Frances Kirwan

Kirwan travaille principalement en géométrie algébrique et symplectique. Elle a été la deuxième plus jeune personne élue présidente de la London Mathematical Society et la première femme mathématicienne élue à la prestigieuse chaire de professeur Savilien de géométrie. Nous avons déjà abordé la géométrie algébrique plus tôt dans l'ouvrage, mais nous n'avons pas mentionné les courbes algébriques. Ces courbes forment peut-être la partie la plus riche de la géométrie algébrique et ont un statut unique en termes de beauté, de prestige classique et d'importance dans la recherche mathématique actuelle. Une courbe algébrique est une variété algébrique de dimension 1. Si l'on prend un sous-ensemble affine ou projectif (un sous-ensemble de l'espace affine ou projectif) avec sa topologie de Zariski, on peut définir un faisceau de fonctions correspondant O_X avec la restriction appropriée. Le triplet formé du sous-ensemble, de la topologie et du faisceau est appelé respectivement une variété affine ou projective (cette définition absorbe celle que nous avons suggérée précédemment). On peut avoir une courbe affine ou projective en conséquence, une courbe projective étant l'ensemble des zéros d'un polynôme dans un plan projectif.

Une famille très importante de courbes algébriques est celle des courbes elliptiques : elles ont été utilisées par Wiles dans sa célèbre preuve du dernier théorème de Fermat. Une courbe elliptique est par définition lisse et non singulière. Elle n'a ni auto-intersections ni points de rebroussement (elle ne peut pas s'enrouler sur elle-même ni se courber vers le haut et vers le bas de manière à former une pointe). En particulier dans les applications et les contextes plus computationnels, il est courant d'écrire une équation explicite pour la courbe, connue sous le nom de forme de Weierstrass.

$$y^2 = x^3 + Ax + B,$$

où A et B sont des constantes. Si A et B sont pris comme éléments d'un corps k, alors on dit que la courbe elliptique E est définie sur ce corps. Dessiner ou visualiser une courbe elliptique sur un corps arbitraire est généralement impossible, mais on peut visualiser des graphes plus familiers sur $\mathbb{R}$ pour aider l'intuition [1]. Par exemple, la courbe plane dans $\mathbb{R}^2$

$$y^2 = x^3$$

est une courbe cubique cuspidale et

$$y^2 = x^3 + x^2$$

est une courbe cubique nodale avec une auto-intersection. Ces cubiques peuvent être paramétrées comme vous pourriez être habitué à paramétrer un cercle ou une ellipse [2]. Il est également utile d'ajouter le point à l'infini à une courbe elliptique, donc on inclut généralement ce point lors de la définition de la courbe sur un corps :

$$E(L) = \{\infty\} \cup \{(x, y) \in L \times L \text{ tel que } y^2 = x^3 + Ax + B\}.$$

C'est un exercice intéressant de réfléchir à la manière de prendre deux points sur une courbe elliptique et d'obtenir un nouveau point. Cela conduit à la loi de groupe pour les courbes elliptiques.

Synthèse et traduction des pages 169 à 178 de l'article arXiv https://arxiv.org/pdf/1910.01730 (fichiers de 1910.01730v3_page-0169.jpg à 1910.01730v3_page-0178.jpg).

Transcription en LaTeX : Madame Denise Vella-Chemla.

1. Lawrence Washington, Elliptic Curves : Number Theory and Cryptography (New York : Chapman Hall, 2008).
2. Miles Reid, Undergraduate Algebraic Geometry (Cambridge : Cambridge University Press, 2010).

