

1 Introduction et énoncé des résultats

Il y a quelques années, j'ai écrit un article [8] donnant des conditions syntaxiques nécessaires et suffisantes sur une théorie algébrique $\mathbf{T}$ pour que la variété des $\mathbf{T}$ -algèbres soit un topos. Plus récemment, Charles Wells m'a demandé ce que l'on pouvait dire de $\mathbf{T}$ si l'on suppose seulement que $\mathbf{T}\text{-Alg}$ est fermée cartésienne ; curieusement, bien que cette question forme un “supplément” très naturel à celle résolue dans [8], je ne l'avais pas envisagée auparavant. Dans cet article, nous présentons la réponse, quelque peu surprenante, à la question : “Quand une variété est-elle fermée cartésienne ?” Nous montrerons que, bien que toutes ces variétés ne soient pas des topos, elles sont toutes obtenues à partir de topos par une “construction d'effondrement” spécifique qui préserve la clôture cartésienne. De plus, les topos qui s'effondrent en variétés sont plus courants qu'on aurait pu le penser ; ils incluent, par exemple, tous les topos de préfaisceaux.

Dans cet article, nous poursuivrons la convention de [8] selon laquelle “variété” désigne toute catégorie monadique sur **Set** ; autrement dit, nos opérations algébriques ne sont pas supposées finitaires - bien que, pour simplifier les notations, nous les écrirons généralement comme si elles l'étaient. (Le lecteur vérifiera que tous nos résultats restent valables, sans changement essentiel dans les preuves, si les cardinaux $l, m, n, \dots$ qui apparaissent comme arités des opérations sont autorisés à être infinis.)

Avant d'aller plus loin, il sera commode de rappeler le théorème principal de [8] :

Théorème 1.1. *Pour une théorie algébrique non dégénérée $\mathbf{T}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\mathbf{T}\text{-Alg}$ est un topos.
- (2) $\mathbf{T}\text{-Alg}$ est localement fermée cartésienne, c'est-à-dire que la catégorie des tranches $\mathbf{T}\text{-Alg}/A$ est fermée cartésienne pour toute $\mathbf{T}$ -algèbre A .
- (3) (a) $\mathbf{T}$ n'a pas de pseudo-constantes (c'est-à-dire d'opérations unaires u pour lesquelles l'identité $u(x) = u(y)$ est valide), et
(b) Étant donnée une opération quelconque $p(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{T}$, il existe une opération $q(y_1, \dots, y_m)$, deux m -uplets d'opérations unaires u_j, v_j ($1 \leq j \leq m$), et une fonction

$$\alpha : \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

tels que les identités

$$q(u_1 y, u_2 y, \dots, u_m y) = y$$

et

$$u_j p(x_1, \dots, x_n) = v_j(x_{\alpha(j)}) \quad (1 \leq j \leq m)$$

soient valides.

Voir l'article original là <https://denisevellachemla.eu/br9.pdf> car le traducteur n'a pas l'air tout à fait au point pour la traduction des diagrammes catégoriques.

En réalité, la condition (2) n'apparaissait pas dans [8]. Cependant, pour prouver l'implication (1) $\Rightarrow$ (3) dans [8], nous utilisons à un seul endroit (lemme 2.2) une propriété de $\mathbf{T}\text{-Alg}$ qui ne découle pas de la clôture cartésienne locale ; le lemme 3.2 du présent article fournira un substitut pour cette étape.

Afin d'énoncer le théorème principal de cet article, nous devons introduire quelques nouvelles définitions. Si $\mathcal{E}$ est un topos, nous définissons l'*effondrement à deux valeurs* $\mathcal{E}_{iv}$ de $\mathcal{E}$ comme la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ dont les objets sont tous les objets bien supportés de $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire ceux $\mathcal{A}$ tels que l'unique morphisme $A \rightarrow 1$ soit un épimorphisme) ainsi que l'objet initial 0. Dans la section 5 ci-dessous, nous montrerons que $\mathcal{E}_{iv}$ est fermée cartésienne ; dans la section 6, nous esquisserons comment $\mathcal{E}$ peut être reconstruit à partir de $\mathcal{E}_{iv}$ (à équivalence près).

Ensuite, nous introduisons quelques notations pour les opérations d'une théorie algébrique : si $p(x_1, \dots, x_n)$, $q(y_1, \dots, y_m)$ et $r(y_1, \dots, y_m)$ sont trois opérations d'une théorie $\mathbf{T}$, nous écrirons $q \equiv_{p,i} r$ (où $1 \leq i \leq n$) pour signifier que “ q et r sont indiscernables à la i -ième place de p ”, c'est-à-dire que l'identité

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_{i-1}, q(y_1, \dots, y_m), x_{i+1}, \dots, x_n) \\ = p(x_1, \dots, x_{i-1}, r(y_1, \dots, y_m), x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (1)$$

est valide. (On ne suppose pas que q et r impliquent nécessairement exactement le même ensemble de variables, mais les x_j ($j \neq i$) sont supposés distincts entre eux et des y_k).

Troisièmement, nous introduisons un renforcement de la condition selon laquelle une théorie $\mathbf{T}$ n'a pas de pseudo-constantes. Nous dirons que les opérations de $\mathbf{T}$ sont *fortement non constantes* si, chaque fois que nous avons une identité de la forme

$$p(x_1, \dots, x_n) = q(v_1(x_{\alpha(1)}), \dots, v_m(x_{\alpha(m)}))$$

et que p ne dépend pas de la variable x_i (c'est-à-dire que l'identité $y \equiv_{p,i} z$ est valide, où y et z sont des variables distinctes), alors $q(y_1, \dots, y_m)$ ne dépend d'aucun y_j avec $\alpha(j) = i$. Pour $\mathbf{T}$ non dégénéré, ceci implique que $\mathbf{T}$ n'a pas de pseudo-constantes : en effet, si v_1 est une pseudo-constante, alors en prenant $p = v_1$ et q l'opération unaire identité, on en déduit que l'identité est pseudo-constante, c'est-à-dire que $\mathbf{T}$ est dégénéré. En général, l'affirmation selon laquelle $\mathbf{T}$ a des opérations fortement non constantes est strictement plus forte que la condition (3)(a) du théorème 1.1 (voir la remarque 8.1 ci-dessous), mais elle est impliquée par la conjonction de (3)(a) et (3)(b) (voir la remarque 8.2).

Notre théorème principal peut maintenant être énoncé comme suit ; sa similitude formelle avec le théorème 1.1 sera apparente.

Théorème 1.2. *Pour une théorie algébrique non dégénérée $\mathbf{T}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\mathbf{T}\text{-Alg}$ est l'effondrement à deux valeurs d'un topos.
- (2) $\mathbf{T}\text{-Alg}$ est fermée cartésienne.

- (3) (a) Les opérations de $\mathbf{T}$ sont fortement non constantes, et
 (b) Étant donnée une opération quelconque $p(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{T}$, il existe une opération $q(y_1, \dots, y_m)$, deux m -uplets d'opérations unaires u_j, v_j ($1 \leq j \leq m$), et une fonction

$$\alpha : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

tels que les identités

$$q(u_1 y, u_2 y, \dots, u_m y) = y$$

et

$$u_j p(x_1, \dots, x_n) \equiv_{q,j} v_j(x_{\alpha(j)}) \quad (1 \leq j \leq m)$$

soient valides.

En chemin vers la preuve du théorème 1.2, nous aurons besoin d'une caractérisation des variétés qui possèdent un classifiant des sous-objets, qui est à nouveau formellement similaire à 1.1 :

Théorème 1.3. *Pour une théorie algébrique $\mathbf{T}$ dans laquelle toute pseudo-constante est une constante, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\mathbf{T}$ -Alg possède un classifiant des sous-objets.
 (2) Pour toute $\mathbf{T}$ -algèbre A , le treillis des sous-algèbres de A est une algèbre de Heyting.
 (3) Étant donnée une opération quelconque $p(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{T}$, il existe une opération $q(y_1, \dots, y_m)$, deux m -uplets d'opérations unaires u_j, v_j ($1 \leq j \leq m$), et une fonction

$$\alpha : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

tels que les identités

$$q(u_1 p(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m p(x_1, \dots, x_n)) = p(x_1, \dots, x_n)$$

et

$$u_j p(x_1, \dots, x_n) = v_j(x_{\alpha(j)}) \quad (1 \leq j \leq m)$$

soient valides.

Bien que les théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3 soient tous spécifiques au cas des théories à un seul sorte, il s'avère qu'un théorème de Barr [1] nous permet d'en retrouver une partie pour les théories à plusieurs sortes (c'est-à-dire pour les catégories monadiques sur $\mathbf{Set}^n$ pour un certain n , où, comme d'habitude, le cardinal n peut être fini ou infini). En particulier, nous verrons que l'équivalence de (1) et (2) dans le théorème 1.1 reste valable pour les $\mathbf{T}$ non dégénérées à plusieurs sortes, et nous établirons

Théorème 1.4. *Pour une catégorie $\mathcal{E}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\mathcal{E}$ est localement fermée cartésienne et est une variété non dégénérée à plusieurs sortes.
 (2) $\mathcal{E}$ est un topos et $\mathcal{E}_{iv}$ est une variété non dégénérée à une seule sorte.
 (3) $\mathcal{E}$ est un topos de Grothendieck non dégénéré possédant un ensemble de générateurs projectifs.

(La signification de la non-dégénérescence pour les variétés à plusieurs sortes sera discutée dans la section 9 ci-dessous).

Le plan de l'article est le suivant. La section 2 est consacrée à la preuve du théorème 1.3, et la section 3 à la preuve de l'équivalence de (2) et (3) dans le théorème 1.2. Dans la section 4, nous étudions une classe de théories (les théories hyperaffines commutatives) dont les variétés d'algèbres sont fermées cartésiennes mais ne sont pas (sauf dans le cas trivial) des topos ; celles-ci fournissent une motivation pour la définition de l'effondrement à deux valeurs, que nous étudions en général dans la section 5 (en particulier, l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) du théorème 1.2 est prouvée dans cette section). La section 6 esquisse la preuve du "théorème de reconstruction" qui montre comment un topos peut être reconstruit à partir de son effondrement à deux valeurs ; la section 7 achève la preuve du théorème 1.2, en montrant que la condition (3) de 1.2 implique que $\mathbf{T}\text{-Alg}$ satisfait les hypothèses du théorème de reconstruction. Dans la section 8, nous faisons quelques remarques sur la relation entre les théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3, et nous discutons quelques exemples de variétés qui satisfont leurs hypothèses ; dans ce processus, nous prouvons l'équivalence de (2) et (3) dans le théorème 1.4. Enfin, dans la section 9, nous discutons des variétés à plusieurs sortes et achevons la preuve du théorème 1.4.

Outre ma dette envers Charles Wells pour avoir posé la question qui a motivé la recherche décrite dans cet article, je suis profondément redevable à Peter Freyd pour m'avoir donné le courage de croire que le théorème 1.2 pourrait être vrai, et pour ses suggestions utiles sur la façon de le prouver : en particulier, pour avoir signalé la possibilité de prouver le théorème 1.3, et pour m'avoir rappelé la construction dans [5] du topos $\widehat{\mathbf{A}}$ (qui, bien qu'il n'apparaisse pas explicitement dans cet article, a été un guide lumineux important pour établir les résultats des sections 6 et 7). La majeure partie du travail décrit ici a été effectuée alors que je visitais les universités de Chicago et de Pennsylvanie en janvier et février 1988 : je suis reconnaissant aux deux institutions pour leur hospitalité.

2 Variétés avec classifiant des sous-objets

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec limites finies. Comme d'habitude, par *classifiant des sous-objets* dans $\mathcal{C}$, nous entendons un objet Ω muni d'un morphisme spécifié $\top : 1 \rightarrow \Omega$ (où 1 est l'objet terminal de $\mathcal{C}$) tel que tout monomorphisme $A' \rightarrow A$ dans $\mathcal{C}$ soit unique exprimable comme un carré cartésien de $\top$.

Lemme 2.1. *Si $\mathcal{C}$ possède un classifiant des sous-objets, alors pour tout objet A de $\mathcal{C}$, les sous-objets de A forment un demi-treillis brouwerien.*

Démonstration. Comme dans un topos, on peut définir l'intersection binaire $\wedge : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ comme le morphisme classifiant de $(\top, \top) : 1 \rightarrow \Omega \times \Omega$ (l'intersection de $\pi_1^*(\top)$ et $\pi_2^*(\top)$), la relation d'ordre $\Omega_1 \rightarrow \Omega \times \Omega$ comme l'égalisateur de π_1 et $\wedge$, et l'implication $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ comme le morphisme classifiant de Ω_1 (cf. [7, 1.49 (ii) et 3.51 (ii)]). Alors, étant donnés des sous-objets A_1, A_2, A_3 de A , on peut vérifier que $A_1 \leq (A_2 \Rightarrow_A A_3)$ comme sous-objets de A (où $\Rightarrow_A$ désigne l'opération binaire sur les sous-objets obtenue à partir de $\Rightarrow$) ssi $A_1 \cap A_2 \leq A_1 \cap A_3$ comme sous-objets de A_1 , ssi $A_1 \cap A_2 \leq A_3$ comme sous-objets de A . $\square$

Si $\mathcal{C} = \mathbf{T}\text{-Alg}$ pour une théorie algébrique $\mathbf{T}$, alors nous savons que les sous-objets de toute $\mathbf{T}$ -algèbre A forment un treillis complet ; donc 2.1 implique qu'ils forment une algèbre de Heyting

(complète), ou de manière équivalente que la loi distributive infinie

$$A \cap \sum_{i \in I} B_i = \sum_{i \in I} (A \cap B_i)$$

est valide pour les sous-algèbres. Pour une théorie finitaire $\mathbf{T}$, la loi distributive infinie est valide ssi la loi finitaire l'est, car les treillis de sous-algèbres sont toujours algébriques dans ce cas. (On notera que nous n'affirmons pas que Ω , s'il existe dans $\mathbf{T}\text{-Alg}$, est une algèbre de Heyting interne : bien que les unions binaires de sous-algèbres existent dans $\mathbf{T}\text{-Alg}$, elles ne sont pas nécessairement préservées par les changements de base, et donc ne seront pas en général induites par un morphisme $\vee : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$.)

