

Karen Vogtmann

Karen Vogtmann est une mathématicienne qui travaille principalement en théorie géométrique des groupes. Elle est connue pour l'introduction de l'espace extérieur de Culler-Vogtmann, souvent abrégé simplement en espace extérieur. L'idée que la théorie des groupes peut être appliquée à la géométrie est assez bien ancrée à ce stade, à la fois en géométrie et en physique mathématique. Cela a commencé avec le programme d'Erlangen de Klein au XIXe siècle, qui prévoyait d'utiliser des méthodes de la théorie des groupes pour étudier la géométrie. Comme exemple, les symétries de la géométrie sphérique en une dimension forment un groupe $O(2)$ formé de matrices de rotation et de réflexion :

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Est-il possible de faire l'inverse et d'appliquer des méthodes géométriques étudier des objets et démontrer en théorie des groupes ? Oui, et c'est ce qu'on appelle la théorie géométrique des groupes. Gromov est généralement crédité de l'introduction de la théorie géométrique des groupes en tant que domaine distinct, bien qu'il existe de nombreux exemples isolés au XXe siècle et même au XIXe siècle où des mathématiciens ont utilisé des méthodes qui pourraient être qualifiées de "méthodes géométriques de groupes" : par exemple, lorsque Dehn a appliqué la géométrie hyperbolique "à l'envers" pour résoudre le problème du mot pour un groupe de surface¹.

L'outil de base avec lequel on commence est un graphe de Cayley. C'est un graphe dans tous les sens du terme (un objet géométrique), mais il encode également des informations sur un groupe de type fini et nous permet donc de visualiser un groupe de type fini comme un objet géométrique. Un groupe G est de type fini s'il a un ensemble générateur fini A qui est un sous-ensemble fini inclus dans G et si $G = \langle A \rangle$, où $\langle A \rangle$ est l'intersection de tous les sous-groupes de G qui contiennent A . Il est possible de voir un graphe Γ comme un espace métrique, dans la mesure où le graphe est un ensemble de sommets V reliés par un ensemble d'arêtes E et sur lequel on peut définir une distance. La distance est définie en réalisant K comme un 1-complexe, en voyant chaque arête du graphe comme un intervalle dont les extrémités sont des sommets. Vous pouvez penser à un complexe cellulaire comme à un espace qui est construit en commençant par un ensemble de points (les sommets, dans ce cas) puis en attachant des cellules de dimension croissante, où chaque cellule est un espace homéomorphe à une boule dans l'espace euclidien. Dans le cas étudié ici, nous nous arrêterons à des cellules de dimension 1, car nous ne ferons qu'ajouter des arêtes aux sommets et rien de plus².

Le 1-complexe peut maintenant être vu comme un ensemble, sur lequel on définit la distance en étiquetant chaque arête et en définissant ainsi une longueur pour toute arête. Cela signifie qu'un chemin (c'est-à-dire une séquence combinatoire d'arêtes ou de sommets) a une longueur l finie et non négative bien définie. Étant donnés deux points sur le graphe, nous pouvons définir la distance entre eux comme la plus petite longueur de tout chemin qui les relie. L'ensemble des longueurs de tous ces chemins est un ensemble discret, donc ce minimum doit être atteint en un certain point. Le 1-complexe muni de la métrique que nous avons définie forme un espace métrique, ce qui induit une

Traduction d'un extrait des pages 169 à 178 de l'article arXiv <https://arxiv.org/pdf/1910.01730>.

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla.

