$ correspond un groupe 100 ou 10, commençant à l'indice $\phi(n) - \phi(0) + 2n$. Notons que si $n > 0$, l'indice place $0, \dots, n-1$ de p et génère M chiffres de s , où M est égal à 3 fois le nombre de 1 parmi $p(0), \dots, p(n-1)$, plus deux fois le nombre de 0. La somme des 0 et des 1 donne n , et le nombre de 1 est égal à $\phi(n) - \phi(0)$. Si $n \leq 0$, l'argument est similaire.

Considérons maintenant la suite spéciale p donnée par (5.4). Elle conduit à $\phi(z) = \lceil \gamma + z/\alpha \rceil$, et donc la déflation s de p pour ensemble de 1

$$(6.1) \quad \{\lceil \gamma + n/\alpha \rceil - \lceil \gamma \rceil + 2n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Par le théorème 5.3 la séquence s^* avec

$$s^*(z) = \lfloor \gamma^* + (z+1)/\alpha^* \rfloor - \lfloor \gamma^* + z/\alpha^* \rfloor \quad (z \in \mathbb{Z})$$

a le même ensemble (6.1) de 1, à condition que

$$2 + \alpha^{-1} = \alpha^*, \quad \gamma - \lceil \gamma \rceil + 1 = -\alpha^* \gamma^*.$$

La conclusion est que s^* est le successeur direct de p .

Pour le cas de q (voir (5.5)), nous obtenons de manière similaire que sa déflation principale est t^* , avec

$$t^*(z) = \lceil \gamma^* + (z+1)/\alpha^* \rceil - \lceil \gamma^* + z/\alpha^* \rceil \quad (z \in \mathbb{Z})$$

à condition que

$$2 + \alpha^{-1} = \alpha^*, \quad \gamma - \lceil \gamma \rceil = -\alpha^* \gamma^*.$$

Si $\alpha = \sqrt{2} + 1$, nous obtenons $\alpha = \alpha^*$, et le théorème suivant est clair.

Théorème 6.1. *Soit, pour $\gamma \in \mathbb{R}$, p_γ et q_γ les séquences définies par*

$$\begin{aligned} p_\gamma(z) &= \lceil \gamma + (z+1)(\sqrt{2}-1) \rceil - \lceil \gamma + z(\sqrt{2}-1) \rceil & (z \in \mathbb{Z}), \\ q_\gamma(z) &= \lfloor \gamma + (z+1)(\sqrt{2}-1) \rfloor - \lfloor \gamma + z(\sqrt{2}-1) \rfloor & (z \in \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

alors p_γ a pour successeur principal q_δ , et q_γ a pour successeur principal p_ε , où

$$\begin{aligned}\delta &= (\gamma - \lceil \gamma \rceil + 1)(1 - \sqrt{2}), \\ \varepsilon &= (\gamma - \lfloor \gamma \rfloor)(1 - \sqrt{2}).\end{aligned}$$

Remarques

1. On a $p_\gamma = q_\gamma$, sauf si γ est de la forme $m + n\sqrt{2}$ et dans ces cas exceptionnels $p_\gamma(z) \neq q_\gamma(z)$ pour exactement deux valeurs (consécutives) de z . Dans ces cas exceptionnels, p_γ et q_γ sont égaux à p_0 et q_0 à un décalage près (voir (2.3) et (2.4)).
2. Si $\lambda = \gamma + k + n(\sqrt{2} - 1)$ avec $k, n \in \mathbb{Z}$, alors p_γ et p_λ sont égaux à un décalage près sur une distance n (le k n'a aucune influence), et il en va de même pour les q .
3. Inversement, si $p_\gamma = p_\lambda$, alors $\lambda - \gamma$ est de la forme $k + n(\sqrt{2} - 1)$. Ceci est facilement observé par approximation diophantienne.

7. Détermination de toutes les suites ayant des prédécesseurs de tous ordres

Théorème 7.1. *Une suite doublement infinie de 0 et 1 a des prédécesseurs de tous ordres si et seulement si elle est une p_γ ou une q_γ pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$ (p_γ et q_γ tels que définis dans le théorème 6.1).*

Preuve. Pour la partie “si”, il suffit de montrer que tout p_γ (et tout q_γ) a un prédécesseur. Considérons d’abord p_γ . Trouver λ tel que $-(\sqrt{2} - 1) < \lambda \leq 0$ et $\gamma = \lambda + k + n(\sqrt{2} - 1)$ avec $k, n \in \mathbb{Z}$. D’après le théorème 6.1, p_λ est le successeur principal de q_ρ , $\rho = -\lambda/(\sqrt{2} - 1)$. Pour q_λ , nous avons le même argument, mais avec $\sqrt{2} - 1 \leq \lambda < 0$.

