

Karen Uhlenbeck

Karen Uhlenbeck est connue pour ses travaux fondamentaux en géométrie différentielle, en théorie de jauge et en théorie des EDP. En particulier, elle a contribué à la fondation de l'analyse géométrique moderne (un domaine où l'on étudie des problèmes ou des propriétés d'objets en géométrie différentielle en utilisant des outils et des idées de la théorie des équations différentielles). Karen Uhlenbeck est l'une des mathématiciennes vivantes les plus célèbres et elle est récemment devenue la première femme à remporter le prestigieux prix Abel. Outre ses réalisations académiques, elle a également œuvré pour élargir la participation des minorités et des femmes aux mathématiques et a cofondé le programme *Women and Mathematics* à l'Institute for Advanced Study.

L'origine physique d'une théorie de jauge est qu'il s'agit d'une théorie dont le lagrangien est invariant par un groupe de Lie particulier de transformations de jauge locales, appelé groupe de jauge. (Il faut penser au mot "jauge" comme impliquant un changement d'échelle ou de "localité"). L'exemple le plus simple possible d'une théorie de jauge est l'électrodynamique classique, où le lagrangien est invariant sous les transformations locales $U(1)$. $U(1)$ est un groupe de Lie appelé groupe du cercle, l'exemple le plus élémentaire d'un groupe unitaire de degré n . Une théorie de jauge nécessite un champ de jauge, qui est le quadri-potential électromagnétique dans le cas de l'électromagnétisme. Les choses deviennent intrinsèquement géométriques à ce stade, puisque le champ de jauge est une connexion. On a également une définition pour la courbure qui est construite à partir de la connexion. Afin de pouvoir discuter de l'électrodynamique en tant que théorie de jauge, nous devons exprimer les objets habituels de l'électromagnétisme comme des formes différentielles sur un espace-temps (l'espace de Minkowski dans notre cas). Les champs électromagnétiques généraux peuvent être combinés en deux 2-formes F et G .

En notation indépendante des coordonnées, les équations de Maxwell peuvent s'écrire :

$$dF = 0, \quad dG = j,$$

où j est la 3-forme de densité de courant. Nous allons écrire un des calculs en détail pour une fois. Commençons par les deux premières équations de Maxwell :

$$\text{curl } E + \partial_t B = 0, \quad \text{div } B = 0.$$

Celles-ci peuvent s'écrire en notation indicelle :

$$\epsilon^{ijk} \partial_i E_j + \partial_0 B^k = 0, \quad \partial_j B^j = 0.$$

Nous utilisons la définition de la 2-forme F .

$$\begin{aligned} dF &= d \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B^i dx^j \wedge dx^k - E_i dx^0 \wedge dx^i \right), \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_\mu B^i dx^\mu \wedge dx^j \wedge dx^k - \partial_\mu E_i dx^\mu \wedge dx^0 \wedge dx^i, \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_0 B^i dx^0 \wedge dx^j \wedge dx^k + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_i B^i dx^1 \wedge dx^j \wedge dx^k - \partial_j E_i dx^j \wedge dx^0 \wedge dx^i, \\ &= \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_0 B^i - \partial_k E_j \right) B^i dx^0 \wedge dx^j \wedge dx^k + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_i B^i dx^1 \wedge dx^j \wedge dx^k = 0. \end{aligned}$$

Traduction des pages 169 à 178 de l'article arXiv <https://arxiv.org/pdf/1910.01730>.

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla.

Chacun de ces termes doit être égal à 0 pour que le membre de droite soit nul, ce qui implique que

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\partial_0 B^i - \partial_k E_j = 0,$$