Lemme 2.2. *Supposons que les treillis de sous-algèbres dans $\mathbf{T}\text{-Alg}$ sont infiniment distributifs. Alors la condition (3) du théorème 1.3 est satisfaite.*

Démonstration. Étant donnée une opération $p(x_1, \dots, x_n)$, soit A la sous-algèbre engendrée par p dans la $\mathbf{T}$ -algèbre libre $F(x_1, \dots, x_n)$ sur n générateurs, et soit B_i ($1 \leq i \leq n$) la sous-algèbre engendrée par x_i . Alors $p \in A \cap \sum_{i=1}^n B_i$, donc par hypothèse $p \in \sum_{i=1}^n (A \cap B_i)$, c'est-à-dire que p peut être obtenu en appliquant une certaine opération (disons q) de $\mathbf{T}$ à une famille de termes qui appartiennent à $\cup_{i=1}^n (A \cap B_i)$. Mais $A \cap B_i$ est constitué des termes $up(x_1, \dots, x_n)$ pour lesquels il existe une identité $up(x_1, \dots, x_n) = v(x_i)$ (ici u, v sont des opérations unaires de $\mathbf{T}$) ; donc cela dit précisément que (3) est valide. $\square$

Pour les théories finitaires $\mathbf{T}$, l'équivalence de la condition (3) de 1.3 avec la distributivité des treillis de sous-algèbres était probablement connue auparavant (la réciproque du lemme 2.2 n'est pas difficile à prouver directement), mais je n'ai pas pu la trouver dans la littérature de l'algèbre universelle. Il existe une condition syntaxique bien connue pour que les treillis de congruences dans $\mathbf{T}\text{-Alg}$ soient distributifs, due à B. Jónsson [9] ; mais les treillis de sous-algèbres semblent généralement avoir reçu beaucoup moins d'attention que les treillis de congruences.

Nous avons maintenant prouvé les implications $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ de 1.3 ; pour compléter le cercle, nous devons construire un classifiant des sous-objets dans $\mathbf{T}\text{-Alg}$ pour tout $\mathbf{T}$ satisfaisant (3). Or, si $\mathbf{T}\text{-Alg}$ possède un classifiant des sous-objets Ω , alors les éléments de (l'ensemble sous-jacent de) Ω doivent correspondre aux homomorphismes $F(x) \rightarrow \Omega$ dans $\mathbf{T}\text{-Alg}$, où $F(x)$ est l'algèbre libre sur un générateur, et donc aux sous-algèbres de $F(x)$; définissons donc Ω comme l'ensemble de ces sous-algèbres, et essayons de lui imposer une structure de $\mathbf{T}$ -algèbre.

Étant donnée une opération n -aire p de $\mathbf{T}$ et des sous-algèbres $A_1, A_2, \dots, A_n$ de $F(x)$, nous définissons

$$p_\Omega(A_1, \dots, A_n) = \left\{ u(x) \left| up(x_1, \dots, x_n) \in \sum_{i=1}^n A_i x_i \right. \right\},$$

où $A_i x_i$ désigne la sous-algèbre $\{v(x_i) | v(x) \in A_i\}$ de $F(x_1, \dots, x_n)$. En particulier, pour une opération unaire v de $\mathbf{T}$, on a $v_\Omega(A) = \{u | uv \in A\}$; et pour une constante k , on a $k_\Omega = F(x)$ car uk appartient à toute sous-algèbre, pour tout u . Plus généralement, pour tout p , on a $p_\Omega(F(x), \dots, F(x)) = F(x)$, puisque $\sum_{i=1}^n F(x_i)$ est tout $F(x_1, \dots, x_n)$; donc (en supposant le résultat que nous sommes sur le point de prouver) $\{F(x)\}$ est une sous-algèbre singleton de Ω .

Lemme 2.3. *Ω est une $\mathbf{T}$ -algèbre.*

Démonstration. Supposons que nous ayons une équation

$$p(x_1, \dots, x_n) = q(r_1(x_1, \dots, x_n), \dots, r_m(x_1, \dots, x_n))$$

dans $\mathbf{T}$. Étant données des sous-algèbres $A_1, \dots, A_n$, nous devons montrer pour tout $u \in F(x)$ que

$$u \in p_\Omega(A_1, \dots, A_n) \Leftrightarrow u \in q_\Omega((r_1)_\Omega(A_1, \dots, A_n), \dots, (r_m)_\Omega(A_1, \dots, A_n)).$$

Si u appartient au membre de droite, alors on peut écrire

$$uq(y_1, \dots, y_m) = f(v_1 y_{\alpha(1)}, \dots, v_l y_{\alpha(l)})$$

pour un certain f et certains $v_j \in (r_{\alpha(j)})_\Omega(A_1, \dots, A_n)$. Mais alors

$$up(x_1, \dots, x_n) = f(v_1 r_{\alpha(1)}(x_1, \dots, x_n), \dots, v_l r_{\alpha(l)}(x_1, \dots, x_n)),$$

et pour chaque j on a $v_j r_{\alpha(j)}(x_1, \dots, x_n) \in \sum_{i=1}^n A_i x_i$. Comme $\sum A_i x_i$ est une sous-algèbre, on en déduit qu'elle contient $up(x_1, \dots, x_n)$, comme requis. $\square$

Réciproquement, supposons $u \in p_\Omega(A_1, \dots, A_n)$. En appliquant la condition (3) de 1.3 à l'opération $uq(y_1, \dots, y_m)$, on obtient

$$uq(y_1, \dots, y_m) = f(w_1 uq(y_1, \dots, y_m), \dots, w_l uq(y_1, \dots, y_m))$$

pour certains f et w_j , où $w_j uq(y_1, \dots, y_m) = t_j(y_{\alpha(j)})$ pour certains t_j et α . En substituant $r_i(x_1, \dots, x_n)$ à y_i ($1 \leq i \leq m$) dans la dernière équation, on obtient

$$t_j r_{\alpha(j)}(x_1, \dots, x_n) = w_j up(x_1, \dots, x_n) \in \sum_{i=1}^n A_i x_i,$$

de sorte que $t_j \in (r_{\alpha(j)})_\Omega(A_1, \dots, A_n)$. Mais puisque

$$uq(y_1, \dots, y_m) = f(t_1(y_{\alpha(1)}), \dots, t_l(y_{\alpha(l)})),$$

on en déduit que $u \in q_\Omega((r_1)_\Omega(A_1, \dots, A_n), \dots, (r_m)_\Omega(A_1, \dots, A_n))$.

Nous devons également vérifier que les opérations de projection de $\mathbf{T}$ sont interprétées comme les projections produit $\Omega^n \rightarrow \Omega$. Pour cela, nous devons utiliser l'hypothèse sur les pseudo-constantes dans 1.3 : nous devons montrer que

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i \cap F(x_j) = A_j x_j,$$

et cela ne pourrait échouer que si $\mathbf{T}$ a une pseudo-constante mais pas de constantes, $A_j = \emptyset$ et un autre A_i est non vide.

Proposition 2.4 (2.4). *La $\mathbf{T}$ -algèbre Ω , avec sa sous-algèbre singleton $\{F(x)\}$, est un classifiant des sous-objets pour $\mathbf{T}\text{-Alg}$.*

Démonstration. Soit A' une sous-algèbre d'une $\mathbf{T}$ -algèbre A . Nous définissons un morphisme $h : A \rightarrow \Omega$ par

$$h(a) = \{u(x) \mid u_A(a) \in A'\}.$$

(Il est facile de voir que $h(a)$ est une sous-algèbre de $F(x)$). Clairement, $h(a) = F(x)$ ssi $a \in A'$, et h est uniquement déterminé par cette condition et par l'exigence qu'il commute avec les opérations unaires de $\mathbf{T}$, puisque $u(x) \in h(a)$ ssi $u_\Omega h(a) = F(x)$. Pour achever la preuve, nous devons montrer que h commute avec les opérations d'arité supérieure à 1, c'est-à-dire que si p est une opération n -aire de $\mathbf{T}$, on a

$$u(x) \in h(p_A(a_1, \dots, a_n)) \Leftrightarrow u(x) \in p_\Omega(h(a_1), \dots, h(a_n)).$$

Une fois de plus, l'implication de droite à gauche est directe (et n'utilise pas la condition (3)). Pour la réciproque, appliquer (3) à $up(x_1, \dots, x_n)$; on a

$$up(x_1, \dots, x_n) = q(w_1 up(x_1, \dots, x_n), \dots, w_m up(x_1, \dots, x_n)),$$

où $w_j up(x_1, \dots, x_n) = v_j(x_{\alpha(j)})$ pour chaque j . De ces dernières équations, on déduit

$$(v_j)_A(a_{\alpha(j)}) = (w_j)_{A u_A p_A}(a_1, \dots, a_n) \in A',$$

donc $v_j \in h(a_{\alpha(j)})$, et par suite $u \in p_\Omega(h(a_1), \dots, h(a_n))$, comme requis. $\square$

Ceci achève la preuve du théorème 1.3.

3 Variétés fermées cartésiennes

Dans toute catégorie fermée cartésienne $\mathcal{C}$, les foncteurs $(-) \times A$, étant adjoints à gauche, préservent les colimites qui peuvent exister dans $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ est une variété $\mathbf{T}\text{-Alg}$, alors nous savons que l'algèbre libre $F(x_1, \dots, x_n)$ sur n générateurs est le coproduit de n copies $F(x_i)$ ($1 \leq i \leq n$) de l'algèbre libre sur un générateur; donc, pour tout A , $F(x_1, \dots, x_n) \times A$ doit être le coproduit des $F(x_i) \times A$. De manière peut-être surprenante, cette condition nécessaire pour la clôture cartésienne est également suffisante :

Proposition 3.1 (3.1). *$\mathbf{T}\text{-Alg}$ est fermée cartésienne ssi $F(x_1, \dots, x_n) \times A$ est le coproduit des $F(x_i) \times A$ ($1 \leq i \leq n$), pour tout n et toute $\mathbf{T}$ -algèbre A .*

Démonstration. La nécessité de la condition a déjà été expliquée. Pour la suffisance, on observe (comme dans la preuve de l'implication (3) $\Rightarrow$ (1) de 1.3) que les éléments de l'exponentielle B^A , si elle existe, doivent correspondre aux homomorphismes $F(x) \rightarrow B^A$, et donc aux homomorphismes $F(x) \times A \rightarrow B$. Définissons donc B^A comme l'ensemble des homomorphismes $F(x) \times A \rightarrow B$; le problème est maintenant de définir une structure de $\mathbf{T}$ -algèbre sur cet ensemble. Supposons donnés une opération n -aire p de $\mathbf{T}$ et un n -uplet d'homomorphismes $f_i : F(x) \times A \rightarrow B$ ($1 \leq i \leq n$). Par hypothèse, il existe un unique homomorphisme

$$\bar{f} : F(x_1, \dots, x_n) \times A \rightarrow B$$

dont la restriction à $F(x_i) \times A$ est f_i , pour chaque i . On définit alors $p_{B^A}(f_1, \dots, f_n)$ comme le composé $\bar{f}(\bar{p} \times \text{id})$, où $\bar{p} : F(x) \rightarrow F(x_1, \dots, x_n)$ est l'unique homomorphisme envoyant le générateur

x sur $p(x_1, \dots, x_n)$. Il est maintenant direct de vérifier que cette définition donne une structure de $\mathbf{T}$ -algèbre sur B^A .

De plus, on a un morphisme $\text{ev} : B^A \times A \rightarrow B$ défini par $\text{ev}(f, a) = f(x, a)$ (où x désigne l'opération unaire identité) ; et c'est un homomorphisme car

$$\begin{aligned} \text{ev}(p(f_1, \dots, f_n), p(a_1, \dots, a_n)) &= \bar{f}(p(x_1, \dots, x_n), p(a_1, \dots, a_n)) \\ &= p_B(\bar{f}(x_1, a_1), \dots, \bar{f}(x_n, a_n)) \\ &= p_B(f_1(x, a_1), \dots, f_n(x, a_n)) \end{aligned}$$

pour tout p . Si $h : C \times A \rightarrow B$ est un homomorphisme quelconque, on définit $\bar{h} : C \rightarrow B^A$ par $\bar{h}(c)(u(x), a) = h(u_C(c), a)$. Pour vérifier que $\bar{h}$ est un homomorphisme, notons que

$$\bar{h}(p_C(c_1, \dots, c_n))(u(x), a) = h(u_C p_C(c_1, \dots, c_n), a)$$

tandis que

$$p_{B^A}(\bar{h}(c_1), \dots, \bar{h}(c_n))(u(x), a) = \bar{f}(up(x_1, \dots, x_n), a)$$

(où $f_i = \bar{h}(c_i)$). Mais l'hypothèse que $F(x_1, \dots, x_n) \times A$ est le coproduit des $F(x_i) \times A$ implique en particulier qu'il est engendré par leur union ; on peut donc exprimer tout élément de ce produit (en particulier le couple $(up(x_1, \dots, x_n), a)$) sous la forme $q((v_1(x_{\alpha(1)}), a_1), \dots, (v_m(x_{\alpha(m)}), a_m))$ pour un certain choix de q, v_j, a_j et α . On a alors

$$\begin{aligned} \bar{f}(up(x_1, \dots, x_n), a) &= q_B(\bar{f}(v_1(x_{\alpha(1)}), a_1), \dots, \bar{f}(v_m(x_{\alpha(m)}), a_m)) \\ &= q_B(f_{\alpha(1)}(v_1(x), a_1), \dots, f_{\alpha(m)}(v_m(x), a_m)) \\ &= q_B(h(v_1(c_{\alpha(1)}), a_1), \dots, h(v_m(c_{\alpha(m)}), a_m)) \\ &= h(q_C(v_1(c_{\alpha(1)}), \dots, v_m(c_{\alpha(m)})), q_A(a_1, \dots, a_m)) \\ &= h(u_C p_C(c_1, \dots, c_n), a) \end{aligned}$$

comme requis. Et il est clair que $\bar{h}$ est l'unique homomorphisme satisfaisant $\text{ev}(\bar{h} \times \text{id}_A) = h$, puisque tout tel doit satisfaire

$$\bar{h}(c)(u(x), a) = u_{B^A}(\bar{h}(c))(x, a) = \bar{h}(u_C(c))(x, a) = h(u_C(c), a).$$

Ainsi, on a une adjonction $(-) \times A \dashv (-)^A$, c'est-à-dire que $\mathbf{T}\text{-Alg}$ est fermée cartésienne. $\square$

Notons que, même si $\mathbf{T}\text{-Alg}$ n'est pas fermée cartésienne, l'argument de la preuve ci-dessus peut être utilisé pour caractériser les objets exponentiables de $\mathbf{T}\text{-Alg}$ (c'est-à-dire ceux A tels que $(-) \times A$ admet un adjoint à droite). Cependant, je ne connais aucun exemple de variété non fermée cartésienne contenant une classe intéressante d'objets exponentiables.