1. Brian Bowditch, A Course on Geometric Group Theory, Mathematical Society of Japan, 2006.
2. John M. Lee, Introduction to Topological Manifolds, Springer, 2011.

topologie sur l'ensemble, si l'on suppose que le graphe est localement fini. Cependant, on peut aussi associer un graphe à un groupe. Commençons par un groupe G et un sous-ensemble de ce groupe S : nous cherchons à construire un graphe $\Delta(G; S)$. Soit l'ensemble des sommets de ce graphe $V(\Delta)$ égal à G . Pour tout g dans le groupe et tout a dans le sous-ensemble, il y a une arête orientée de g vers la composition d'éléments ga qui peut être étiquetée par a (ou a^{-1} selon la direction opposée). Le groupe G agit sur l'ensemble des sommets par multiplication à gauche, ce qui s'étend à une action libre sur le graphe Δ . Il est également possible de partir d'un élément du groupe et d'obtenir un chemin de g vers la composition $gp(w)$, où p envoie un mot de l'ensemble des mots dans A vers le groupe G . Un mot est simplement une suite finie d'éléments de A (on peut penser pour faire une analogie à la façon dont on peut construire n'importe quel mot d'une langue en construisant une séquence de lettres de l'alphabet que cette langue utilise).

Ce chemin est l'image d'un chemin de 1 à $p(w)$ sur lequel agit l'élément g dans l'action de groupe que nous avons déjà spécifiée. Puisque (S) est l'ensemble des éléments qui peuvent être exprimés comme un mot dans l'alphabet A , il s'ensuit en considérant la construction ci-dessus que le groupe G est égal à (S) si et seulement si le graphe $\Delta(G; S)$ est connexe. Cela signifie qu'un groupe de type fini agit librement sur un graphe fini localement connexe. En particulier, si S est un ensemble générateur pour G , alors Δ est appelé le graphe de Cayley du groupe par rapport à cet ensemble générateur. Comme exemple simple, les entiers $\mathbb{Z}$ peuvent être engendrés par un seul générateur tel que $\mathbb{Z} = \langle a \rangle$. Dans ce cas, le graphe de Cayley est simplement la droite des nombres réels. $\mathbb{Z}$ agit librement sur le graphe de Cayley par translation. Le graphe quotient pour l'action du groupe sur l'ensemble des sommets consiste toujours en un seul sommet et un nombre de boucles égal au nombre de générateurs dans l'ensemble générateur, donc dans ce cas le graphe quotient est un sommet et une boucle, c'est-à-dire un cercle³.

Le groupe principal que nous souhaitons modéliser et étudier est le groupe libre à n générateurs et sans relations :

$$F_n = \langle a_1, \dots, a_n \rangle.$$

Nous considérons ensuite le groupe des automorphismes du groupe libre $\text{Aut}(F_n)$, où un automorphisme de groupe est simplement un isomorphisme qui envoie un groupe "sur lui-même". En algèbre linéaire, la transformation linéaire correspondante est un endomorphisme ou "auto-application linéaire" d'un espace vectoriel vers lui-même. Dans le cas des automorphismes, la transformation doit être inversible, mais cela est clair du fait que le groupe d'automorphismes doit avoir un inverse pour être défini comme un groupe. Un exemple d'automorphisme du groupe libre pourrait être l'inversion, où a_i est envoyé vers a_i^{-1} et a_j est laissé intact, avec $a_i \neq a_j$. Un autre exemple pourrait être l'application qui multiplie le i -ième générateur par le j -ième générateur à droite ou à gauche et laisse les autres éléments du groupe intacts : c'est un isomorphisme, car on peut écrire l'inverse. (Nous pouvons multiplier à gauche ou à droite car nous sommes dans un groupe libre). Les automorphismes du groupe libre peuvent être divisés en automorphismes intérieurs et extérieurs. Les automorphismes intérieurs du groupe libre $\text{Int}(F_n)$ forment un sous-groupe normal du groupe d'automorphismes, où un automorphisme intérieur est un automorphisme de groupe donné par la conjugaison du groupe par l'un de ses éléments. Plus important encore, nous pouvons également former le groupe des automorphismes extérieurs en prenant le quotient du groupe d'automorphismes

3. Brian Bowditch, A Course on Geometric Group Theory, Mathematical Society of Japan, 2006.

par le groupe des automorphismes intérieurs.