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\partial_i B^j = 0.$$

En contractant avec le symbole de permutation de Levi-Civita :

$$\frac{1}{2}\epsilon^{jkl}\epsilon_{ijk}\partial_0 B^i - \epsilon^{jkl}\partial_k E_j = 0,$$

$$\frac{1}{2}\epsilon^{jkl}\epsilon_{iljk}\partial_i B^i = 0.$$

Ceci devient

$$\delta_i^l \partial_0 B^i - \epsilon^{jkl} \partial_k E_j = 0,$$

$$\delta_i^l \partial_i B^i = 0,$$

ce qui donne

$$\epsilon^{jkl} \partial_j E_k + \partial_0 B^l = 0,$$

$$\partial_i B^i = 0.$$

Ce sont les deux premières équations de Maxwell. En fait, on sait immédiatement que la première équation est vraie, puisque F est une forme fermée et que la dérivée extérieure d'une forme fermée est nulle : cependant, montrer que l'on peut retrouver les équations de Maxwell originales demande quelques calculs. La seconde équation est laissée en exercice (un peu plus difficile, car il faudra développer la 3-forme j en composantes pour faire correspondre le second ensemble d'équations de Maxwell).

Étant donné que l'électromagnétisme est décrit avec succès par un groupe de jauge abélien, la question se pose de savoir s'il serait possible de décrire d'autres interactions dans la Nature en utilisant des théories de jauge non abéliennes. Cela s'avère être le cas, et une telle théorie est connue sous le nom de théorie de Yang-Mills. Dans le cas de Yang-Mills, le groupe de jauge doit être compact et la définition de la courbure est modifiée en ajoutant un terme supplémentaire :

$$F = dA + \Lambda \wedge A.$$

Les équations de Maxwell deviennent les équations de Yang-Mills classiques, qui peuvent être dérivées en faisant varier une action de Yang-Mills du type

$$\frac{1}{g^2} \int \text{tr}(F \wedge *F) + \int (D\Phi)^+ \wedge *D\Phi - m^2 \int \Phi^+ \wedge *\Phi,$$

où g est la constante de couplage, m est la masse scalaire, et tr est une forme quadratique sur l'algèbre de Lie du groupe de jauge compact ¹.

1. M. Göckeler and T. Schücker, *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*, Cambridge University Press, 1997

Les théories de jauge sont les exemples les plus importants de théories quantiques des champs. Le modèle standard est une théorie de jauge, par exemple, mais le groupe de Lie dans ce cas est un produit direct de plusieurs autres groupes de Lie en raison de la complexité de la théorie et du nombre de bosons de jauge qui doivent être pris en compte. Cependant, il est assez courant en mathématiques qu'un domaine soit d'abord inspiré ou créé à partir de découvertes en physique théorique, puis se développe en une branche propre au point que l'origine physique devient assez lointaine. C'est le cas de la théorie de jauge en mathématiques, qui est une branche de la géométrie, bien que des références physiques puissent encore apparaître de temps à autre. Lorsqu'on étudie la théorie de jauge d'un point de vue mathématique, généralement, on étudie essentiellement la théorie des connexions.

Commençons par un fibré principal lisse $\pi : P \rightarrow X$ avec un groupe de Lie G . Un fibré principal G -fibré sur une variété lisse X est une variété avec une action à droite G -lisse et un espace d'orbites $P/G = X$. En général, si un groupe de Lie agit sur une variété, on peut définir une relation d'équivalence $p \sim q$ s'il existe un élément de groupe g tel que $g \cdot p = q$. Les classes d'équivalence pour cette relation sont les orbites du groupe de Lie dans la variété, où l'ensemble des orbites est noté par le quotient M/G : on munit l'espace résultant de la topologie quotient, et on appelle le résultat l'espace des orbites de l'action. On peut prouver que si le groupe de Lie agit de manière lisse, libre et propre, l'espace des orbites est une variété topologique de dimension $\dim M - \dim G$ munie d'une structure lisse unique telle que l'application quotient de M vers M/G soit une submersion lisse. Si l'action est localement équivalente à l'action triviale sur $U \times G$, alors on dit que le fibré P a un groupe de structure G . Il y a plusieurs façons de définir une connexion sur ce type de fibré : par exemple, comme une 1-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie appelée 1-forme de connexion (c'est-à-dire comme une 1-forme sur le fibré qui prend ses valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G). Comme suggéré ci-dessus, la courbure de la connexion est une 2-forme Ω à valeurs dans $\mathfrak{g}$ donnée par l'équation