Nous commençons maintenant la tâche d'extraire des informations syntaxiques de la condition de 3.1.

Lemme 3.2. *Si $\mathbf{T}\text{-Alg}$ est fermée cartésienne, alors $\mathbf{T}$ a des opérations fortement non constantes.*

Démonstration. Supposons que l'opération $q(v_1(x_{\alpha(1)}), \dots, v_m(x_{\alpha(m)}))$ ne dépende pas de l'une des variables $x_1, \dots, x_n$ qui y apparaissent - disons de x_1 - et, pour simplifier les notations, supposons que $\alpha(j) = 1$ ssi $1 \leq j \leq l$. Considérons le produit

$$F(x_1, x'_1, x_2, \dots, x_n) \times A,$$

où $A = F(y_1, \dots, y_m)$, comme le coproduit de $F(x_i) \times A$ ($1 \leq i \leq n$) et $F(x'_1) \times A$. Soit B l'algèbre libre sur $(m + l)$ générateurs z_j ($1 \leq j \leq m$) et z'_j ($1 \leq j \leq l$); soit $f : A \rightarrow B$ l'homomorphisme qui envoie y_j sur z_j ($1 \leq j \leq m$), et f' l'homomorphisme qui envoie y_j sur z'_j si $j \leq l$ et sur z_j sinon. Soit maintenant

$$h : F(x_1, x'_1, x_2, \dots, x_n) \times A \rightarrow B$$

l'unique homomorphisme dont la restriction à $F(x_i) \times A$ ($1 \leq i \leq n$) est $f\pi_2$ et à $F(x'_1) \times A$ est $f'\pi_2$. Dans $F(x_1, x'_1, x_2, \dots, x_n) \times A$, on a l'équation

$$q((v_1(x_{\alpha(1)}), y_1), \dots, (v_m(x_{\alpha(m)}), y_m)) = q((v_1(x_{\alpha(1)}), y_1), \dots, (v_m(x_{\alpha(m)}), y_m)),$$

où $x'_i = x_i$ pour $i > 1$; en appliquant h à chaque membre, on obtient

$$q(z_1, \dots, z_m) = q(z'_1, \dots, z'_l, z_{l+1}, \dots, z_m).$$

Donc q ne dépend d'aucune de ses l premières variables. □

Comme nous l'avons observé dans la section 1, la conclusion du lemme 3.2 implique (pour les théories non dégénérées $\mathbf{T}$) que $\mathbf{T}$ n'a pas de pseudo-constantes. Le lemme fournit donc un substitut au lemme 2.2 de [8], qui ne requiert pas l'hypothèse que les coproduits dans $\mathbf{T}\text{-Alg}$ sont disjoints, et achève donc la preuve de l'implication (2) $\Rightarrow$ (3) dans le théorème 1.1. Bien sûr, l'absence de pseudo-constantes implique que les coproduits sont disjoints, et nous exploiterons ce fait dans la suite : pour le reste de cette section, nous supposons que nous avons affaire à une théorie $\mathbf{T}$ (nécessairement non dégénérée) sans opérations pseudo-constantes, et nous utiliserons (généralement sans le mentionner explicitement) le fait que les différents sommants d'un coproduit dans $\mathbf{T}\text{-Alg}$ ont une intersection vide.

Lemme 3.3. *Supposons que $\mathbf{T}\text{-Alg}$ est fermée cartésienne. Alors, pour toute opération $p(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{T}$, il existe une opération $q(y_1, \dots, y_m)$, deux m -uplets d'opérations unaires u_j, v_j ($1 \leq j \leq m$), et une fonction*

$$\alpha : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\},$$

tels que les identités

$$q(u_1 y, \dots, u_m y) = y$$

et

$$q(v_1(x_{\alpha(1)}), \dots, v_m(x_{\alpha(m)})) = p(x_1, \dots, x_n)$$

soient valides.

Démonstration. Puisque $F(x_1, \dots, x_n) \times F(y)$ est le coproduit des $F(x_i) \times F(y)$ ($1 \leq i \leq n$), il est engendré par leur union; l'élément

$$(p(x_1, \dots, x_n), y)$$

doit donc être obtenu en appliquant une certaine opération q de $\mathbf{T}$ à un m -uplet d'éléments $(v_j(x_{\alpha(j)}), u_j(y))$ de $\bigcup_{j=1}^n F(x_i) \times F(y)$. Mais cela dit exactement que les équations ci-dessus sont satisfaites. □

Clairement, les équations de 3.3 impliquent que

$$q(u_1 p(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m p(x_1, \dots, x_n)) = q(v_1(x_{\alpha(1)}), \dots, v_m(x_{\alpha(m)})); \quad (*)$$

mais ceci est plus faible que l'assertion faite dans la condition (3)(b) du théorème 1.2. Cependant, nous avons :

Lemme 3.4. *Supposons que $\mathbf{T}\text{-Alg}$ est fermée cartésienne. Alors, pour toutes opérations p, q, u_j, v_j et fonction α telles que l'identité $(\star)$ ci-dessus est valide, on a aussi*

$$u_j p(x_1, \dots, x_n) \equiv_{q,j} v_j(x_{\alpha(j)})$$

pour $1 \leq j \leq m$. En particulier, $\mathbf{T}$ satisfait la condition (3)(b) du théorème 1.2.

Démonstration. Dans le produit $F(y_1, \dots, y_m) \times F(x_1, \dots, x_n)$, on a l'identité

$$\begin{aligned} q((y_1, u_1 p(x_1, \dots, x_n)), \dots, (y_m, u_m p(x_1, \dots, x_n))) \\ = q((y_1, v_1(x_{\alpha(1)})), \dots, (y_m, v_m(x_{\alpha(m)}))). \end{aligned} \quad (\dagger)$$

On considère $F(y_1, \dots, y_m) \times F(x_1, \dots, x_n)$ comme le coproduit des

$$F(y_j) \times F(x_1, \dots, x_n),$$

et l'homomorphisme

$$h : F(y_1, \dots, y_m) \times F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m)$$

dont la restriction à $F(y_j) \times F(x_1, \dots, x_n)$ est $f\pi_2$, et la restriction à $F(y_{j'}) \times F(x_1, \dots, x_n)$ ($j' \neq j$) est $g_{j'}\pi_1$ (où f et $g_{j'}$ sont les inclusions de $F(x_1, \dots, x_n)$ et $F(y_{j'})$, respectivement, dans le codomaine de h). En appliquant h aux deux membres de l'identité $(\dagger)$, on obtient

$$q(y_1, \dots, y_{j-1}, u_j p(x_1, \dots, x_n), y_{j+1}, \dots, y_m) = q(y_1, \dots, y_{j-1}, v_j(x_{\alpha(j)}), y_{j+1}, \dots, y_m),$$

comme requis. □

En combinant les lemmes 3.2 et 3.4, nous avons maintenant prouvé l'implication $(2) \Rightarrow (3)$ du théorème 1.2. Nous remarquons que les lecteurs principalement intéressés par l'équivalence de (1) et (2) dans 1.2 peuvent sauter le reste de cette section : pour prouver que toute variété fermée cartésienne est un topos effondré, nous utiliserons la condition syntaxique (3), mais nous n'aurons pas besoin de savoir qu'elle implique (2). Néanmoins, (3) implique bien (2) ; nous prouvons maintenant ce fait.

Proposition 3.5 (3.5). *Supposons que $\mathbf{T}$ satisfait la condition (3) du théorème 1.2. Alors $\mathbf{T}\text{-Alg}$ est fermée cartésienne.*

Démonstration. Nous utilisons le critère de la proposition 3.1. Soit A une $\mathbf{T}$ -algèbre arbitraire (on suppose A non vide ; si $A = 0$ il n'y a rien à prouver). D'abord, on observe que $F(x_1, \dots, x_n) \times A$ est engendré par l'union de ses sous-algèbres $F(x_i) \times A$ ($1 \leq i \leq n$) ; en effet, si $(p(x_1, \dots, x_n), a)$ est un élément quelconque du premier, les équations de (3)(b) permettent de l'exprimer sous la forme

$$q((v_1(x_{\alpha(1)}), u_1(a)), \dots, (v_m(x_{\alpha(m)}), u_m(a))).$$

Supposons maintenant que l'on ait une équation de la forme

$$p((u_1(x_{\alpha(1)}), a_1), \dots, (u_m(x_{\alpha(m)}), a_m)) = q((v_1(x_{\beta(1)}), b_1), \dots, (v_l(x_{\beta(l)}), b_l))$$

entre éléments de $F(x_1, \dots, x_n) \times A$ (c'est-à-dire que

$$p_A(a_1, \dots, a_m) = q_A(b_1, \dots, b_l) \quad (= c, \text{ disons})$$

et que l'identité

$$p(u_1(x_{\alpha(1)}), \dots, u_m(x_{\alpha(m)})) = q(v_1(x_{\beta(1)}), \dots, v_l(x_{\beta(l)}))$$

est valide). Comme dans la preuve du lemme 3.5 de [8], nous devons montrer que cette équation est une conséquence d'équations qui sont valides à l'intérieur des $F(x_i) \times A$ individuels. À cette fin, on applique d'abord la condition (3)(b) à p , pour obtenir une opération $r(y_1, \dots, y_k)$ et des opérations unaires w_j ($1 \leq j \leq k$) telles que

$$r(w_1 y, \dots, w_k y) = y$$

et, pour chaque j ,

$$r(y_1, \dots, y_{j-1}, w_j p(z_1, \dots, z_m), y_{j+1}, \dots, y_k) \quad (1)$$

ne dépende que d'un seul z (disons de $z_{\gamma(j)}$). Il s'ensuit que

$$r(y_1, \dots, y_{j-1}, w_j p(u_1(x_{\alpha(1)}), \dots, u_m(x_{\alpha(m)})), y_{j+1}, \dots, y_k)$$

ne dépend que des $y_{j'}$ ($j' \neq j$) et de $x_{\alpha\gamma(j)}$. En remplaçant $p(u_1 x_{\alpha(1)}, \dots, u_m x_{\alpha(m)})$ par $q(v_1 x_{\beta(1)}, \dots, v_l x_{\beta(l)})$ et en appliquant la condition (3)(a), on en déduit que

$$r(y_1, \dots, y_{j-1}, w_j q(z'_1, \dots, z'_l), y_{j+1}, \dots, y_k) \quad (2)$$

ne dépend d'aucun z'_i avec $\beta(i) \neq \alpha\gamma(j)$. Pour simplifier les notations, supposons pour l'instant que $\beta(i) = \alpha\gamma(j)$ ssi $1 \leq i \leq d$.

Soit maintenant $s_j(y, z_{\gamma(j)})$ le terme obtenu en remplaçant tous les $y_{j'}$ ($j' \neq j$) par y dans (1) (et en éliminant les z redondants), et soit $t_j(y, z'_1, \dots, z'_d)$ obtenu de manière similaire en remplaçant les $y_{j'}$ par y dans (2). Alors on a

$$s_j(x_{\alpha\gamma(j)}, u_{\gamma(j)}(x_{\alpha\gamma(j)})) = t_j(x_{\alpha\gamma(j)}, v_1(x_{\beta(1)}), \dots, v_d(x_{\beta(d)}))$$

dans $F(x_{\alpha\gamma(j)})$, et

$$(s_j)_A(c, a_{\gamma(j)}) = (t_j)_A(c, b_1, \dots, b_d)$$

dans A . Cependant, en appliquant à nouveau la condition (3)(b) à r , on obtient une opération e -aire f et une équation de la forme

$$r(y_1, \dots, y_k) = f(g_1 r(y_1, \dots, y_k), \dots, g_e r(y_1, \dots, y_k)) \quad (3)$$

dans laquelle chaque terme $g_i r(y_1, \dots, y_k)$ peut être remplacé par $g_i r$ appliqué à un autre k -uplet, pourvu qu'une seule des variables (la $\delta(i)$ -ième, disons) soit maintenue constante. En particulier, en substituant $w_j p(z_1, \dots, z_m)$ à y_j ($1 \leq j \leq k$) dans (3), on obtient

$$p(z_1, \dots, z_m) = f(g_1 s_{\delta(1)}(y_1, z_{\gamma\delta(1)}), \dots, g_e s_{\delta(e)}(y_e, z_{\gamma\delta(e)})),$$

et de même on a

$$q(z'_1, \dots, z'_l) = f(g_1 t_{\delta(1)}(y_1, z'_*), \dots, g_e t_{\delta(e)}(y_e, z'_*)),$$

où z'_* désigne le tuple approprié de variables z' dans chaque cas. On en déduit donc que l'égalité entre p et q , dont nous sommes partis, est une conséquence des égalités entre les s_j et t_j , chacune étant valide dans un certain $F(x_{\alpha\gamma(j)}) \times A$.