$$\text{Ext}(F_n) = \frac{\text{Aut}(F_n)}{\text{Int}(F_n)}.$$

Les groupes forment ce qu'on appelle une suite exacte courte.

$$1 \rightarrow \text{Int}(F_n) \rightarrow \text{Aut}(F_n) \rightarrow \text{Ext}(F_n) \rightarrow 1.$$

Le groupe des automorphismes intérieurs du groupe libre est isomorphe au groupe libre lui-même. Il est également nécessaire d'étudier le groupe obtenu en combinant des éléments du groupe libre et de son groupe d'automorphismes. Pour tout k , on obtient un groupe $A_{n,k+1}$

$$A_{n,k+1} = \{((w_1, \dots, w_k), g) \text{ tel que } w_i \in F_n, g \in \text{Aut}(F_n)\}.$$

Cela permet de former une autre suite exacte courte :

$$1 \rightarrow F_n \rightarrow A_{n,2} \rightarrow \text{Aut}(F_n) \rightarrow 1.$$

L'objectif en général est d'essayer d'en apprendre davantage sur $\text{Aut}(F_n)$ et $\text{Ext}(F_n)$.

D'une manière générale, on en sait moins sur les groupes d'automorphismes que sur d'autres groupes, et on peut apprendre beaucoup sur un objet mathématique en étudiant ses automorphismes, quels qu'ils soient. Les groupes d'automorphismes sont généralement compliqués et peuvent être étudiés à plusieurs niveaux. Par exemple, étudier le groupe d'automorphismes G d'une surface de Riemann X de genre g nécessite des informations sur le caractère χ de l'action de G sur l'espace des différentielles abéliennes holomorphes sur X , la signature du groupe fuchsien Γ de la surface, et un épimorphisme de noyau de surface $\Phi : \Gamma \rightarrow G$. Rappelons qu'une surface de Riemann est simplement une 2-variété topologique connexe munie d'une structure lisse telle que les applications de transition pertinentes entre les cartes sont des homéomorphismes holomorphes conformes. Les différents types d'informations sont liés : par exemple, les nombres $|\text{Fix}_{X,u}(h)|$ déterminent le caractère de la surface de Riemann par la formule de trace d'Eichler. Sous certaines hypothèses modérées sur les groupes pertinents et en prenant une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$, où h dans G^X est d'ordre m , ces nombres sont définis comme

$$|\text{Fix}_{X,u}(h)| = |C_G(h)| \sum_{\substack{1 \leq i \leq r, \\ m \mid m_i \\ h \sim \Phi(c_i)m_i^{u/m}}} \frac{1}{m_i}.$$

La formule de trace d'Eichler dit alors que si σ est un automorphisme d'ordre supérieur à 1 d'une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$ et χ le caractère de l'action du groupe d'automorphismes $\text{Aut}(X)$ sur l'espace des différentielles holomorphes sur X , alors la formule suivante est vérifiée⁴ :

$$\chi(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{m \mid \text{ordre}(\sigma)} \sum_{u=1}^{m-1} |\text{Fix}_{X,u}(\sigma^u)| \left(\frac{1}{m} - \frac{u}{m^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \sum_{u=1}^{m-1} |\text{Fix}_{X,u}(\sigma^u)|.$$

4. Thomas Breuer, Characters and Automorphism Groups of Compact Riemann Surfaces (Cambridge University Press, 2000).

Un modèle géométrique important pour $\text{Ext}(F_n)$ introduit par Culler et Karen Vogtmann est connu sous le nom d'espace extérieur⁵. Le développement de l'espace extérieur a été inspiré en partie par les espaces de Teichmüller qui apparaissent dans la théorie des surfaces. Ils ont également des applications en physique théorique, apparaissant dans la diffusion des théories des cordes et dans certaines théories des champs superconformes, où ils sont associés à des espaces de déformations marginales exactes. En termes plus techniques, il est analogue à l'espace de Teichmüller associé au groupe des classes de cartographie d'une surface. Le groupe des classes de cartographie d'une surface topologique F est le groupe quotient