Pour la partie “seulement si”, nous commençons par une suite P avec des prédécesseurs de tous ordres. C’est-à-dire que nous avons P_0, P_1, P_2, \dots tels que $P_0 = P$ et tels que, pour tout $n \geq 0$, P_n est un successeur de P_{n+1} . Chaque entrée de P_n génère une suite (d’au moins 2^n) entrées dans P . Quoi qu’il en soit, les entrées $P(-n), \dots, P(n)$ sont produites par deux entrées consécutives de P_n . Il est facile de trouver un nombre réel γ tel que p_γ ou q_γ ait les mêmes deux entrées que P_n aux mêmes endroits. D’après le théorème 6.1, nous avons un nombre réel ϱ tel que p_ϱ ou q_ϱ coïncide avec P aux indices de $-n$ à n , et nous avons $-1 \leq \varrho \leq 0$. Ainsi, pour tout n , nous avons un nombre ϱ avec $-1 \leq \varrho \leq 0$ tel que p_ϱ ou a_ϱ coïncide avec P aux indices $-n, \dots, n$. Maintenant, p ou q apparaît une infinité de fois, et nous pouvons choisir une sous-suite des n telle que les ϱ convergent vers un nombre réel θ . Il est maintenant facile de montrer que $P = p_\theta$ ou q_θ .

8. Une interprétation géométrique de la déflation

Soit f une suite de 0 et 1, et ϕ une application de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} telle que ses différences directes forment p ; c’est-à-dire $\phi(z + 1) - \phi(z) = f(z)$ ($z \in \mathbb{Z}$). Les points consécutifs du graphe de ϕ peuvent être connectés soit par un vecteur $(1, 1)$, soit par un vecteur $(1, 0)$.

Soit g un successeur de f , et soit ψ une fonction avec $\psi(z + 1) - \psi(z) = g(z)$. À toute étape le long d’un vecteur $(1, 1)$ du graphe de ϕ correspondent trois étapes, à savoir : $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 0)$ dans le

graphe de ψ , et à $(1, 0)$ dans ϕ correspondent $(1, 1)$, $(1,0)$. En omettant les points intermédiaires, on dit que $(1, 1)$ correspond à $(3, 1)$ et $(1,0)$ à $(2, 1)$.

Une transformation linéaire permet de résoudre ce problème :

$$(8.1) \quad x^* = 2x + y, \quad y^* = x.$$

Si l'on place le graphe de ϕ dans le plan x, y et celui de ψ dans le plan x^*, y^* , cette transformation transforme le graphe de ϕ en un sous-ensemble du graphe de ψ .

Outre ϕ , nous considérons également l'ensemble des points sur ou au-dessus du graphe, c'est-à-dire l'ensemble des (x, y) avec $y \geq \phi(x)$. Dans le cas où ϕ correspond à un p_γ (voir le théorème 6.1), il s'agit d'un ensemble de la forme

$$(8.2) \quad \{(x, y) \mid y \geq \gamma + x(\sqrt{2} - 1)\}.$$

Cela signifie que le graphe est la "borne inférieure" de l'ensemble de tous les points du réseau dans un demi-plan. Le rôle particulier des demi-plans particuliers dépend du fait que (8.1) les transforme en un demi-plan de même pente, à savoir :

$$(8.3) \quad \{(x^*, y^*) \mid y^* \leq \delta + x(\sqrt{2} - 1)\}$$

où $\delta = (1 - \sqrt{2})\gamma$.

Cette correspondance entre (8.2) et (8.3) reflète la relation entre p_γ et q_δ du théorème 6.1. Les δ ne coïncident que si $0 < \gamma \leq 1$; la raison en est que les graphiques de ϕ et ψ ont toujours besoin de décalages verticaux afin de satisfaire la condition selon laquelle ils contiennent tous deux le point $(0,0)$.

En intervertissant le rôle des signes \geq et \leq , nous obtenons la deuxième partie du théorème 6.1, à savoir que q_γ a p_ε comme successeur principal.

9. Un autre type de déflation

Nous décrivons un type de déflation qui a pour effet, sur les p_γ et q_γ , de multiplier γ par $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ au lieu de $\sqrt{2} - 1$. Ce nouveau type de déflation ressemble davantage à la déflation des pavages de Penrose (voir section 1) que l'ancien. En fait, son effet sur un réseau carré bidimensionnel peut être considéré comme similaire à celui de la déflation de Penrose sur un réseau cubique à cinq dimensions. Dans les deux cas, la déflation est liée à une transformée orthogonale (mais non orthonormée) qui transforme le réseau en l'un de ses sous-réseaux. Dans ce processus, nous perdons certains points du réseau, ce qui rend l'inverse de la déflation plus difficile à décrire. En revanche, aucun point du réseau n'a été perdu lors de la déflation de la section 8. Le déterminant de la transformation (8.1) a une valeur absolue de 1.

Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, et considérons les points du réseau x, y avec $x, y \in \mathbb{Z}, y \leq x(\sqrt{2} - 1) + \gamma$. Considérons

le sous-réseau défini par $x + y = 0 \pmod{2}$. Il s'agit à nouveau d'un réseau carré, et nous pouvons le décrire par $x = -x^* - y^*, y = -x^* + y^*$, où x et y passent par \mathbb{Z} . L'ensemble (8.2) se transforme en

$$\{(x^*, y^*) \mid y^* \geq x^*(\sqrt{2} - 1) + \gamma/\sqrt{2}\}.$$

L'explication du fait que ce demi-plan ait la même pente que celui du plan x, y est que cette pente est simplement $\pi/8$ (notons que $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$).