Ceci achève la preuve de l'équivalence de (2) et (3) dans le théorème 1.2. $\square$

4 Théories hyperaffines commutatives

On rappelle qu'une théorie algébrique $\mathbf{T}$ est dite *commutative* si ses opérations commutent toutes les unes avec les autres, c'est-à-dire si, étant données des opérations p et q (d'arités n et m , disons), l'identité

$$p(q(x_{11}, \dots, x_{1m}), \dots, q(x_{n1}, \dots, x_{nm})) = q(p(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, p(x_{1m}, \dots, x_{nm}))$$

est valide. Il est bien connu [12] que si $\mathbf{T}$ est commutative alors $\mathbf{T}\text{-Alg}$ possède une structure monïdale fermée symétrique, dont le hom interne $[A, B]$ est simplement l'ensemble des homomorphismes de $\mathbf{T}$ -algèbres $A \rightarrow B$, avec une structure de $\mathbf{T}$ -algèbre définie point par point, et le produit tensoriel $A \otimes B$ classifie les "bihomomorphismes", c'est-à-dire que les homomorphismes $A \otimes B \rightarrow C$ correspondent aux fonctions $A \times B \rightarrow C$ qui sont homomorphes en chaque variable lorsque l'autre est maintenue constante. En général, cette structure monïdale n'est clairement pas la structure de produit cartésien, même si $\mathbf{T}\text{-Alg}$ est également fermée cartésienne (considérer la théorie des M -ensembles pour un monoïde commutatif M), mais il est néanmoins intéressant de demander si $A \otimes B$ pourrait coïncider avec $A \times B$.

Si tel est le cas, on remarque immédiatement que l'algèbre libre de $\mathbf{T}$ sur un générateur (qui est une unité pour $\otimes$) doit coïncider avec l'algèbre singleton de $\mathbf{T}$ (l'unité pour $\times$) ; donc $\mathbf{T}$ n'a qu'une seule opération unaire, ou de manière équivalente toute opération p de $\mathbf{T}$ satisfait

$$p(x, x, \dots, x) = x. \quad (1)$$

Les opérations satisfaisant cette identité sont dites *affines* [11] (certains autres auteurs les appellent idempotentes, mais cela prête à confusion avec la notion d'opération unaire idempotente) ; on dit que $\mathbf{T}$ est affine si toutes ses opérations sont affines. Une opération affine p satisfait les conditions du lemme 3.3, avec $q = p$ et les u_j et v_j tous pris comme l'opération identité ; mais si $\mathbf{T}\text{-Alg}$ doit être fermée cartésienne, alors d'après le lemme 3.4 on doit aussi avoir

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv_{p,i} x_i \quad (2)$$

pour $1 \leq i \leq n$. En combinant ces n conditions, on obtient l'identité

$$p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), p(x_{21}, \dots, x_{2n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn})) = p(x_{11}, x_{22}, \dots, x_{nn}); \quad (3)$$

mais en présence de (1), chaque instance de (2) peut être retrouvée à partir de (3) en égalant des variables appropriées.

On appellera une opération p *hyperaffine* si elle satisfait les équations (1) et (3) ci-dessus, et on appellera une théorie $\mathbf{T}$ *hyperaffine* si toutes ses opérations sont hyperaffines. (Par exemple, dans la théorie des modules à gauche sur un anneau R (non nécessairement commutatif), une opération $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum r_i x_i$ est affine ssi $\sum r_i = 1$; elle est hyperaffine ssi de plus les r_i sont des idempotents deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire $r_i^2 = r_i$ et $r_i r_j = 0$ pour tout $i \neq j$). En général, une composée d'opérations hyperaffines n'est pas nécessairement hyperaffine ; mais elle l'est si les opérations commutent entre elles, et donc les opérations hyperaffines d'une théorie commutative forment une sous-théorie - il est facile de voir qu'elles incluent toutes les projections. Notons également qu'une opération hyperaffine commute avec elle-même, par (3) ; et donc la théorie $\mathbf{H}_n$ engendrée

par une seule opération p , d'arité n , satisfaisant (1) et (3) est commutative et hyperaffine. (On adopte la convention que $\mathbf{H}_1$ est la théorie triviale dont les seules opérations sont les projections).

En utilisant 3.5, on peut montrer que les algèbres d'une théorie commutative hyperaffine forment une catégorie fermée cartésienne. Mais en fait on peut être plus précis :

Proposition 4.1 (4.1). *Soit $\mathbf{T}$ une théorie commutative hyperaffine. Alors la structure monïdale fermée canonique sur $\mathbf{T}\text{-Alg}$ est fermée cartésienne. En particulier, $\mathbf{T}\text{-Alg}$ est fermée cartésienne, mais ce n'est pas un topos (et donc pas localement fermée cartésienne) à moins que $\mathbf{T} \cong \mathbf{H}_1$.*

Démonstration. Pour la première assertion, il suffit de montrer que, étant données des $\mathbf{T}$ -algèbres A, B, C , une fonction $f : A \times B \rightarrow C$ est un homomorphisme ssi c'est un bihomomorphisme (car alors le bihomomorphisme universel $A \times B \rightarrow A \otimes B$ doit être bijectif). Mais c'est une conséquence immédiate des équations (1) et (3) : (1) implique que tout homomorphisme est un bihomomorphisme, et (3) implique la réciproque, puisque

$$\begin{aligned} & f(p_A(a_1, \dots, a_n), p_B(b_1, \dots, b_n)) \\ &= p_C(f(a_1, p_B(b_1, \dots, b_n)), \dots, f(a_n, p_B(b_1, \dots, b_n))) \\ &= p_C(p_C(f(a_1, b_1), \dots, f(a_1, b_n)), \dots, p_C(f(a_n, b_1), \dots, f(a_n, b_n))) \\ &= p_C(f(a_1, b_1), \dots, f(a_n, b_n)). \end{aligned}$$

Pour la seconde assertion, rappelons du corollaire 2.7 de [8] que si $\mathbf{T}\text{-Alg}$ est un topos alors “les opérations unaires contrôlent tout” dans le sens où le foncteur d'oubli $\mathbf{T}\text{-Alg} \rightarrow M\text{-Set}$, où M est le monoïde des opérations unaires de $\mathbf{T}$, est plein et fidèle. Mais cela est clairement impossible pour une théorie affine non triviale $\mathbf{T}$, puisque M est trivial. $\square$

Il convient de mentionner que (la première moitié de) la proposition 4.1 est apparue précédemment dans les travaux de A. Kock [10] (qui a également observé que toute théorie hyperaffine est commutative) et dans les travaux de D. Higgs [6].

À quoi ressemblent les théories hyperaffines commutatives ? Un éclairage est fourni par le lemme suivant :

Lemme 4.2. *Une théorie hyperaffine commutative non dégénérée et finiment engendrée est isomorphe à $\mathbf{H}_n$ pour un certain $n \geq 1$.*

Démonstration. D'abord, on note que si p et q sont des opérations hyperaffines commutantes (d'arités n et m , disons), alors l'opération mn -aire

$$p(q(x_{11}, \dots, x_{1m}), \dots, q(x_{n1}, \dots, x_{nm}))$$

est hyperaffine et engendre la même théorie que $\{p, q\}$; on peut donc supposer que notre théorie est engendrée par une seule opération p . Ensuite, on peut supposer (en éliminant les variables redondantes) que p dépend effectivement de toutes ses variables, c'est-à-dire que l'on n'a pas d'identité de la forme $x \equiv_{p,i} y$ (où x et y sont des variables distinctes). On montre maintenant que p ne peut satisfaire aucune équation autre que celles qui découlent de (1) et (3).

On observe que (1) et (3) permettent de réduire toute opération composée définie à partir de p à une forme $p(x_1, \dots, x_n)$, où les x_i sont des variables, pas nécessairement toutes distinctes. Donc toute équation supplémentaire doit être exprimable sous la forme

$$p(x_1, \dots, x_n) = p(y_1, \dots, y_n),$$

où les n -uplets de variables $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ ne sont pas identiques. Supposons $x_i \neq y_i$; alors on a

$$x_i \equiv_{p,i} p(x_1, \dots, x_n) \equiv_{p,i} p(y_1, \dots, y_n) \equiv_{p,i} y_i,$$

donc la i -ième variable de p est redondante, contrairement à notre hypothèse. $\square$

Nous aurons plus à dire sur les théories hyperaffines commutatives non finiment engendrées dans l'exemple 8.8 ci-dessous.

Soit maintenant A une $\mathbf{H}_n$ -algèbre non vide, et fixons un élément $k \in A$. Pour chaque $i \leq n$, définissons $u_i : A \rightarrow A$ par $u_i(a) = p_A(k, \dots, k, a, k, \dots, k)$ (où a apparaît à la i -ième place à droite). On vérifie facilement que u_i est idempotent, et que pour $j \neq i$ la composée $u_i u_j$ est l'application constante de valeur k (de sorte que les u_i commutent entre eux). Soit $A_i \subseteq A$ l'image de u_i ; il est alors direct de vérifier que $p_A : A^n \rightarrow A$ se restreint en une bijection $\prod_{i=1}^n A_i \rightarrow A$, dont l'inverse est donnée par $a \mapsto (u_1(a), \dots, u_n(a))$. Ainsi A possède une décomposition en produit n -fold. Bien sûr, les ensembles A_i dépendent du choix d'un point base k ; mais si l'on fait un choix différent k' , menant à des idempotents u'_i et des sous-ensembles A'_i , on voit que $u_i u'_i = u_i$ et $u'_i u_i = u'_i$, de sorte que u_i et u'_i induisent une bijection entre A_i et A'_i commutant avec les décompositions en produit. De plus, si $f : A \rightarrow B$ est un homomorphisme de $\mathbf{H}_n$ -algèbres, alors en choisissant le point base dans B comme $f(k)$, on voit que f envoie A_i dans B_i , et donc (modulo les décompositions en produit) f est de la forme $\prod_{i=1}^n f_i$, où $f_i : A_i \rightarrow B_i$.

Dans la direction converse, on observe que tout ensemble donné sous la forme d'un produit n -fold $\prod_{i=1}^n A_i$ possède une structure canonique de $\mathbf{H}_n$ -algèbre (l'opération p , appliquée à un n -uplet d'éléments du produit, extrait la première coordonnée du premier élément, la deuxième coordonnée du deuxième, et ainsi de suite), et tout morphisme de la forme $\prod_{i=1}^n f_i : \prod_{i=1}^n A_i \rightarrow \prod_{i=1}^n B_i$ est un homomorphisme de $\mathbf{H}_n$ -algèbres. On peut donc conclure :

Proposition 4.3 (4.3). *$\mathbf{H}_n\text{-Alg}$ est équivalente à la catégorie des produits cartésiens n -fold d'ensembles, c'est-à-dire l'image (non pleine) du foncteur produit $\mathbf{Set}^n \rightarrow \mathbf{Set}$ (l'adjoint à droite du foncteur diagonal).*

Au moins dans le cas $n = 2$, la proposition 4.3 est bien connue des théoriciens des semi-groupes, pour qui les $\mathbf{H}_2$ -algèbres sont connues sous le nom de *bandes rectangulaires* (voir [3, ?]).

Maintenant, $\mathbf{Set}^n$ est un topos, mais $\mathbf{H}_n\text{-Alg}$ ne l'est pas (pour $n > 1$); la raison est, bien sûr, que le foncteur produit n'est pas conservatif - il envoie tout n -uplet $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ pour lequel au moins un A_i est vide sur l'ensemble vide. (Voir [1] pour une discussion antérieure de ce mauvais comportement de l'ensemble vide). En effet, ce que nous devons faire à $\mathbf{Set}^n$ pour obtenir $\mathbf{H}_n\text{-Alg}$ est "effondrer" tous les objets mal supportés (ceux qui ne se projettent pas de manière épimorphique sur l'objet terminal) en les rendant isomorphes à l'objet initial. Dans la section suivante, nous étudierons cette construction d'effondrement sur un topos arbitraire.

5 Effondrements à deux valeurs

En réalité, la construction d'effondrement fonctionne sur une classe de catégories plus large que les topos. Soit $\mathcal{E}$ une catégorie fermée cartésienne avec un objet initial 0 ; on dira qu'un objet A de $\mathcal{E}$ est *bien supporté* si l'unique morphisme $A \rightarrow 1$ est un épimorphisme, et *mal supporté* sinon. Pour éviter la trivialité, on suppose que 0 est mal supporté (ce qui équivaut à dire que $\mathcal{E}$ n'est pas un poset). Si $\mathcal{E}$ est une catégorie régulière, on peut substituer "épimorphisme régulier" à "épimorphisme" dans la définition et dans toute la discussion qui suit ; bien sûr, cela ne fait aucune différence lorsque $\mathcal{E}$ est un topos.

On définit l'*effondrement à deux valeurs* $\mathcal{E}_{iv}$ de $\mathcal{E}$ comme la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ dont les objets sont soit bien supportés, soit isomorphes à 0 .