$$\frac{\text{Ext}_t^+(\pi_1(F))}{\text{Int}(\pi_1(F))},$$

où $\pi_1(F)$ est le groupe fondamental pour la surface. Le sous-groupe qui fixe les classes de conjugaison paraboliques du groupe et qui fixe les points isolés dans la surface est connu sous le nom de groupe des classes de cartographie pure. Un espace de modules de surfaces de Riemann peut être formé en quotientant l'espace de Teichmüller par le groupe des classes de cartographie pure associé

$$\mathcal{M}_{g,n} = \frac{\mathcal{T}_{g,n}}{PMCG'}$$

où g est le genre de la surface et n est le nombre de points isolés. Un sous-ensemble important de cet espace de modules est l'ensemble des surfaces de Riemann telles que la longueur de la plus courte géodésique fermée est au moins égale à un certain nombre positif ϵ : ce sous-ensemble est noté $\mathcal{M}_{g,n}(\epsilon)$ ⁶. Le théorème de compacité de Mumford stipule que l'espace des surfaces de Riemann $\mathcal{M}_{g,n}(\epsilon)$ telles que la longueur des géodésiques fermées sur de telles surfaces est au moins égale à ϵ est compact. De plus, une suite de représentations avec des longueurs minimales de géodésiques fermées bornées inférieurement a une sous-suite convergente de translatés de groupe de classe d'application pure (PMCG)⁷. De la compacité de Mumford et de la décomposition épaisse-mince, il s'ensuit qu'étudier la compactification de l'espace de modules $\mathcal{M}_{g,n}$ est équivalent à étudier la façon dont les longueurs des géodésiques tendent vers zéro.

Le groupe des classes de cartographie agit proprement discontinûment sur $\mathcal{T}_{g,n}$, et par analogie, l'espace extérieur est un espace contractible sur lequel le groupe des automorphismes extérieurs du groupe libre $\text{Ext}(F_n)$ agit proprement discontinûment. Une action d'un groupe Γ sur un espace de longueur propre X est dite proprement discontinue si pour tout $r \geq 0$ et tout $x \in X$, l'ensemble des éléments de groupe g tels que $d(x, gx) \leq r$ est fini. La définition peut également être énoncée sans métrique en disant que l'ensemble des éléments de groupe g tels que $gK \cap K \neq \emptyset$ est fini pour tout compact K (puisque un ensemble compact ne peut rencontrer qu'un nombre fini de ses sous-ensembles). Comme mentionné précédemment, la métrique naturelle sur un graphe fini est une assignation de longueurs aux arêtes. Un marquage d'un graphe est une équivalence d'homotopie f qui envoie l'étoile R_n (le graphe avec 1 sommet et n arêtes) vers le graphe en question. Cela

5. Marc Culler and Karen Vogtmann, *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*, Invent. Math. 86, no. 1, 91–119 (1987).

6. Scott Wolpert, *Families of Riemann Surfaces and Weil-Petersson Geometry* (American Mathematical Society, 2009).

7. David Mumford, *A remark on Mahler's compactness theorem*, Proceedings of the American Mathematical Society. 28, 289–294 (1971).

permet une identification entre le groupe fondamental du graphe $\pi_1(\Gamma)$ et le groupe libre F_n , et deux marquages f et f' sont équivalents s'il existe un homéomorphisme ϕ envoyant Γ vers Γ' tel que ϕf soit homotope à f' . (On peut considérer que deux fonctions appartiennent à une même classe d'homotopie si on peut prendre l'une de ces fonctions et la déformer continûment pour obtenir l'autre fonction). Considérons deux triplets (Γ, l, f) et (Γ', l', f') tels que la valence de chaque sommet des graphes soit au moins 3 et l soit une métrique de volume unité. Une isométrie ϕ de Γ vers Γ' telle que ϕf soit homotope à f' est une équivalence. Cela permet une définition alternative de l'espace extérieur