$$\Omega = d\omega + [\omega, \omega].$$

Une autre possibilité est de la définir comme un champ invariant par G de n -plans tangents τ sur P tel que l'application linéaire $\pi_* : \tau_p \rightarrow T_{\pi_p}(X)$ soit un isomorphisme pour tout $p \in P$. La façon la plus courante de définir les connexions est de travailler avec un fibré vectoriel E et d'en faire un fibré principal. Étant donné un fibré vectoriel, une connexion sur le fibré des repères est définie via une application appelée la dérivée covariante :

$$\nabla : \Omega_X^0(E) \rightarrow \Omega_X^1(E).$$

$\Omega_X^0(E)$ désigne une p -forme dans E . En géométrie différentielle, on constate une certaine prolifération d'applications linéaires, cela a pour conséquence que certains considèrent la géométrie différentielle comme une sorte d'algèbre linéaire avancée. Les automorphismes de fibrés sont des transformations de jauge dont les représentations locales sont des fonctions à valeurs matricielles. Cela correspond au concept de connexion en géométrie différentielle. Dans ce cadre, on étudie les connexions sur le fibré tangent d'une variété (généralement la connexion de Levi-Civita). La nouveauté dans la théorie générale des connexions (connue sous le nom de théorie de Yang-Mills) est que l'on étudie les connexions sur des fibrés auxiliaires. Ceci est légèrement différent de ce qu'un physicien entend par théorie de Yang-Mills, mais c'est lié. Historiquement, on a réalisé que la formulation mathématique correcte pour l'électromagnétisme venait en considérant une connexion sur un fibré principal $U(1)$, et cela a donné l'impulsion pour les théories de Yang-Mills physiques, qui

ont ensuite fourni un terrain fertile pour de nouvelles idées géométriques².

Un théorème important dans ce domaine est le théorème de Karen Uhlenbeck sur l'existence de jauges de Coulomb locales : ce résultat est significatif car on a besoin de savoir qu'il est possible de construire des jauges de Coulomb pour différentes connexions. En terminologie formelle, le résultat est le suivant. Il existe des constantes positives non nulles M et ε_1 telles que toute connexion A sur le fibré trivial sur la boule unité fermée B^4 dans $\mathbb{R}^4$ avec la norme L^2 de la courbure F_A inférieure à ε_1 est équivalente par jauge à une connexion différente A' sur la boule ouverte B^4 telle que

$$d^* A' = 0,$$

$$\lim_{|x| \rightarrow 1} A'_r = 0,$$

$$\|A'\|_{L^2_1} \leq M \|F_A\|_{L^2}.$$

De plus, pour des constantes correctement choisies, la connexion A' est déterminée de manière unique par ces propriétés, modulo une transformation de jauge locale

$$A' \rightarrow u_0 A' u_0^{-1},$$

pour un certain u_0 constant tiré du groupe $U(n)$. Essentiellement, si l'on suppose que la courbure n'est pas trop grande et que l'on travaille dans un espace agréable L^2 , on peut toujours satisfaire la condition de jauge de Coulomb, et cette condition fournit une connexion à valeurs matricielles avec de petites entrées. La preuve de ce théorème est assez compliquée et utilise une méthode de continuité astucieuse. Il faut montrer qu'il existe une constante positive C telle que si B'_t est une famille à un paramètre de connexions rééchelonnées pour des temps dans l'intervalle unité sur le fibré trivial sur S^4 avec une borne sur la courbure rééchelonnée $\|F'_{B_t}\| < C$, et B'_0 la connexion produit, alors pour tout temps t il existe une transformation de jauge agréable telle qu'une estimation soit satisfaite sur la norme L^2 de B_t . L'idée de continuité entre en jeu ici, car on prend l'ensemble des temps dans l'intervalle unité pour lesquels une telle transformation de jauge existe et on montre que l'ensemble est à la fois ouvert et fermé, et qu'il contient les points $t = 0$ et $t = 1$, ce qui prouve la proposition³.