Lemme 5.1. *$\mathcal{E}_{iv}$ est coréflexive dans $\mathcal{E}$, et est fermée pour les produits finis.*

Démonstration. Le coréfecteur est l'identité sur les objets bien supportés, et effondre tous les objets mal supportés vers 0 ; la fonctorialité de cette construction, ainsi que l'adjonction, est facile à vérifier puisqu'un objet bien supporté ne peut pas être envoyé vers un objet mal supporté. Si A et B sont bien supportés, alors la projection $A \times B \rightarrow B$ est épique puisque $(-)\times B$ préserve les épimorphismes, et donc $A \times B$ est bien supporté ; d'autre part, $0 \times A \cong 0$ pour tout A puisque un objet initial dans une catégorie fermée cartésienne est nécessairement strict. $\square$

Lorsque $\mathcal{E}$ est un topos, $\mathcal{E}_{iv}$ est également fermé pour l'exponentiation dans $\mathcal{E}$ puisque l'on a $A^0 \cong 1$ pour tout A , $0^A \cong 0$ pour A bien supporté, et B^A est bien supporté si B l'est (car il existe un morphisme $B \rightarrow B^A$). Seule la seconde de ces trois affirmations pourrait être fausse en général (elle est vraie si $\mathcal{E}$ est régulier ou localement fermé cartésien), mais même sans elle, on peut conclure :

Corollaire 5.2. *$\mathcal{E}_{iv}$ est fermée cartésienne.*

Démonstration. Pour construire une exponentielle dans $\mathcal{E}_{iv}$, on la construit dans $\mathcal{E}$ puis on coréfléchit. $\square$

En général, les carrés cartésiens dans $\mathcal{E}_{iv}$ ne sont pas les mêmes que dans $\mathcal{E}$; on doit calculer le carré cartésien dans $\mathcal{E}$ puis coréfléchir. Cependant, si $\mathcal{E}$ est régulier et si l'on a un diagramme cartésien dans $\mathcal{E}$

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & C \end{array}$$

avec f épimorphisme régulier et $A, B, C \in \mathcal{E}_{iv}$, alors $P \in \mathcal{E}_{iv}$; en effet, si $B \cong 0$ alors $P \cong 0$, et si B est bien supporté alors (g est épimorphisme régulier et donc) P est bien supporté. On peut donc facilement conclure :

Lemme 5.3. *Si $\mathcal{E}$ est régulier alors $\mathcal{E}_{iv}$ l'est aussi, et l'inclusion $\mathcal{E}_{iv} \rightarrow \mathcal{E}$ préserve les factorisations image. De même, si $\mathcal{E}$ est régulier effectif (= exact au sens de Barr) alors $\mathcal{E}_{iv}$ l'est aussi.*

En ce qui concerne la seconde assertion du lemme 5.3, notons qu’une relation d’équivalence sur un objet bien supporté A est nécessairement bien supportée, car elle contient le sous-objet diagonal de $A \times A$.

On rappelle qu’un topos (plus généralement, une catégorie régulière) $\mathcal{E}$ est dit à *deux valeurs* si 0 et 1 sont les seuls sous-objets de 1 (et $0 \neq 1$). Si $\mathcal{E}$ est fermé cartésien, alors tout objet de support 0 est isomorphe à 0 ; on en déduit

Lemme 5.4. *Pour une catégorie régulière fermée cartésienne $\mathcal{E}$, on a $\mathcal{E}_{\text{tv}} = \mathcal{E}$ ssi $\mathcal{E}$ est à deux valeurs.*

Si $\mathcal{E}$ a des coproduits finis disjoints, alors $\mathcal{E}_{\text{tv}}$ aussi (et le foncteur d’inclusion les préserve) ; de plus, l’assignation $A \mapsto 1 + A$ définit un foncteur fidèle (non plein) $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{\text{tv}}$. Si $\mathcal{E}$ est localement fermé cartésien (de sorte que les coproduits sont stables par changement de base), alors on peut considérer T comme un plongement plein $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{\text{tv}}/(1 + 1)$, dont l’image consiste précisément en ces objets $B \rightarrow 1 + 1$ dont le changement de base le long de la première coprojection $1 \rightarrow 1 + 1$ est isomorphe à 1. On conclut ainsi :

Proposition 5.5 (5.5). *Si $\mathcal{E}$ est localement fermé cartésien et a des coproduits finis disjoints, alors il est récupérable à équivalence près à partir de $\mathcal{E}_{\text{tv}}$. En particulier, pour un tel $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_{\text{tv}}$ est localement fermé cartésien ssi il coïncide avec $\mathcal{E}$.*

Démonstration. La preuve de la première assertion a été esquissée ci-dessus. Pour la seconde, notons que l’effondrement à deux valeurs est idempotent (c’est-à-dire que $(\mathcal{E}_{\text{tv}})_{\text{tv}} = \mathcal{E}_{\text{tv}}$) ; donc si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_{\text{iv}}$ sont tous deux localement fermés cartésiens, cette égalité se relève en une égalité $\mathcal{E}_{\text{iv}} = \mathcal{E}$. $\square$

Il n’est pas clair si les catégories qui apparaissent comme $\mathcal{E}_{\text{iv}}$, pour un $\mathcal{E}$ satisfaisant les hypothèses de la proposition 5.5, peuvent être caractérisées intrinsèquement. Cependant, dans la section suivante, nous donnerons une caractérisation intrinsèque des topos effondrés, en utilisant une manière légèrement différente de “reconstruire” $\mathcal{E}$ à partir de $\mathcal{E}_{\text{iv}}$, dans laquelle l’objet $1 + 1$ est remplacé par le classifiant des sous-objets Ω .

6 Le théorème de reconstruction

Supposons que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{iv}}$ soit l’effondrement à deux valeurs d’un topos. Alors l’objet Ω de $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{E}$, ainsi que son sous-objet générique $\top : 1 \rightarrow \Omega$; de plus, il classe encore les sous-objets bien supportés dans le sens où, si l’on se donne $A' \rightarrow A$ dans $\mathcal{E}$ avec A' bien supporté, alors il existe un unique morphisme $A \rightarrow \Omega$ dans $\mathcal{E}$ tel que

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & \Omega \end{array}$$

soit un carré cartésien. (Bien sûr, il y aura aussi des morphismes $A \rightarrow \Omega$ pour lesquels ce diagramme est un carré cartésien, mais en général il y en aura beaucoup).

Notre hypothèse permanente pour cette section sera que $\mathcal{E}$ est une catégorie fermée cartésienne à deux valeurs (avec toutes les limites finies) possédant un “classifiant des sous-objets bien supportés” comme ci-dessus. Il est remarquable de voir combien de la structure de base d’un topos, telle que développée (par exemple) dans le chapitre 1 de [7], peut être construite à partir de ces données, sans “sortir de la classe des objets bien supportés”. Par exemple, la structure de demi-treillis brouwerien $(\wedge, \Rightarrow)$ sur Ω peut être définie exactement comme dans la preuve du lemme 2.1 (même si les sous-objets bien supportés d’un objet donné A ne forment pas nécessairement un demi-treillis brouwerien - l’intersection de deux sous-objets bien supportés n’est pas nécessairement bien supportée!).

Dans ce qui suit, nous n’aurons pas besoin de la structure de joint binaire sur Ω , mais nous aurons besoin de son plus petit élément ; on ajoute donc maintenant à nos hypothèses l’existence d’un morphisme (nécessairement unique) $\perp : 1 \rightarrow \Omega$ tel que $\perp \times \text{id}_\Omega : 1 \times \Omega \rightarrow \Omega \times \Omega$ se factorise à travers la relation d’ordre Ω_1 , et tel que

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \Omega \end{array}$$

soit un carré cartésien.

On peut maintenant énoncer le théorème principal de cette section :

Théorème 6.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie fermée cartésienne à deux valeurs avec égalisateurs, possédant un classifiant des sous-objets bien supportés Ω qui a un plus petit élément $\perp$ classifiant le sous-objet nul de 1. Alors il existe un topos $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{C} \cong \mathcal{E}_{\text{tv}}$.*

L’idée de base de la preuve du théorème 6.1 est que l’on peut considérer les morphismes $f : A \rightarrow \Omega$ dans $\mathcal{C}$ comme des “sous-objets fantômes” de A , qui peuvent être identifiés avec des “sous-objets honnêtes” si le changement de base de $\top : 1 \rightarrow \Omega$ le long de f se trouve être bien supporté. Les objets de notre topos $\mathcal{E}$ seront (les “domaines” des) sous-objets fantômes d’objets bien supportés de $\mathcal{C}$, et ses morphismes seront des “applications partielles fantômes” entre les objets bien supportés correspondants de $\mathcal{C}$. Pour cela, nous devons observer que la construction standard des classifiants d’applications partielles dans un topos [7, 1.26] fonctionne parfaitement bien dans notre situation ; c’est-à-dire :

Lemme 6.2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie satisfaisant les hypothèses de 6.1. Alors pour tout objet bien supporté B de $\mathcal{C}$, il existe un monomorphisme $B \rightarrow \tilde{B}$ tel que, si*

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\text{dom}} & B \\ \downarrow & & \\ & & A \end{array}$$

est une application partielle $A \rightarrow B$ avec domaine bien supporté A' , il existe un unique $\tilde{f} : A \rightarrow \tilde{B}$ rendant le carré

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & \tilde{B} \end{array}$$

cartésien.

De nouveau, on pense aux morphismes $A \rightarrow \tilde{B}$ dans $\mathcal{C}$ comme des applications partielles fantômes $A \rightarrow B$; on écrit $d : \tilde{B} \rightarrow \Omega$ pour le morphisme classifiant du sous-objet (bien supporté) $B \rightarrow \tilde{B}$, de sorte que df classifie le domaine fantôme de l'application partielle fantôme f .

On peut définir la composition des applications partielles fantômes comme suit. Soit $m : \tilde{C} \rightarrow \tilde{\tilde{C}}$ le morphisme classifiant l'application partielle

$$C \xrightarrow{\text{id}} C$$

et soit $e : \tilde{C}^B \times \tilde{B} \rightarrow \tilde{C}$ le composé

$$\tilde{C}^B \times \tilde{B} \xrightarrow{\tilde{\text{ev}}} \tilde{\tilde{C}} \rightarrow \tilde{C},$$

où $\tilde{\text{ev}}$ correspond à l'application partielle

$$\tilde{C}^B \times \tilde{B} \xrightarrow{\text{ev}} \tilde{C}.$$

On définit alors $c : \tilde{C}^B \times \tilde{B}^A \rightarrow \tilde{C}^A$ comme le transposé du composé

$$\tilde{C}^B \times \tilde{B}^A \times A \xrightarrow{\text{id} \times \text{ev}} \tilde{C}^B \times \tilde{B} \xrightarrow{\text{ev}} \tilde{C}.$$

On peut vérifier que c internalise l'opération de composition des applications partielles honnêtes dont la composée est aussi honnête, dans un sens évident.

On définit maintenant un objet de $\mathcal{E}$ comme un couple (A, f) , où A est un objet bien supporté de $\mathcal{C}$ et $f : A \rightarrow \Omega$. Un morphisme $(A, f) \rightarrow (B, g)$ dans $\mathcal{E}$ est (nommé par) un morphisme $h : A \rightarrow \tilde{B}$ dans $\mathcal{C}$ tel que

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{h} & \tilde{B} & \xrightarrow{d} & \Omega^B \\ f \downarrow & & g \downarrow & & \\ \Omega & \longrightarrow & \Omega^B & & \end{array}$$

commute, et que le couple $(A \xrightarrow{h} \tilde{B} \rightarrow \Omega^B, A \rightarrow 1 \xrightarrow{\epsilon} \Omega^B)$ se factorise à travers $\Omega_1^B \rightarrow (\Omega \times \Omega)^B \cong \Omega^B \times \Omega^B$. Étant donnés des morphismes

$$(A, f) \xrightarrow{h} (B, g) \xrightarrow{k} (C, j)$$

dans $\mathcal{E}$, on définit leur composé comme le transposé de

$$1 \xrightarrow{(\bar{k}, \bar{h})} \tilde{C}^B \times \tilde{B}^A \xrightarrow{c} \tilde{C}^A$$

(bien sûr, il faut vérifier qu'il s'agit d'un morphisme de $\mathcal{E}$), et le morphisme identité sur (A, f) est défini comme la factorisation à travers $\tilde{A} \rightarrow \Omega^A$ du morphisme $A \rightarrow \Omega^A$ dont le transposé est

$$A \times A \xrightarrow{(\top \pi_1, \delta)} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega,$$

où δ classifie le sous-objet diagonal de $A \times A$.

Lemme 6.3. $\mathcal{E}$ est une catégorie.

La preuve de 6.3 est fastidieuse mais directe, et nous l'omettons.

On a un foncteur $R : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ qui envoie un objet (A, f) sur le changement de base de $\top : 1 \rightarrow \Omega$ le long de f , et un morphisme $h : (A, f) \rightarrow (B, g)$ sur la restriction de h à $R(A, f) \rightarrow A$ (il est direct de vérifier que cette restriction se factorise à travers $R(B, g) \rightarrow B \rightarrow \tilde{B}$). Disons que (A, f) est *honnête* si $R(A, f)$ est bien supporté ; alors on obtient facilement

Lemme 6.4. R se restreint en une équivalence de la sous-catégorie pleine $\mathcal{E}_h$ des objets honnêtes de $\mathcal{E}$ vers la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}_{ws}$ des objets bien supportés de $\mathcal{C}$.

Un inverse (à isomorphisme près) de R est donné par le foncteur $T : \mathcal{C}_{ws} \rightarrow \mathcal{E}_h$ qui envoie A sur $(A, A \rightarrow 1 \xrightarrow{\top} \Omega)$. On étend maintenant T en un foncteur défini sur tout $\mathcal{C}$ en posant $T0 = (1, \perp)$. Pour rendre cela fonctoriel, on a besoin de

Lemme 6.5. $T0$ est un objet initial de $\mathcal{E}$.