$$X_n = \frac{\{(\Gamma, l, f)\}}{\sim}$$

comme l'ensemble des classes d'équivalence de graphes métriques marqués finis avec des sommets de valence au moins 3 et de volume unité. Il est plus courant de laisser de côté la notation de classe d'équivalence et de penser simplement à l'espace extérieur comme à un espace de graphes métriques marqués⁸. La définition la plus succincte est probablement de définir l'espace extérieur comme l'espace des actions minimales libres du groupe libre par isométries d'arbres simpliciaux métriques.

L'espace extérieur X_n a sa propre géométrie et sa propre topologie et X_n se décompose en simplexes ouverts. Si Γ est un graphe et f est un marquage, l'ensemble des métriques possibles sur Γ est un simplexe ouvert :

$$\left\{ (l_1, \dots, l_E) : l_i > 0, \sum_l l_i = 1 \right\}.$$

La dimension du simplexe est un de moins que le nombre d'arêtes E . Si T est une forêt (une union disjointe d'arbres) dans le graphe et qu'un autre graphe Γ' est obtenu en identifiant toutes les arêtes de T avec des points, alors l'ensemble des métriques sur Γ' peut être identifié avec la face ouverte de l'ensemble des métriques sur Γ pour laquelle les coordonnées des arêtes dans T sont 0. Cela peut être énoncé de manière équivalente en disant que l'on a contracté une forêt pour obtenir Γ' à partir du graphe Γ , ou que l'on a éclaté une forêt pour obtenir Γ à partir du graphe Γ' . L'union de l'ensemble des métriques avec toutes ces faces ouvertes lorsque T parcourt toutes les forêts possibles dans Γ est un simplexe avec des faces manquantes qui peuvent être obtenues à partir du simplexe fermé correspondant en supprimant les faces ouvertes appropriées : cette union est notée $\Sigma(n)$, et sa plus petite dimension possible est toujours $n - 1$.

En termes topologiques, X_n est un complexe simplicial de simplexes avec des faces manquantes et une topologie simpliciale peut être définie sur l'espace analogue à celle de tout autre complexe simplicial. Si l'on restaure les faces manquantes, on obtient un complexe simplicial isomorphe à un complexe de sphères. Sans entrer dans trop de détails, un complexe de sphères $S_{n,k}$ est un complexe simplicial dont les sommets sont des classes d'isotopie de sphères et les k -simplexes sont des collections compatibles de $k+1$ classes d'isotopie $[\Delta_0], \dots, [\Delta_k]$. Une collection compatible a des classes d'isotopie distinctes et un système de sphères a des classes d'isotopie $[s_0], \dots, [s_k]$. L'espace extérieur est un sous-espace d'un complexe de sphères $S(M_{n,s})$ consistant en des simplexes ouverts

8. Mladen Bestvina, *Geometry of Outer space*, in Geometric Group Theory, ed. by Mladen Bestvina, Michah Sageev and Karen Vogtmann. (American Mathematical Society, 2014).

$\sigma(s_0, \dots, s_k)$, où les s_i forment un système de sphères complet et $M_{n,s}$ est défini comme

$$M_{n,s} = \#S^1 \times S^1 \setminus \bigsqcup_s B^3.$$

Un autre fait de base sur l'espace extérieur est qu'il est contractible. On peut le prouver en utilisant des systèmes de sphères. L'idée de la preuve est de fixer un système de sphères maximal puis de construire des chemins d'un point arbitraire vers un simplexe Σ dans le complexe de sphères et ainsi contracter χ_n le long de ces chemins⁹. Pendant la preuve, on peut utiliser le théorème de forme normale de Hatcher. Celui-ci stipule qu'un système de sphères S est isotope à un système qui intersecte Σ transversalement en cercles et que dans chaque pièce p de $M_{n,s}$ (techniquement une sphère à 3 points isolés), cette intersection est toujours une union de disques, de cylindres et de paires de pantalons tels que différentes composantes de bord sont reliées par des cylindres ou qu'il y a une pièce de bord de chacune des 3-sphères. Ceci peut à son tour être prouvé en utilisant l'astuce de l'ampoule de Laudenbach : des sphères plongées homotopes sont isotopes¹⁰.