Pour expliquer la terminologie d'une jauge de Coulomb classique, il faut expliquer l'idée de "fixer la jauge". En termes physiques, cela correspond au fait d'avoir des degrés de liberté libres dans le système que l'on essaye de décrire, et vous avez besoin d'un choix de jauge et d'un choix raisonnable d'équation auxiliaire pour que ceux-ci puissent être identifiés et traités. La jauge de Lorenz est un autre exemple classique de l'électromagnétisme (elle ne porte pas le nom de Lorentz, bien qu'elle soit invariante de Lorentz). La condition de jauge de Coulomb est la condition classique pour le cas où la variété de base est un domaine dans $\mathbb{R}^3$ où l'on insiste pour que le potentiel vecteur soit normalisé par

$$d^* A = 0.$$

Géométriquement parlant, un choix de jauge est un choix de trivialisations du fibré. Si nous partons d'un ouvert dans X sur lequel E est trivial et fixons un difféomorphisme τ appelé trivialisations

2. Simon Donaldson and Peter Kronheimer, *The Geometry of Four-Manifolds*, Oxford University Press, 1990.

3. Karen Uhlenbeck, *Connections with L^p bounds on curvature*, *Communications in Mathematical Physics*, 83, 31–42 (1982).

locale qui envoie l'ouvert vers les fibres de E , l'ouvert sur lequel cette trivialisation peut être effectuée est appelé un voisinage trivialisant. Dans le cas où nous travaillons avec un fibré vectoriel, les fibres de E sont des copies de $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$ (selon qu'il s'agit d'un fibré vectoriel réel ou complexe, respectivement). En particulier, si nous choisissons de représenter la connexion via des matrices de connexion, ces matrices dépendront du choix de la trivialisation du fibré (ou du choix de jauge). Si nous prenons un automorphisme u du fibré $\mathbb{C}^n$, alors $u\tau$ est aussi une trivialisation locale et l'on a une formule de transformation pour la connexion qui peut être vue comme l'effet d'un changement de trivialisation locale sur les matrices de connexion pour une connexion fixée :

$$A \rightarrow uAu^{-1} - (du)u^{-1}.$$

Dans la littérature physique, vous pourriez voir ceci comme

$$A \rightarrow \gamma A \gamma^{-1} - (d\gamma)\gamma^{-1},$$

ou alternativement

$$A \rightarrow \gamma A \gamma^{-1} + \gamma(d\gamma^{-1}),$$

où γ est une transformation de jauge locale qui envoie un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^4$ dans le groupe de structure.

On peut également montrer que la 1-forme de connexion se transformant de cette manière implique que la 2-forme de courbure se transforme comme

$$F \rightarrow \gamma F \gamma^{-1}.$$

Ceci peut être prouvé avec un autre calcul de détail. Commençons par la définition de la courbure :

$$F = dA + A \wedge A.$$

Effectuons la transformation et utilisons la règle de Leibnitz graduée :

$$\begin{aligned} F &\rightarrow d(\gamma A \gamma^{-1} + \gamma d\gamma^{-1}) + (\gamma A \gamma^{-1} + \gamma d\gamma^{-1}) \wedge (\gamma A \gamma^{-1} + \gamma d\gamma^{-1}), \\ &= d\gamma \wedge A \gamma^{-1} + \gamma dA \gamma^{-1} - \gamma A d\gamma^{-1} + d\gamma \wedge d\gamma^{-1} + \gamma d^2 \gamma^{-1} + \gamma A \gamma^{-1} \wedge \gamma A \gamma^{-1} \\ &\quad + \gamma d\gamma^{-1} \wedge \gamma A \gamma^{-1} + \gamma A \gamma^{-1} \wedge \gamma d\gamma^{-1} + \gamma d\gamma^{-1} \wedge \gamma d\gamma^{-1}. \end{aligned}$$

Le cinquième terme disparaît par définition de la dérivée extérieure ordinaire, et après quelques simplifications, on obtient :

$$F' = \gamma(dA + A \wedge A)\gamma^{-1} + (d\gamma) \wedge A \gamma^{-1} - \gamma A d\gamma^{-1} + d\gamma \wedge d\gamma^{-1} + \gamma d\gamma \gamma^{-1} \wedge \gamma A \gamma^{-1} + \gamma A d\gamma \gamma^{-1} + \gamma d\gamma \gamma^{-1} \wedge \gamma d\gamma \gamma^{-1}.$$