Si nous traduisons ce nouveau type de déflation en termes de suites de 0 et 1, nous obtenons la règle de production

$$(9.1) \quad 100 \rightarrow 01, \quad 1010 \rightarrow 001, \quad 1010010 \rightarrow 00101$$

avec la condition supplémentaire que la suite résultante doit être écrite dans l'ordre inverse. La figure 1 illustre la situation. Notons que l'effet dépend du fait que nous commençons à un point $x + y$ impair ou pair, ce qui dépend de la manière dont nous intégrons la séquence zéro-un dans le réseau carré.

La règle de production (9.1) se simplifie si on la transforme par notre "ancienne" règle $0 \rightarrow 10, 1 \rightarrow 100$. Elle devient alors

$$(9.2) \quad 1 \rightarrow 0, \quad 00 \rightarrow 1, \quad 010 \rightarrow 10.$$

Notons que, selon l'ancienne règle, $1 \rightarrow 100, 00 \rightarrow 1010, 010 \rightarrow 1010010$ et $1, 00, 010$ deviennent respectivement $100, 1010, 1010010$, et que $0, 1, 10$ deviennent respectivement $10, 100, 10010$. Ces trois derniers éléments sont obtenus en lisant les membres de droite de (9.1) à l'envers.

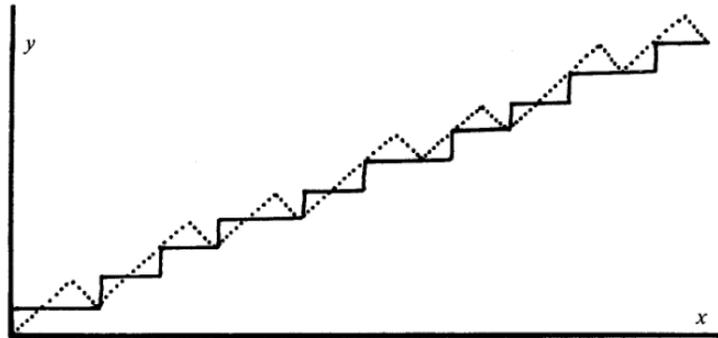


FIG. 1. Déflation de la section 9.

10. Généralisations

Une grande partie de ce qui a été fait précédemment peut être généralisée à d'autres ensembles de règles de production, mais il est difficile de décrire de manière exhaustive toutes les possibilités. Un cas général, pour lequel très peu de modifications doivent être apportées dans les sections précédentes, est caractérisé par un entier non négatif d . La règle de production est que 1 est remplacé par un 1 suivi de $d + 1$ zéros, et 0 par un 1 suivi de d zéros. (Le cas $d = 1$ est donc celui que

nous avons considéré dans les sections précédentes). Les suites ayant une infinité de prédécesseurs sont obtenues grâce aux formules (5.4) et (5.5) où $\alpha = ((\frac{1}{2}d + 1/2)^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(d + 1)$. L'équivalent du théorème clé 6.1 est vrai avec $1 - \sqrt{2}$ remplacé par $-\alpha^{-1}$, avec la même démonstration.

Le cas $d = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ avec la règle de production $1 \rightarrow 10, 0 \rightarrow 1$ est particulièrement intéressant. Comme on peut s'y attendre, cela est lié aux nombres de Fibonacci.

Références

1. Dekking, F.M. Combinatorial and statistical properties of sequences generated by substitutions. Ph.D. thesis, Nijmegen 1980.
2. Fraenkel, A.S. The bracket function and complementary sets of integers. *Canad. J. Math.* 21, 6-27 (1969).
3. Fraenkel, A.S., M. Mushkin, and U. Tassa Determination of $[n\theta]$ by its sequence of differences. *Canad. Math. Bull.* 21, 441-446 (1978).
4. Gardner, M. *Scientific American*, Jan. 1977, p. 110-121.
5. Gilbert, E.. Functions which represent all integers, *Amer. Math. Monthly* 70, 736-738 (1963); Acknowledgement, 1082.
6. Lambek. J. and L. Moser Inverse and complementary sequences of natural numbers. *Amer. Math. Monthly* 61, 454-458 (1954).
7. Penrose, R. Pentaplexity. *Math. Intelligencer* vol. 2 (1), 32-37 (1979).
8. Rouse Ball, W.W. and H.S.M. Coxeter 1974, University of Toronto Press. *Mathematical Recreations and Essays*, 12th ed..
9. Sprague, R. Ein Satz über Teilfolgen der Reihe der natürlichen Zahlen, *Math. Annalen* 115, 153-156 (1938).
10. Stolarsky, .. Beatty sequences, continued fractions, and certain shift operators, *Canad.Math. Bull.* 4, 473-482 (1976).