Démonstration. On doit montrer que, pour tout (A, f) , il existe un seul $h : 1 \rightarrow \tilde{A}$ dans $\mathcal{C}$ qui définit un morphisme $T0 \rightarrow (A, f)$ dans $\mathcal{E}$. On rappelle que $\tilde{A}$ est défini comme l'égalisateur de $\bar{\phi} : \Omega^A \rightarrow \Omega^A$ et de l'identité, où $\phi : \Omega^A \times A \rightarrow \Omega$ classe le sous-objet $(\{\}, \text{id}_A) : A \rightarrow \Omega^A \times A$; donc pour l'instant on considère h comme un morphisme $1 \rightarrow \Omega^A$ satisfaisant $\bar{\phi}h = h$, ou de manière équivalente $\phi(h \times \text{id}_A) = \text{ev}(h \times \text{id}_A) = \bar{h} : A \rightarrow \Omega$. Or on a $dh = \perp : 1 \rightarrow \Omega$, où d doit maintenant être considéré comme le morphisme $\Omega^A \rightarrow \Omega$ classifiant $\{\} : A \rightarrow \Omega^A$, et donc

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{h} & \Omega^A \\ \perp \downarrow & & \downarrow d \\ \Omega & \xlongequal{\quad} & \Omega \end{array}$$

commute. Mais $d\pi_1$ classe le sous-objet $\{\} \times \text{id}_A : A \times A \rightarrow \Omega^A \times A$ qui contient celui classifié par ϕ , et donc $(\phi, d\pi_1)$ se factorise à travers $\Omega_1 \rightarrow \Omega \times \Omega$, de sorte que

$$\bar{h} = \phi(h \times \text{id}_A) \leq d\pi_1(h \times \text{id}_A) = (A \rightarrow 1 \xrightarrow{\top} \Omega)$$

dans le poset des morphismes $A \rightarrow \Omega$. Puisque $\perp$ est (internement) le plus petit élément de Ω , on en déduit que $\bar{h} = (A \rightarrow 1 \xrightarrow{\top} \Omega)$; le fait que (le transposé de) ce morphisme particulier définisse bien un morphisme $T0 \rightarrow (A, f)$ dans $\mathcal{E}$ est facile à vérifier. $\square$

Corollaire 6.6. Le foncteur $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ est un plongement plein, adjoint à gauche de $R : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$.

Démonstration. Après 6.4 et 6.5, la seule chose à vérifier est que, si A est bien supporté et (B, g) n'est pas honnête, alors il n'y a pas de morphismes $TA \rightarrow (B, g)$ dans $\mathcal{E}$ (car on sait qu'il n'y a pas de morphismes $A \rightarrow R(B, g) \cong 0$ dans $\mathcal{C}$). En fait, on va montrer que les objets honnêtes forment un coséparateur dans $\mathcal{E}$, c'est-à-dire que si (A, f) est honnête et $h : (A, f) \rightarrow (B, g)$, alors (B, g) est honnête.

Mais si (A, f) est honnête (correspondant à un sous-objet bien supporté $A' \rightarrow A$), alors la première condition dans la définition d'un morphisme dit que h classe une application partielle honnête

$A \rightarrow B$ de domaine A' . La seconde condition dit que le couple $(\psi, g\pi_2) : A \times B \rightarrow \Omega \times \Omega$ se factorise à travers Ω_1 , où ψ classifie le graphe $A' \rightarrow A \times B$ de cette application partielle, et donc que $A' \leq A \times B'$ comme sous-objets de $A \times B$, où $B' = R(B, g)$. Mais ceci force $A \times B'$, et donc B' , à être bien supporté. $\square$

Il est maintenant clair que l'on pourra identifier $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{E}_{\text{tv}}$, à condition de montrer que $\mathcal{E}$ est un topos. On entreprend maintenant cette tâche.

Lemme 6.7. *$\mathcal{E}$ a des produits finis, et T les préserve.*

Démonstration. L'objet terminal est $T1$; il est facile de voir que l'unique morphisme $h : A \rightarrow \bar{1} \cong \Omega$ dans $\mathcal{C}$ qui définit un morphisme $(A, f) \rightarrow T1$ dans $\mathcal{E}$ est f lui-même. Le produit de deux objets (A, f) et (B, g) est $(A \times B, \wedge(f\pi_1, g\pi_2))$; les projections produit sont les applications partielles fantômes de $A \times B$ vers A et B qui sont les restrictions des projections produit réelles dans $\mathcal{C}$ au sous-objet fantôme approprié, et on définit le couple pour les morphismes dans $\mathcal{E}$ en utilisant le morphisme $\bar{A} \times \bar{B} \rightarrow \overline{A \times B}$ qui classifie l'application partielle

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\text{id}} & A \times B \\ \downarrow & & \\ \bar{A} \times \bar{B} & & \end{array}$$

La vérification des détails restants est directe. $\square$

Proposition 6.8 (6.8). *$\mathcal{E}$ est fermée cartésienne.*

Démonstration. Étant donnés des objets (A, f) et (B, g) de $\mathcal{E}$, un morphisme $(A, f) \rightarrow (B, g)$ est un type particulier de morphisme $A \rightarrow \tilde{B}$ dans $\mathcal{E}$; on s'attend donc à ce que $(B, g)^{(A, f)}$ soit un sous-objet fantôme de $\tilde{B}^A$. On le définit comme $(\tilde{B}^A, \wedge(c_1, c_2))$, où c_1 et c_2 sont des morphismes $\tilde{B}^A \rightarrow \Omega$ correspondant aux deux conditions dans la définition d'un morphisme de $\mathcal{E}$. Plus précisément, c_1 est le composé

$$\tilde{B}^A \xrightarrow{d^A} \Omega^A \xrightarrow{[f]} \Omega,$$

où $[f]$ classifie $\bar{f} : 1 \rightarrow \Omega^A$, et c_2 est le composé

$$\tilde{B}^A \longrightarrow \Omega^{B \times A} \xrightarrow{\text{id} \times \overline{g\pi_1}} \Omega^{B \times A} \times \Omega^{B \times A} \xrightarrow{\Rightarrow_{B \times A}} \Omega,$$

où $\Rightarrow_{B \times A}$ classifie $\Omega_1^{B \times A} \rightarrow \Omega^{B \times A} \times \Omega^{B \times A}$. La vérification de l'adjonction entre $(-) \times (A, f)$ et $(-)^{(A, f)}$ est directe. $\square$

On observe que si f et g sont deux morphismes $A \rightarrow \Omega$ dans $\mathcal{E}$ tels que (f, g) se factorise à travers $\Omega_1 \rightarrow \Omega \times \Omega$, alors le morphisme $A \rightarrow \tilde{A}$ dans $\mathcal{E}$ qui définit l'identité sur (A, f) définit aussi un morphisme $(A, f) \rightarrow (A, g)$ dans $\mathcal{E}$, qui est clairement monique. On appellera un monomorphisme de cette forme un *sous-objet canonique* de (A, g) . En utilisant les sous-objets canoniques, on peut vérifier

Lemme 6.9. *$\mathcal{E}$ a des égalisateurs.*

Démonstration. Soient h et k deux morphismes quelconques $(A, f) \rightarrow (B, g)$ dans $\mathcal{E}$. On définit leur égalisateur comme le sous-objet canonique (A, e) de (A, f) , où

$$e = \wedge(f, \delta_{\tilde{B}}(h, k))$$

et $\delta_{\tilde{B}} : \tilde{B} \times \tilde{B} \rightarrow \Omega$ classe le sous-objet diagonal de $\tilde{B} \times \tilde{B}$. Il est alors direct de vérifier que, étant donné un morphisme $l : (C, j) \rightarrow (A, f)$ dans $\mathcal{E}$, on a $hl = kl$ ssi l est aussi un morphisme $(C, j) \rightarrow (A, e)$, et donc que (A, e) est bien l'égalisateur requis. $\square$

Il est bien connu que dans tout topos $\tilde{\Omega}$ est isomorphe à la relation d'ordre Ω_1 , et cela fonctionne aussi dans notre contexte : l'isomorphisme $\tilde{\Omega} \rightarrow \Omega_1$ classe la paire de sous-objets bien supportés

$$(1 \rightarrow \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}, \Omega \rightarrow \tilde{\Omega})$$

dont le premier est contenu dans le second, et son inverse classe l'application partielle

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\text{id}} & \Omega \\ \downarrow & & \\ \Omega_1 & & \end{array}$$

En utilisant ceci, on obtient facilement

Lemme 6.10. *$T\Omega$ est un classifiant pour les sous-objets canoniques dans $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Un morphisme $(A, f) \rightarrow T\Omega$ dans $\mathcal{E}$ correspond à un morphisme $h : A \rightarrow \tilde{\Omega}$ tel que $dh = f$ (la seconde condition dans la définition d'un morphisme de $\mathcal{E}$ étant vide lorsque le codomaine est de la forme TB pour un B bien supporté), et donc à un morphisme $A \rightarrow \Omega_1$ dont la seconde coordonnée est f , ou de manière équivalente à un morphisme $e : A \rightarrow \Omega$ tel que (e, f) se factorise à travers Ω_1 . On a donc une bijection entre les morphismes $h : (A, f) \rightarrow T\Omega$ et les sous-objets canoniques $(A, e) \rightarrow (A, f)$; de plus, il n'est pas difficile de montrer que cette bijection rend

$$\begin{array}{ccc} (A, e) & \longrightarrow & (\Omega, \text{id}_{\Omega}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A, f) & \longrightarrow & T\Omega \end{array}$$

un carré cartésien pour tout h . Notons que $(\Omega, \text{id}_{\Omega})$ est un objet honnête, et donc qu'il peut être montré isomorphe à $T1$, l'isomorphisme identifiant l'inclusion canonique $(\Omega, \text{id}_{\Omega}) \rightarrow T\Omega$ avec $T\top$. $\square$

Pour achever la preuve du théorème 6.1, on doit montrer que tout monomorphisme dans $\mathcal{E}$ est isomorphe à un sous-objet canonique.

Lemme 6.11. *Soit $h : (A, f) \rightarrow (B, g)$ un monomorphisme dans $\mathcal{E}$. Alors le double transposé $\tilde{h} : B \rightarrow \Omega^A$ du composé $h : A \rightarrow \tilde{B} \rightarrow \Omega^B$ se factorise à travers $\tilde{A} \rightarrow \Omega^A$.*

Démonstration. Pour vérifier cela, il est commode d'utiliser une description de $\tilde{A}$ différente de celle que nous avons utilisée jusqu'à présent, à savoir le carré cartésien de $\Omega_1^{A \times A} \rightarrow \Omega^{A \times A} \times \Omega^{A \times A}$ le long de

$$\Omega^A \cong \Omega^A \times 1 \xrightarrow{\text{sq} \times \delta} \Omega^{A \times A} \times \Omega^{A \times A},$$

où δ classifie le sous-objet diagonal de $A \times A$ et sq est le transposé du morphisme

$$\Omega^A \times A \times A \xrightarrow{(\text{ev} \cdot \pi_{12}, \text{ev} \cdot \pi_{13})} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$$

(c'est-à-dire que sq internalise l'opération de "mise au carré" d'un sous-objet fantôme de A). Pour montrer que cette définition est équivalente à la définition usuelle, on vérifie que $\{\} : A \rightarrow \Omega^A$ se factorise à travers ce carré cartésien, et qu'il possède la même propriété universelle que la définition usuelle ; on omet les détails.

Maintenant, étant donné h , les constructions données plus haut pour les produits et les égalisateurs dans $\mathcal{E}$ nous disent que le carré cartésien de h avec lui-même peut s'écrire sous la forme $(A \times A, e)$, où e est un morphisme approprié $A \times A \rightarrow \Omega$; et l'affirmation que h est monique (c'est-à-dire que les deux projections de ce carré cartésien vers (A, f) sont égales) nous dit que (e, δ) se factorise à travers $\Omega_1 \rightarrow \Omega \times \Omega$. En réinterprétant cette condition en termes de h , cela dit précisément que $\tilde{h} : B \rightarrow \Omega^A$ se factorise à travers le carré cartésien défini ci-dessus. Une fois de plus, on laisse les détails de la vérification au lecteur. $\square$

Corollaire 6.12. *Tout monomorphisme dans $\mathcal{E}$ est isomorphe à un monomorphisme canonique.*

Démonstration. Soit $h : (A, f) \rightarrow (B, g)$ un monomorphisme, et soit $\tilde{h} : B \rightarrow \tilde{A}$ comme dans le lemme 6.11. Le composé

$$f' : B \xrightarrow{\tilde{h}} \tilde{A} \xrightarrow{d} \Omega$$

ne sera pas en général égal à g , mais le couple (f', g) se factorisera à travers $\Omega_1 \rightarrow \Omega \times \Omega$ (parce que h satisfait la seconde condition dans la définition d'un morphisme de $\mathcal{E}$), de sorte que (B, f') est un sous-objet canonique de (B, g) . De plus, $h : (A, f) \rightarrow (B, g)$ se factorise à travers ce sous-objet ; et le morphisme résultant $h : (A, f) \rightarrow (B, f')$ est un isomorphisme, d'inverse $\tilde{h} : (B, f') \rightarrow (A, f)$. Une fois de plus, les détails sont directs. $\square$

En combinant 6.7-6.12, on a vérifié que $\mathcal{E}$ est un topos ; la preuve du théorème 6.1 est donc achevée.

7 Les variétés fermées cartésiennes comme topos effondrés

Dans cette section, on achève la preuve du théorème 1.2, en montrant que la condition (3) de ce théorème implique que $\mathbf{T}\text{-Alg}$ satisfait les hypothèses du théorème de reconstruction 6.1.