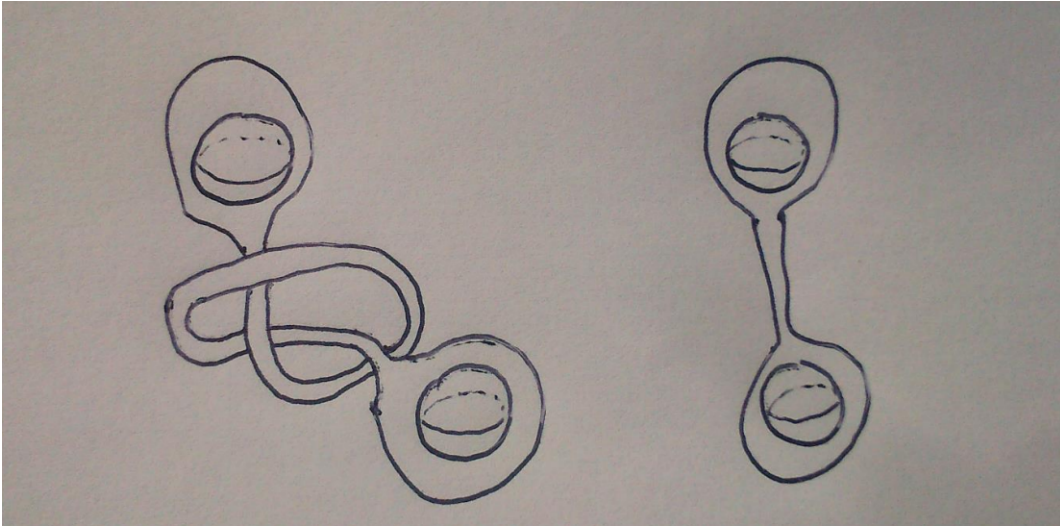


FIGURE 4 : Démonstration visuelle de l'astuce de l'ampoule de Laudenbach.

Enfin, nous mentionnerons qu'il y a une action naturelle à droite de $\text{Ext}(F_n)$ sur χ_n qui est obtenue par précomposition du marquage. Un élément Φ de $\text{Ext}(F_n)$ peut être considéré comme une équivalence d'homotopie de l'étoile n vers l'étoile n . En termes des classes d'équivalence que nous avons définies précédemment, l'action est alors

$$[(\Gamma, l, f)] \cdot \Phi = [(\Gamma, l, f\Phi)].$$

Cette action est propre et elle agit proprement et cocompactement (c'est-à-dire que le quotient par l'action est compact) sur la partie épaisse et sur l'épine $K_{n,s}$, où l'épine est un rétracte par déformation spécifique de l'espace extérieur. En fait, $K_{n,s}$ est un complexe cubique contractible dont les sommets sont des systèmes de sphères complets dans $M_{n,s}$ ¹¹.

9. Karen Vogtmann, *Automorphisms of free groups and outer space*, Proceedings of the Conference on Geometric and Combinatorial Group Theory, Part I (Haifa, 2000). Vol. 94, pp. 1–31 (2002).

10. Allen Hatcher, *Algebraic Topology* (Cambridge : Cambridge University Press, 2009).

11. Mladen Bestvina, *Geometry of Outer space*, in Geometric Group Theory, ed. by Mladen Bestvina, Michah Sageev and Karen Vogtmann. (American Mathematical Society, 2014).