On sait que

$$d(\gamma \gamma^{-1}) = d(1) = 0.$$

On a aussi

$$d(\gamma \gamma^{-1}) = (d\gamma)\gamma^{-1} + \gamma(d\gamma \gamma^{-1}).$$

Ceci implique que

$$(d\gamma)\gamma^{-1} = -\gamma(d\gamma \gamma^{-1}),$$

ce qui implique que

$$d\gamma\gamma^{-1} = -\gamma^{-1}(d\gamma)\gamma^{-1}.$$

En remplaçant ceci et en utilisant la définition de la courbure dans le premier terme, on a

$$\begin{aligned} F' &= \gamma F \gamma^{-1} + d\gamma \wedge A \gamma^{-1} + \gamma A \wedge \gamma^{-1}(d\gamma)\gamma^{-1} \\ &\quad - d\gamma \wedge \gamma^{-1}(d\gamma)\gamma^{-1} - d\gamma(\gamma\gamma^{-1}) \wedge \gamma A \gamma^{-1} \\ &\quad - \gamma A \wedge \gamma^{-1}(d\gamma)\gamma^{-1} + (d\gamma)\gamma^{-1} \wedge (d\gamma)\gamma^{-1}, \end{aligned}$$

après quelques simplifications. Ceci est le résultat requis et il montre que la 2-forme de courbure se transforme dans la représentation adjointe sous une transformation de jauge, puisque ce qui précède est la transformation pour un champ adjoint.

Cette capacité à trouver des jauges de Coulomb est utilisée de manière cruciale dans l'article de Karen Uhlenbeck sur la suppression des singularités dans les connexions de Yang-Mills en dimension quatre⁴. Le résultat de Karen Uhlenbeck a été étendu à des dimensions supérieures par Tao et Tian⁵. Le théorème stipule que si l'on prend une connexion unitaire A sur une boule épointée à l'origine $B^4 \setminus \{0\}$ qui est anti-auto-duale (ASD) par rapport à une métrique lisse sur B^4 et si

$$\int_{B^4 \setminus \{0\}} |F(A)|^2 < \infty,$$

alors il existe une connexion anti-auto-duale lisse sur B^4 qui est équivalente par jauge à A sur la boule épointée. En termes physiques, un champ de jauge auto-dual est un champ tel que

$$F = *F,$$

et un champ de jauge anti-auto-dual est tel que

$$F = -*F,$$

où $*$ désigne l'opérateur de dualité de Hodge. Si l'on munit une variété d'une orientation et d'une métrique, il s'agit d'une application linéaire

$$*: \Lambda^p V \rightarrow \Lambda^{n-p} V,$$

donnée en coordonnées locales par

$$*(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}) := \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \eta^{i_1 i_1} \dots \eta^{i_p i_p} e^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge e^{i_n},$$

où les e^i forment une base orthonormée orientée de l'espace dual de V . Sur une variété de dimension quatre, l'opérateur de Hodge envoie les 2-formes sur les 2-formes. Les équations de Maxwell peuvent être réécrites en utilisant l'étoile de Hodge ainsi :

$$dF = 0,$$

4. Karen Uhlenbeck, *Removable singularities in Yang-Mills fields*, *Communications in Mathematical Physics*, 83, 11–29 (1982).

5. Terence Tao et Gang Tian, *A singularity removal theorem for Yang-Mills fields in higher dimensions*, *J. Amer. Math. Soc.*, 17, 557–593 (2004)

$$\delta F = *j,$$

où δ est le co-dérivé, un autre opérateur différentiel sur les formes défini par

$$\delta\varphi := (-1)^{np+n+1+s} * d * \varphi.$$

En termes plus géométriques, les formes auto-duales et anti-auto-duales sont définies comme étant les espaces propres de valeur propre 1 et -1 du dual de Hodge. En termes de sections, ce sont des sections des fibrés Λ^+ et Λ^- , respectivement, où Λ^2 est la somme directe de Λ^+ et Λ^- , et la 2-forme $\alpha \wedge \alpha$ est égale à