On a noté que la condition (3)(b) de 1.2 et la condition (3) de 1.3 sont toutes deux des affaiblissements formels de la condition (3)(b) de 1.1. Comme elles semblent être affaiblies "dans des directions opposées", il est peut-être surprenant que la première implique la seconde, non pas pour $\mathbf{T}$ lui-même, mais pour une théorie qui lui est étroitement associée. Soit $\mathbf{T}^+$ la théorie des $\mathbf{T}$ -algèbres pointées, c'est-à-dire la théorie obtenue à partir de $\mathbf{T}$ en adjoignant une nouvelle constante k et aucune nouvelle équation.

Proposition 7.1 (7.1). *Soit $\mathbf{T}$ une théorie satisfaisant la condition (3)(b) du théorème 1.2. Alors $\mathbf{T}^+$ satisfait la condition (3) du théorème 1.3.*

Démonstration. D'abord, on observe qu'une opération n -aire de $\mathbf{T}^+$ peut être considérée comme une opération $(n+1)$ -aire de $\mathbf{T}$ avec k substitué à l'une des variables. Il suffit donc de vérifier la condition de 1.3 pour une opération $p(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{T}$ (bien que les opérations unaires que l'on construira impliqueront k). Étant donné p , soient $q(y_1, \dots, y_m)$, u_j , v_j et α comme dans la condition (3)(b) de 1.2; on applique alors (3)(b) à nouveau à q pour obtenir $r(z_1, \dots, z_l)$, w_j , t_j et β tels que

$$r(w_1 z, \dots, w_l z) = z$$

et

$$w_j q(y_1, \dots, y_m) \equiv_{r,j} t_j(y_{\beta(j)}) \quad (1 \leq j \leq l).$$

Alors on a

$$p(x_1, \dots, x_n) = q(u_1 p, \dots, u_m p) = r(w_1 q(u_1 p, \dots, u_m p), \dots, w_l q(u_1 p, \dots, u_m p)).$$

Mais

$$w_j q(u_1 p, \dots, u_m p) \equiv_{r,j} t_j u_{\beta(j)} p \equiv_{r,j} w_j q(k, \dots, k, u_{\beta(j)} p, k, \dots, k),$$

et

$$w_j q(k, \dots, k, u_{\beta(j)} p(x_1, \dots, x_n), k, \dots, k) = w_j q(k, \dots, k, v_{\beta(j)}(x_{\alpha\beta(j)}), k, \dots, k).$$

Donc si on définit $q' = r$, $u'_j(x) = w_j q(k, \dots, k, u_{\beta(j)}(x), k, \dots, k)$,

$$v'_j(x) = w_j q(k, \dots, k, v_{\beta(j)}(x), k, \dots, k),$$

et $\alpha' = \alpha\beta$, on voit que les conditions dans (3) de 1.3 sont satisfaites. $\square$

Corollaire 7.2. *Soit $\mathbf{T}$ une théorie satisfaisant la condition (3)(b) du théorème 1.2. Alors $\mathbf{T}\text{-Alg}$ possède un classifiant des sous-objets bien supportés.*

Démonstration. Soit Ω le classifiant des sous-objets pour $\mathbf{T}^+\text{-Alg}$, construit dans la section 2. Maintenant, étant donnée une sous-algèbre non vide A' d'une $\mathbf{T}$ -algèbre A , on peut enrichir A et A' en $\mathbf{T}^+$ -algèbres en choisissant un point base $k_A \in A'$, et alors 2.4 donne un unique $\mathbf{T}^+$ -homomorphisme $h : A \rightarrow \Omega$ avec $h^{-1}(k_A) = A'$. Formellement, la définition de h semble dépendre du choix de k_A ; mais si l'on fait un choix différent k'_A , menant à un homomorphisme h' , alors puisque h' envoie tout A' sur k_A , c'est encore un $\mathbf{T}^+$ -homomorphisme pour notre choix original de k_A , et doit donc coïncider avec h . Donc h est l'unique $\mathbf{T}$ -homomorphisme $A \rightarrow \Omega$ avec $h^{-1}(k_A) = A'$.

Ensuite, on doit vérifier que le plus petit élément de Ω (c'est-à-dire la sous-algèbre $\langle k \rangle$ de l'algèbre libre $\mathbf{T}^+ F^+(x)$ sur un générateur engendrée par la constante k) forme une sous- $\mathbf{T}$ -algèbre singleton de Ω (ce n'est pas, bien sûr, une sous- $\mathbf{T}^+$ -algèbre), de sorte qu'il définit un morphisme $\perp : 1 \rightarrow \Omega$ dans $\mathbf{T}\text{-Alg}$. Pour cela, on doit invoquer la condition (3)(a) :

Lemme 7.3. *Soit $\mathbf{T}$ une théorie satisfaisant la condition (3) du théorème 1.2. Alors $\{\langle k \rangle\}$ est une sous- $\mathbf{T}$ -algèbre singleton de Ω .*

Démonstration. Il sera commode de considérer $F^+(x)$ comme l'algèbre libre $\mathbf{T} F(k, x)$ sur deux générateurs k et x , et $\langle k \rangle$ comme l'algèbre libre $\mathbf{T}$ sur k . Soit u une opération unaire de $\mathbf{T}$; par définition, on a

$$u_\Omega(\langle k \rangle) = \{v(k, x) \in F(k, x) \mid v(k, ux) \in \langle k \rangle\}.$$

Mais l'affirmation que $v(k, ux)$ appartient à $\langle k \rangle$ signifie qu'il ne dépend pas de la variable x , c'est-à-dire que $ux \equiv_{v,2} uy$. Donc par (3)(a) de 1.2 on a $x \equiv_{v,2} y$, c'est-à-dire $v(k, x) \in \langle k \rangle$. $\square$

On a maintenant vérifié toutes les hypothèses du théorème 6.1 pour la catégorie $\mathbf{T}\text{-Alg}$, où $\mathbf{T}$ est une théorie satisfaisant la condition (3) du théorème 1.2 : la complétude finie et le caractère à deux valeurs sont vrais pour tout $\mathbf{T}$ (à condition qu'il n'ait pas de constantes), la clôture cartésienne a été établie en 3.5, et l'existence et les propriétés de Ω ont été établies en 7.2 et 7.3. Donc la preuve du théorème 1.2 est achevée.

8 Remarques et exemples

Remarque 8.1. *Le remplacement de la condition (3)(a) dans le théorème 1.1 par la condition plus forte (3)(a) dans 1.2 est inévitable. Soit $\mathbf{T}$ la théorie engendrée par une opération unaire u et une opération binaire b , soumises aux équations*

$$b(x, x) = x, \quad b(b(x, y), b(z, t)) = b(x, t)$$

et

$$ub(x, y) = uy = b(ux, y).$$

Ainsi, une $\mathbf{T}$ -algèbre est une $\mathbf{H}_2$ -algèbre (telle que définie dans la section 4) avec (si elle est non vide) un élément distingué dans son premier facteur. Il n'est pas difficile de vérifier que $\mathbf{T}$ satisfait (3)(a) de 1.1 et (3)(b) de 1.2, mais pas (3)(a) de 1.2 (pas même le cas particulier de (3)(a) utilisé dans la preuve du lemme 7.3).

Remarque 8.2. *Néanmoins, la conjonction de (3)(a) de 1.1 et (3) de 1.3 implique (3)(a) de 1.2. En effet, supposons que*

$$p(w_1(x_{\alpha(1)}), \dots, w_n(x_{\alpha(n)}))$$

ne dépende pas de x_i pour un certain i ; alors si $up(v_1, \dots, v_n) = v(v_j)$ pour un certain j , on ne peut pas avoir $\alpha(j) = i$ (sinon la composée vw_j serait une pseudo-constante), et donc dans une équation de la forme

$$p(y_1, \dots, y_n) = q(v_1(y_{\beta(1)}), \dots, v_m(y_{\beta(m)})),$$

on a $\alpha\beta(k) \neq i$ pour tout k , de sorte que le membre de droite ne dépend d'aucun y_j avec $\alpha(j) = i$. Puisque la condition (3)(b) de 1.1 implique trivialement à la fois (3)(b) de 1.2 et (3) de 1.3, il s'ensuit que les théorèmes 1.2 et 1.3 nous fournissent une nouvelle preuve, complètement indépendante de celle donnée dans [8], de l'implication (3) $\Rightarrow$ (1) du théorème 1.1.

Remarque 8.3. *La condition syntaxique (3) de 1.3, contrairement à celles de 1.1 et 1.2, ne place aucune interdiction sur la présence de constantes dans $\mathbf{T}$. En effet, si $\mathbf{T}$ est une théorie satisfaisant les conditions de 1.3, et $\mathbf{T}'$ est une théorie obtenue à partir de $\mathbf{T}$ en ajoutant de nouvelles constantes et (éventuellement) de nouvelles équations, alors $\mathbf{T}'$ satisfait aussi les conditions de 1.3 (ceci est*

facile à voir en utilisant la condition (2), ainsi que (3)). On pourrait être tenté de conjecturer, d'après 7.1, que toute théorie satisfaisant 1.3 pourrait être obtenue en ajoutant des constantes à une théorie satisfaisant la condition (3)(b) de 1.2, mais ce n'est pas le cas : le contre-exemple suivant a été signalé par Peter Freyd. Soit $\mathbf{T}$ engendrée par deux opérations unaires l, r et une opération binaire b , satisfaisant

$$lb(x, y) = x \quad \text{et} \quad rb(x, y) = y.$$

Ainsi, une $\mathbf{T}$ -algèbre est un ensemble A muni d'une rétraction spécifiée $A \rightarrow A \times A$ (cf. [8, exemple 1.3]). Il n'est pas difficile de vérifier que $\mathbf{T}$ satisfait la condition (3) de 1.3 ; mais elle n'a pas de constantes (ni de pseudo-constantes), et ne satisfait pas (3)(b) de 1.2.

Remarque 8.4. L'hypothèse de non-dégénérescence dans les théorèmes 1.1 et 1.2 ne peut être omise. Il est bien connu qu'il y a deux variétés dégénérées (à une seule sorte), dont l'une ne contient que des algèbres singletons et l'autre contient également l'algèbre vide. La première est un topos (le topos dégénéré), mais la seconde, bien que localement fermée cartésienne (en fait, un quasitopos), n'est pas un topos. La seconde peut être considérée comme l'effondrement à deux valeurs du topos dégénéré, si l'on modifie la définition de $\mathcal{E}_{iv}$ en disant qu'elle est obtenue en adjoignant un objet initial strict à $\mathcal{E}_{ws}$; mais, dans ce cas, la première n'est pas l'effondrement à deux valeurs d'un topos.

Remarque 8.5. De même, l'hypothèse sur les pseudo-constantes dans le théorème 1.3 est essentielle. Si $\mathbf{T}$ est une théorie ayant une pseudo-constante mais pas de constantes, alors $\mathbf{T}\text{-Alg}$ ne peut pas avoir de classifiant des sous-objets : en effet, l'algèbre singleton 1 a deux sous-algèbres distinctes, mais il y a au plus un homomorphisme de 1 vers toute autre $\mathbf{T}$ -algèbre. D'autre part, si $\mathbf{T}$ est une théorie avec une constante qui satisfait les conditions de 1.3, alors la théorie $\mathbf{T}'$ obtenue à partir de $\mathbf{T}$ en remplaçant toutes ses constantes par des pseudo-constantes satisfait encore (2) de 1.3, puisque les treillis de sous-algèbres dans $\mathbf{T}'\text{-Alg}$ sont obtenus à partir de ceux dans $\mathbf{T}\text{-Alg}$ simplement en ajoutant un nouveau plus petit élément en dessous de l'original. (En fait, comme laissé entendre dans la section 2, l'équivalence de (2) et (3) dans 1.3 reste valable sans l'hypothèse sur les pseudo-constantes).

Quand un topos $\mathcal{E}$ s'effondre-t-il en une variété ? Puisqu'une variété est cocomplète [14] et a de petits hom-ensembles, il est facile de vérifier que les mêmes conditions sont valables pour un topos reconstruit à partir d'elle comme dans la section 6 ; donc une condition nécessaire est que $\mathcal{E}$ soit défini sur $\mathbf{Set}$ [7, 4.41], et nous verrons brièvement que $\mathcal{E}$ doit en fait être un topos de Grothendieck. Avant d'aller plus loin, cependant, on doit noter que la question ci-dessus (et la question similaire "Quand un topos est-il une variété ?" posée à la fin de [8]) contient ce que les philosophes appelleraient une erreur catégorielle : un topos est un certain type de catégorie abstraite, tandis qu'une variété est un certain type de catégorie concrète - de sorte que, pour répondre à la question de savoir si $\mathcal{E}_{iv}$ est une variété, on doit spécifier ce qui doit être considéré comme le foncteur d'oubli $\mathcal{E}_{iv} \rightarrow \mathbf{Set}$. Bien sûr, ce foncteur doit être représentable, donc ce que nous avons réellement à faire est de spécifier l'objet représentant (disons G). Il y a deux propriétés que G doit clairement posséder : ce doit être un générateur pour $\mathcal{E}_{iv}$ (de sorte que $\text{hom}(G, -)$ soit fidèle) et il doit être projectif (de sorte que $\text{hom}(G, -)$ préserve les épimorphismes). Mais en fait ces deux propriétés sont suffisantes : une fois les deux données, il découle du lemme 5.3 que $\mathcal{E}_{iv}$, muni du foncteur

$\text{hom}(G, -) : \mathcal{E}_{\text{iv}} \rightarrow \mathbf{Set}$, satisfait les hypothèses du théorème de Linton [13] caractérisant les variétés.