Nous avons mentionné les groupes de surface et les groupes libres. Une autre classe importante de groupes sont les groupes d’Artin à angles droits. Comme pour les groupes de surface et de nombreux autres groupes, les groupes d’Artin à angles droits ont des présentations finies. Le fait qu’un groupe libre ait une présentation finie dépend du fait que le groupe soit ou non de type fini. Si Γ est un graphe fini avec un ensemble de sommets V et un ensemble d’arêtes E consistant en des arêtes $\{[x_i, x_j]\}$, le groupe d’Artin à angles droits est défini par la présentation finie suivante

$$A_\Gamma \langle V : [x_i, x_j], \text{ quand } [x_i, x_j] \in E \rangle.$$

Le premier ensemble de crochets dans la présentation est destiné à indiquer que toutes les relations sont des relations de commutation, tandis que le second ensemble de crochets dénote une arête entre deux sommets. Comme exemple, si le graphe Γ ne contient pas d’arêtes, alors le groupe d’Artin à angles droits est le groupe libre à n générateurs¹². Les automorphismes extérieurs des groupes d’Artin à angles droits ont également été étudiés, et il a été montré que pour un graphe Γ connexe et sans triangle, $\text{Ext}(A_\Gamma)$ peut être défini en termes de sous-graphes de jointure maximaux dans Γ . En fait, il est également possible de former l’analogue correspondant d’un espace extérieur pour $\text{Ext}(A_\Gamma)$ et de montrer que $\text{Ext}(A_\Gamma)$ agit proprement sur cet espace extérieur et que l’espace extérieur est contractible avec une épine. En utilisant le fait que l’alternative de Tits est connue pour les groupes d’automorphismes extérieurs des groupes libres, on peut également montrer qu’elle est vérifiée pour $\text{Ext}(A_\Gamma)$ ¹³. L’alternative de Tits stipule que pour un groupe linéaire de type fini sur un corps, soit le groupe contient un sous-groupe résoluble d’indice fini, soit il contient un groupe libre non abélien (nommé ainsi dans un article russe de Roman’kov)¹⁴.

Dans un cadre plus général, Karen Vogtmann et d’autres mathématiciens ont construit un espace géométrique d’arbres qui modélise l’ensemble de tous les arbres phylogénétiques. Ces arbres sont des diagrammes familiaux de la biologie évolutive qui détaillent les relations entre les espèces : les arbres ont généralement un sommet distingué appelé la racine qui indique le descendant commun de toutes les espèces à partir duquel le diagramme se développe¹⁵. Les diagrammes auront également un nombre n de nœuds “finaux” de degré 1 qui sont appelés feuilles dans la terminologie formelle de l’espace des arbres. Chaque espace d’arbres ne contiendra que des arbres avec le même nombre de feuilles. L’espace a une métrique de courbure non positive, donnant une façon formelle de mesurer les distances entre différents arbres phylogénétiques ou de trouver des arbres qui sont à une distance fixe d’autres arbres. Ce modèle permet également une justification rigoureuse de la pratique consistant à éliminer les sections d’un ensemble d’arbres qui concordent entre elles lors de la comparaison¹⁶.

12. Cornelia Drutu and Michael Kapovich, *Geometric Group Theory* (American Mathematical Society, 2018).

13. Ruth Charney, John Crisp and Karen Vogtmann, *Automorphisms of 2-dimensional right-angled Artin groups*, *Geometry and Topology*. 11 2227–2264 (2007).

14. Vitaly Roman’kov, *Embedding some interlacings in groups of automorphisms of finitely generated solvable groups*, *Algebra and Logic*. Vol. 15, Issue 3, 187–192 (1976).

15. Richard Dawkins and Yan Wong, *The Ancestor’s Tale : A Pilgrimage to the Dawn of Life* (London : WN, 2017).

16. Louis Billera, Susan Holmes and Karen Vogtmann, *Geometry of the space of phylogenetic trees*, *Advances in Applied Mathematics* 27, 733–767 (2001).