$$\alpha \wedge \alpha = \mp |\alpha|^2 d\mu.$$

Les sous-espaces des formes auto-duales et anti-auto-duales ne dépendent que de la classe conforme de la métrique riemannienne. Prenons une variété riemannienne de dimension quatre munie d'une orientation : comme nous l'avons dit, les 2-formes sur cette variété peuvent être décomposées en parties auto-duales et anti-auto-duales et cette décomposition s'étend à la 2-forme de courbure d'une connexion sur un fibré E sur la variété, donc nous pouvons écrire F_A comme la somme directe de F_A^+ et F_A^- . Une connexion est anti-auto-duale si $F_A^+ = 0$ et auto-duale si $F_A^- = 0$: généralement, les connexions anti-auto-duales sont plus pratiques⁶. On peut prouver assez facilement que toute connexion métrique anti-auto-duale résout l'équation de Yang-Mills. L'équation de Yang-Mills est

$$D^* F = 0.$$

Une identité montre que ceci est équivalent à

$$D * F = 0.$$

Il s'agit d'une EDP non linéaire du second ordre pour A qui peut également être obtenue en faisant varier l'action de Yang-Mills et en supposant qu'il n'y a pas de champs de matière. On peut montrer en exercice que le carré de l'application de Hodge est toujours 1 ou -1. Si l'on choisit un repère orthonormé et que l'on utilise les coordonnées locales, une p -forme peut s'écrire

$$\varphi = \frac{1}{p!} \varphi_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p},$$

d'où

$$*\varphi = \frac{1}{p!} \frac{1}{(n-p)!} \varphi_{i_1 \dots i_p} \varepsilon_{j_1 \dots j_p j_{p+1}} \det g_{kl} \tilde{2} \eta^{i_1 j_1} \dots \eta^{i_p j_p} e^{j_{p+1}} \wedge \dots \wedge e^{i_n}.$$

On utilise la définition de la transformation de la base par le dual de Hodge puis on rassemble les résultats. Pour réduire certaines des composantes métriques à la fin, on inverse les indices du symbole de Levi-Civita restant, ce qui introduit un facteur de $p!$. On aboutit à

$$**\varphi = (-1)^{p(n-1)+s} \varphi,$$

ce qui prouve l'affirmation. En particulier, sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$, $** = 1$. Si nous laissons F être anti-auto-duale (ou auto-duale, en fait), l'équation de Yang-Mills devient

$$D * F = 0,$$

6. Simon Donaldson and Peter Kronheimer, *The Geometry of Four-Manifolds*, Oxford University Press, 1990.

ce qui donne

$$DF = 0.$$

C'est l'identité de Bianchi géométrique, donc on peut trouver des solutions à l'équation de Yang-Mills en résolvant l'une ou l'autre des équations du premier ordre pour A :

$$F = \mp * F,$$

ce qui signifie que les équations sont satisfaites par des connexions auto-duales ou anti-auto-duales ⁷.

Une connexion auto-duale ou anti-auto-duale peut également être appelée un instanton ou un anti-instanton. Généralement, on pourrait dire qu'un instanton est un type spécial de solution des équations de champ pour les théories de jauge. Plus spécifiquement, un instanton est une solution classique dans une théorie euclidienne des champs classique avec une action finie non nulle. Le nom est dû au fait qu'ils se produisent pour un "instant" (un point) du temps euclidien et donc ils sont importants en tant que points critiques dans la formulation intégrale de chemin d'une théorie qui utilise la signature euclidienne. L'instanton solution de l'équation de Yang-Mills euclidienne conduit à un fibré $SU(2)$ sur S^4 , mais on peut aussi prouver que toute solution d'action finie des équations de Yang-Mills euclidiennes conduit à un fibré sur S^4 (c'est un autre théorème de Karen Uhlenbeck) ⁸.