La question peut donc être reformulée : “Quand $\mathcal{E}_{\text{iv}}$ a-t-il un générateur projectif ?” La réponse est très simple :

Lemme 8.6. *Soit $\mathcal{E}$ un topos cocomplet avec de petits hom-ensembles. Alors $\mathcal{E}_{\text{iv}}$ a un générateur projectif ssi $\mathcal{E}$ a un ensemble de générateurs projectifs.*

Démonstration. Si $\{G_i | i \in I\}$ est un ensemble de générateurs projectifs pour $\mathcal{E}$, alors le coproduit $\sum_{i \in I} G_i$ est projectif dans $\mathcal{E}$ (par un théorème standard) et donc dans $\mathcal{E}_{\text{iv}}$; de plus, c’est un générateur pour $\mathcal{E}_{\text{ws}}$ (équivalamment pour $\mathcal{E}_{\text{iv}}$), puisque si l’on a

$$A \rightrightarrows B$$

avec $f \neq g$ et A bien supporté, on peut trouver $h_i : G_i \rightarrow A$ avec $fh_i \neq gh_i$ pour un certain $i \in I$, et alors pour chaque $j \neq i$ on peut trouver un $h_j : G_j \rightarrow A$ par projectivité.

Réciproquement, supposons que G soit projectif et génère $\mathcal{E}_{\text{iv}}$. Alors les sous-objets complémentés de G (forment un ensemble et) génèrent $\mathcal{E}$, car si $f, g : A \rightarrow B$ sont deux morphismes quelconques de $\mathcal{E}$ avec $f \neq g$, alors

$$A + 1 \rightrightarrows B + 1$$

sont des morphismes distincts entre objets bien supportés, et le changement de base de tout $h : G \rightarrow A + 1$ le long de la première coprojection est un sous-objet complémenté de G . De plus, un sous-objet complémenté d’un projectif est projectif, car si $G' \rightarrow G$ est un sous-objet complémenté et si l’on a

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \uparrow & & \\ G' & & \end{array}$$

on peut former un diagramme

$$\begin{array}{ccc} G' & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & B \end{array}$$

où la flèche pointillée avant existe par projectivité de G , et la flèche arrière existe parce que le parallélogramme inférieur est un carré cartésien. $\square$

Avec la discussion qui la précède, le lemme 8.6 établit l’équivalence des conditions (2) et (3) dans le théorème 1.4. Il nous fournit également une abondance d’exemples de topos qui s’effondrent en variétés (et donc de variétés fermées cartésiennes); nous discutons ensuite deux classes de ceux-ci.

Exemple 8.7 : Pour tout topos de préfaisceaux $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$, les foncteurs représentables $\mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ forment un ensemble de générateurs projectifs. Dans ce cas, on peut décrire la théorie algébrique correspondante $\mathbf{T}_{\mathbf{C}}$ explicitement, comme suit : d’abord, on prend une opération hyperaffine p d’arité n (où n est le cardinal de l’ensemble des objets de $\mathbf{C}$), puis pour chaque $x : i \rightarrow j$ dans $\mathbf{C}$, on prend une opération unaire u_x satisfaisant les équations

$$u_x(x) \equiv_{p,k} x \quad \text{pour tout } k \neq i$$

et

$$u_x p(x_1, \dots, x_n) \equiv_{p,i} u_x(x_j)$$

qui disent que, pour une $\mathbf{T}_{\mathbf{C}}$ -algèbre non vide A , u_x définit une fonction du j -ième facteur de la décomposition en produit canonique de A (cf. 4.3) vers le i -ième facteur. Enfin, étant donné un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} i & \xrightarrow{x} & j \\ y \downarrow & & \uparrow \rho \\ & k & \end{array}$$

dans $\mathbf{C}$, on ajoute l'équation $u_x u_\rho(x) \equiv_{p,i} u_y(x)$.

Il est intéressant de remarquer que le topos $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ est à deux valeurs ssi $\mathbf{C}$ est fortement connexe (c'est-à-dire que, étant donnés deux objets quelconques de $\mathbf{C}$, il existe des morphismes dans l'une ou l'autre direction entre eux), et qu'une catégorie satisfaisant cette condition ne doit pas être "Morita-équivalente" à un monoïde. Ainsi, d'après le lemme 5.4, l'exemple 8.7 nous fournit d'autres exemples de topos qui sont eux-mêmes des variétés, en plus de ceux discutés dans [8].

Exemple 8.8 : Soit $\mathcal{E} = \text{Sh}(L)$ le topos des faisceaux sur un local zéro-dimensionnel L . Alors les sous-objets complémentés de 1 forment un ensemble de générateurs pour $\mathcal{E}$; ils sont projectifs ssi L est fortement zéro-dimensionnel, c'est-à-dire que tout recouvrement de 1 dans L possède un raffinement deux à deux disjoint. (En particulier, cette condition est satisfaite si L est compact et zéro-dimensionnel, c'est-à-dire s'il est (le local des ouverts de) l'espace de Stone d'une algèbre de Boole, ou si L est lui-même une algèbre de Boole complète - cf. [7, théorème 5.39] dans ce dernier cas). Les topos obtenus à partir de locaux fortement zéro-dimensionnels sont précisément ceux pour lesquels 1 est un générateur projectif pour $\mathcal{E}_{1v}$; les variétés auxquelles ils s'effondrent sont précisément les théories hyperaffines commutatives discutées dans la section 4. Dans le cas où L est compact (ce qui correspond à une théorie finitaire), la théorie correspondante a à nouveau une description explicite; elle consiste précisément en les opérations hyperaffines dans la théorie des B -modules, où B est l'anneau booléen correspondant à L par la dualité de Stone. (Ces théories ont récemment été étudiées en détail par G. M. Bergman [2]).

9 Théories à plusieurs sortes

Dans cette dernière section, notre objectif est d'achever la preuve du théorème 1.4. Avant de le faire, cependant, on note qu'il est nécessaire de prendre quelques précautions dans la définition de la notion de pseudo-constante et de la propriété de non-dégénérescence, dans le cas à plusieurs sortes. Dans ce contexte, une pseudo-constante doit être considérée comme toute opération d'arité positive qui ne dépend d'aucune de ses variables; bien sûr, dans le cas à une seule sorte, une telle opération peut être réduite à une opération unaire en égalant toutes ses variables, mais on ne peut pas faire cela ici puisque les variables peuvent être de sortes différentes. On dit que la i -ième sorte d'une théorie $\mathbf{T}$ à n sortes est *dégénérée* si l'opération unaire identité de sorte i est une pseudo-constante; et on dit que $\mathbf{T}$ est *non dégénérée* si aucune de ses n sortes n'est dégénérée. (Ceci est équivalent à dire qu'il existe une $\mathbf{T}$ -algèbre ayant au moins deux éléments de chaque sorte, et aussi à dire que le foncteur libre $\mathbf{Set}^n \rightarrow \mathbf{T}\text{-Alg}$ est fidèle - les preuves sont essentiellement les mêmes que dans

le cas à une seule sorte). Clairement, il existe une notion plus faible de non-dégénérescence, dans laquelle on exige seulement que $\mathbf{T}$ ait au moins une sorte non dégénérée ; mais si l'on autorise cela, il est facile de construire des exemples de variétés à plusieurs sortes qui sont localement fermées cartésiennes (en fait, des quasitopos) mais pas des topos.

La clé pour réduire les problèmes à plusieurs sortes à ceux à une seule sorte est un résultat de M. Barr [1, théorème 5], que l'on peut paraphraser comme suit :

Proposition 9.1 (9.1). *Soit $\mathbf{T}$ une théorie algébrique à n sortes n'ayant pas de constantes d'aucune sorte (équivalamment, telle que la $\mathbf{T}$ -algèbre initiale a toutes ses sortes vides). Alors l'effondrement à deux valeurs de $\mathbf{T}\text{-Alg}$ est une variété à une seule sorte.*

(L'exemple 8.7 est bien sûr un cas particulier de ce résultat, tout comme la proposition 4.3).

Lemme 9.2. *Soit $\mathbf{T}$ une théorie à n sortes telle que $\mathbf{T}\text{-Alg}$ soit fermée cartésienne. Si $\mathbf{T}$ a une opération pseudo-constante de sorte i , alors la i -ième sorte de $\mathbf{T}$ est dégénérée.*

Démonstration. L'argument est similaire à celui utilisé pour prouver le lemme 3.2. Supposons que u soit une pseudo-constante de sorte i , impliquant des variables de sortes $j_1, j_2, \dots, j_m$. On considère le produit d'algèbres libres

$$F(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}, y_{j_1}, \dots, y_{j_m}) \times F(x_i)$$

(où la sorte de chaque générateur libre est indiquée par son indice) comme le coproduit de

$$F(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}) \times F(x_i)$$

et $F(y_{j_1}, \dots, y_{j_m}) \times F(x_i)$. On peut définir un homomorphisme

$$h : F(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}, y_{j_1}, \dots, y_{j_m}) \times F(x_i) \rightarrow F(y_i, z_i)$$

tel que $h(p, q(x_i)) = q(y_i)$ si p ne dépend que des x_{j_k} , et $h(p, q(x_i)) = q(z_i)$ si p ne dépend que des y_{j_k} . En prenant $p = u$ et q l'opération identité de sorte i , on obtient $y_i = z_i$; donc la i -ième sorte de $\mathbf{T}$ est dégénérée. $\square$

Ainsi, si $\mathbf{T}$ est une théorie non dégénérée à plusieurs sortes telle que $\mathbf{T}\text{-Alg}$ soit fermée cartésienne, elle n'a pas de pseudo-constantes (et a fortiori pas de constantes) d'aucune sorte ; donc, en particulier, la proposition 9.1 lui est applicable. Mais $(\mathbf{T}\text{-Alg})_{\text{iv}}$ est fermée cartésienne par le corollaire 5.2, et donc d'après le théorème 1.2 elle coïncide avec l'effondrement à deux valeurs d'un topos. De plus, l'absence de pseudo-constantes implique (tout comme dans le cas à une seule sorte) que les coproduits dans $\mathbf{T}\text{-Alg}$ sont disjoints ; donc, d'après la proposition 5.5, on peut immédiatement conclure

Proposition 9.3 (9.3). *Soit $\mathbf{T}$ une théorie non dégénérée à plusieurs sortes. Si $\mathbf{T}\text{-Alg}$ est localement fermée cartésienne, alors c'est un topos.*

L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) du théorème 1.4 découle immédiatement des propositions 9.3 et 9.1. Il reste à établir l'implication (3) $\Rightarrow$ (1) ; mais celle-ci découle facilement de la version à plusieurs sortes du théorème de Linton (cf. [4, ?]), car si $\{G_i | 1 \leq i \leq n\}$ est un ensemble de générateurs projectifs pour un topos de Grothendieck $\mathcal{E}$, alors le foncteur $\mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}^n$ dont la i -ième coordonnée est $\text{hom}(G_i, -)$ satisfait les hypothèses de ce théorème. (On peut s'assurer que la théorie à n sortes résultante a

toutes ses sortes non dégénérées, simplement en supprimant 0 s'il arrive qu'il apparaisse comme un membre de notre ensemble de générateurs).

Comme remarque finale, il convient de souligner que les méthodes de [8], contrairement à (la plupart de) celles utilisées dans le présent article, ne dépendaient pas fortement du caractère à une seule sorte de $\mathbf{T}$, sauf à un endroit (dans la preuve du lemme 3.5) où il était nécessaire de réduire une opération arbitraire à une opération unaire en égalant toutes ses variables. Je n'ai jamais pu trouver un substitut à plusieurs sortes pour le lemme 3.5 de [8] ; et ainsi il est particulièrement gratifiant que les méthodes tout à fait différentes du présent article fournissent une version à plusieurs sortes du théorème 1.1 dans la proposition 9.3 ci-dessus. (Bien sûr, nous n'avons pas obtenu dans cet article de conditions syntaxiques pour qu'une variété à plusieurs sortes soit fermée cartésienne ou un topos ; il devrait en théorie être possible de les extraire via 9.1, en utilisant une description explicite de la syntaxe de $(\mathbf{T}\text{-Alg})_{iv}$ similaire à celle que nous avons donnée pour les théories unaires à plusieurs sortes (= théories des préfaisceaux) dans l'exemple 8.7, mais il est douteux que l'effort nécessaire en vaille la peine).

Références

- [1] M. Barr, The point of the empty set, *Cahiers Topologie Géom. Différentielle* **13** (1972), 357-368.
- [2] G. M. Bergman, Actions of Boolean rings on sets, preprint, 1988.
- [3] A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol. 1, Math. Surveys, No. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1961.
- [4] J. W. Duskin, Variations on Beck's tripleability criterion, in *Rep. Midwest Category Seminar III*, pp. 74-129, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 106, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1969.
- [5] P. J. Freyd, Choice and well-ordering, *Ann. Pure Appl. Logic* **35** (1987), 149-166.
- [6] D. Higgs, Some examples of cartesian closed categories, unpublished typescript, 1974.
- [7] P. T. Johnstone, *Topos Theory*, London Math. Soc. Monographs, No. 10, Academic Press, London, 1977.
- [8] P. T. Johnstone, When is a variety a topos? *Algebra Universalis* **21** (1985), 198-212.
- [9] B. Jónsson, Algebras whose congruence lattices are distributive, *Math. Scand.* **21** (1967), 110-121.
- [10] A. Kock, Bilinearity and cartesian closed monads, *Math. Scand.* **29** (1971), 161-174.
- [11] F. W. Lawvere, Some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories, in *Rep. Midwest Category Seminar II*, pp. 41-61, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 61, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1968.
- [12] F. E. J. Linton, Autonomous equational categories, *J. Math. Mech.* **15** (1966), 637-642.
- [13] F. E. J. Linton, Some aspects of equational categories, in *Proceedings, La Jolla Conference on Categorical Algebra*, pp. 84-94, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1966.
- [14] F. E. J. Linton, Coequalizers in categories of algebras, in *Seminar on Triples and Categorical Homology Theory*, pp. 75-90, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 80, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1969.