Si l'on considère l'exemple le plus connu, on prend une théorie de Yang-Mills pure avec un groupe de symétrie $SU(2)$ dans $\mathbb{R}^4$ avec signature euclidienne. Les équations du mouvement (c'est-à-dire les équations de Yang-Mills) sont $D * F = 0$ et $DF = 0$. Lorsqu'on introduit la condition anti-auto-duale, ces équations se réduisent à des EDO pour le potentiel de jauge A . Si l'on fabrique un ansatz pour la solution de l'équation anti-auto-duale qui ne diffère d'une jauge pure que par une fonction de r à rayon infini, on garantit que nos solutions ont une action finie non nulle. Notre ansatz pour le champ de jauge est tel qu'il devient une jauge pure lorsque r tend vers l'infini et que la force de champ associée disparaît, ce qui signifie que l'action est finie. Si l'on choisit la transformation de jauge appropriée et qu'on l'utilise pour évaluer la force de champ, on obtient alors une équation dont la solution complète est le "potentiel instanton" qui est régulier sur tout $\mathbb{R}^4$. L'action est égale à $-8\pi^2/g^2$, elle est donc évidemment finie. On peut également considérer des structures de fibrés apparentées comme le monopôle de Dirac : la structure de fibré du monopôle de Dirac est extrêmement similaire à celle du fibré instanton de Yang-Mills. En suivant cette logique, on pourrait tenter de construire un "instanton gravitationnel" : on cherche une métrique de signature euclidienne décrite localement par un repère orthonormé et on résout les équations d'Einstein sans matière. On aboutit à une solution telle que g et f tendent vers 1 lorsque r tend vers l'infini. Ceci est similaire au cas de Yang-Mills, où le potentiel instanton de Yang-Mills devient une jauge pure lorsque r tend vers l'infini. La gravité finit par être "analogue" aux autres théories de jauge, plutôt que directement comparable, car la gravité ne se quantifie pas bien et les théories de jauge sont des théories quantiques des champs.

En termes variationnels, les équations de Yang-Mills sont les équations d'Euler-Lagrange pour la fonctionnelle de Yang-Mills $\|F_A\|^2$ sur l'espace des connexions, considérée comme le carré de la

7. Jürgen Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer, 2008.

8. Karen Uhlenbeck, *Removable singularities in Yang-Mills fields*, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1, 579–581 (1979).

norme L^2 de la courbure :

$$\|F_A\|^2 = \int_X |F_A|^2 d\mu = \int_X |F_A^-|^2 d\mu + \int_X |F_A^+|^2 d\mu.$$

Nous avons également la condition anti-auto-duale qu'une connexion est seulement anti-auto-duale si

$$\text{Tr}(F_A^2) = |F_A|^2 d\mu.$$

Ce n'est qu'un point de base qui peut être mentionné concernant la relation entre la densité de Yang-Mills et la 4-forme $\text{Tr}(F^2)$. Si l'on prend un fibré E sur une variété riemannienne orientée compacte de dimension quatre qui peut être munie d'une connexion anti-auto-duale, alors $\kappa(E) \geq 0$, et si $\kappa(E) = 0$ toute connexion anti-auto-duale est plate. $\kappa(E)$ est un nombre caractéristique dont la définition dépend du groupe associé au fibré, mais dans le cas des fibrés $SU(r)$, c'est juste $c_2(E)$, la seconde classe de Chern. Pour une connexion $SU(2)$, c'est

$$c_2 = \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(F \wedge F).$$

Il est intéressant de noter que dans le cas que nous avons mentionné précédemment des fibrés $SU(2)$ sur S^4 , la seconde classe de Chern prend une signification topologique explicite, puisque le fibré peut être trivialisé sur les hémisphères supérieur et inférieur de S^4 à isomorphisme près par la classe d'homotopie de la fonction de transition (de la même manière que la sphère à deux dimensions peut être trivialisée explicitement sur ses deux hémisphères avec des fonctions de transition appropriées). $SU(2)$ lui-même peut être identifié avec S^3 , donc la fonction de transition donne une auto-application de la 3-sphère et la seconde classe de Chern du fibré est simplement le degré de cette application.

Karen Uhlenbeck a également contribué à la théorie des systèmes intégrables et nous mentionnons ici quelques théorèmes d'intégrabilité importants qu'elle a démontrés. Par exemple, prenons l'hypercube unité

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } |x_i| < 1\}.$$

Si E est un fibré sur l'hypercube et A est une connexion plate sur E , alors il existe un isomorphisme de fibré envoyant E sur le fibré trivial sur le cube et A sur la connexion produit. Un autre exemple est le théorème d'intégrabilité pour les structures holomorphes qui nous dit quand une connexion partielle provient d'une structure holomorphe sur le fibré (on dit que la connexion est intégrable dans ce cas). Explicitement, une connexion partielle $\bar{\partial}_\alpha$ sur un fibré vectoriel complexe C^∞ sur une variété complexe X est intégrable si et seulement si⁹

$$\bar{\partial}_\alpha^2 = \Phi_\alpha.$$

En général, les travaux de Karen Uhlenbeck s'inscrivent dans ceux d'un petit groupe de géomètres différentiels qui ont contribué à faire de l'analyse géométrique une discipline de premier plan. Les exemples les plus évidents d'équations qui relèvent de l'analyse géométrique sont les flots géométriques (équations d'évolution pour une fonctionnelle sur une variété ayant une signification géométrique). Un exemple célèbre est le flot de Ricci, utilisé par Perelman pour prouver la conjecture

9. Simon Donaldson and Peter Kronheimer, *The Geometry of Four-Manifolds*, Oxford University Press, 1990.

de géométrisation de Thurston et par implication la conjecture de Poincaré. Dans ce flot, la métrique évolue selon la courbure de Ricci.

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \operatorname{Ric}(g).$$

La classification des singularités que ce flot peut développer est un sujet riche et fascinant en soi. Un autre exemple est le flot par la courbure moyenne. Si F est une application de $M^n \times [0, T)$ vers une variété $(N^{n+1}, \bar{g})$, alors F est dit résoudre le flot par la courbure moyenne si

$$\frac{d}{dt} F(p, t) = \bar{H}(F(p, t)).$$

Il s'agit d'un système parabolique quasi-linéaire du second ordre. Un flot géométrique est un flot de gradient associé à une fonctionnelle sur une variété : le flot par la courbure moyenne peut être considéré comme le flot de gradient de l'aire par rapport à la norme L^2 sur la surface.

Une astuce de Karen Uhlenbeck est souvent utilisée dans ce domaine lorsqu'on considère l'évolution de quantités géométriques telles que le tenseur de courbure par le flot. Nous pourrions par exemple avoir une équation d'évolution pour la courbure et souhaiter appliquer une sorte de principe du maximum pour trouver des conditions de courbure préservées sous le flot de Ricci. Si nous avons une équation d'évolution pour le tenseur d'Einstein, nous devons considérer ce tenseur non seulement comme une section de $T^*M \otimes TM$, mais aussi comme une section du sous-fibré des sections qui sont symétriques par rapport à $g(t)$. Ce sous-fibré hérite de la dépendance temporelle de la métrique, ce qui doit être traité d'une manière ou d'une autre¹⁰. L'astuce consiste à prendre un fibré vectoriel arbitraire V qui est isomorphe au fibré tangent via un isomorphisme de fibrés et à fixer une métrique de rappel h sur les fibres. Nous choisissons une isométrie de fibrés u_0 au temps 0 entre V et TM et autorisons une famille à un paramètre d'endomorphismes de fibrés à évoluer sous l'équation

$$\frac{\partial u(v)}{\partial t} = \operatorname{Ric}_{g(t)}(u(v)).$$

Dans ce cas, la métrique de rappel $h = u_0^*(g_0)$ est constante dans le temps car elle a une dérivée temporelle nulle, et l'équation d'évolution de la métrique peut être utilisée pour montrer que $h = u_t^*(g(t))$ pour tout t , donc u reste une isométrie de fibrés entre la métrique dépendant du temps sur le fibré tangent et la métrique fixée sur le fibré arbitraire V . De là, nous pouvons faire un rappel avec u , ramener le tenseur de courbure à un tenseur sur V et définir une connexion sur V qui est le rappel de la connexion de Levi-Civita sur le fibré tangent sous u à chaque temps t ¹¹.

10. Peter Topping, *Lectures on the Ricci Flow*, Cambridge University Press, 2010.

11. Richard Hamilton, *Four-manifolds with positive curvature operator*, Journal of Differential Geometry, 24, 2, 153–179 (1986).