Prenons une courbe elliptique E sous forme de Weierstrass. Soient $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$ deux points sur E (pas le point à l'infini). Nous définissons un troisième point P_3 donné par l'addition de ces deux points comme suit : si x_1 est différent de x_2, alors

$$x_3 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 - x_1 - x_2, y_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_1 - x_3) - y_1.$$

Si $x_1 = x_2$ mais y_1 est différent de y_2, alors $P_1 + P_2 = \infty$. Si $P_1 = P_2$ et y_1 est non nul, alors

$$x_3 = \left(\frac{3x_1^2 + A}{2y_1}\right)^2 - 2x_1, y_3 = \frac{3x_1^2 + A}{2y_1}(x_1 - x_3) - y_1.$$

Si $P_1 = P_2$ et y_1 est nul, alors $P_1 + P_2 = \infty$ et $P + \infty = P$ pour tout P. On peut montrer que l'addition de points sur une courbe elliptique satisfait les axiomes de groupe et donc les points de E forment un groupe abélien où le point formel à l'infini ∞ est l'identité. Évidemment, sur un corps fini, il n'y aura qu'un nombre fini de points dont les coordonnées sont tirées de ce corps, donc le groupe sera également fini et abélien. Dans le cas important d'une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}, E(\mathbb{Q})$ est un groupe abélien de type fini. C'est un résultat clé connu sous le nom de théorème de Mordell-Weil et pour un tel groupe nous avons

$$E(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}^r \oplus F,$$

pour un certain groupe fini F. Un autre théorème clé est le théorème de Lutz-Nagell, qui dit que si E est une courbe elliptique sous forme de Weierstrass avec A et B dans $\mathbb{Z}$ et P dans $E(\mathbb{Q})$, alors x et y sont également dans $\mathbb{Z}$, et si y est non nul, alors y^2 divise $4A^3 + 27B^2$. Ce théorème peut souvent être utilisé pour trouver les points de torsion possibles pour une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$, un point de torsion étant un point d'ordre fini (c'est-à-dire un membre du groupe de torsion). Tous les points d'une courbe elliptique sur un corps fini sont de torsion [3].

Kirwan a travaillé en particulier sur les espaces de modules des courbes algébriques complexes. Comme vous pouvez vous y attendre, une courbe algébrique complexe dans $\mathbb{C}^2$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ de la forme

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = 0\},$$

où P est un polynôme en deux variables à coefficients complexes. Évidemment, on peut prendre des coefficients réels pour le polynôme pour obtenir une courbe algébrique réelle correspondante. Ce type de courbe a été étudié intensivement depuis l'Antiquité (les courbes cubiques qu'étudia et classifia Newton étaient réelles). Cependant, les courbes algébriques complexes peuvent souvent être plus faciles à utiliser que leurs versions réelles. Le même polynôme peut se factoriser complètement lorsque les coefficients sont complexes par rapport à la version avec des coefficients réels, par exemple. Vous avez probablement réalisé qu'une courbe algébrique complexe ne peut pas être dessinée dans $\mathbb{C}^2$ car elle a quatre dimensions réelles (le plan complexe $\mathbb{C}$ a déjà deux dimensions réelles et $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$). Si nous ajoutons le point à l'infini, nous pouvons avoir des images de courbes qui nous donnent une bonne idée de ce qui se passe topologiquement, mais dans ce cas, lorsque le point ∞ est ajouté à une ligne complexe, celle-ci devient une sphère en termes topologiques. C'est effectivement ce qui se passe avec la sphère de Riemann, qui peut être considérée comme la ligne

3. Lawrence Washington, Elliptic Curves : Number Theory and Cryptography (New York : Chapman Hall, 2008).

projective complexe. Tout cela renvoie à l'analyse complexe et à la théorie des surfaces de Riemann, puisque la sphère de Riemann (et toute surface de Riemann compacte en général) est une courbe algébrique projective. Le symbole pour un faisceau O_X provient en fait du contexte de l'analyse complexe (du mot italien « olomorfico », signifiant « holomorphe »).

Nous mentionnerons certaines propriétés topologiques des courbes algébriques complexes. Une courbe projective non singulière de genre g dans le plan projectif $\mathbb{P}^2$ est topologiquement une sphère avec g anses (pour une anse, imaginez que vous avez coupé un tore pour le déconnecter et en faire un cylindre, puis que vous avez cousu les deux côtés sur la sphère). Le genre de cette courbe satisfait toujours la formule degré-genre :

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Si la courbe est une courbe projective irréductible avec un ensemble de points singuliers p_i, on peut assigner un entier δ à chaque singularité tel que la formule de Noether soit vérifiée :

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \sum_{j=1}^{r} \delta(p_i).$$

On peut prouver la formule degré-genre en utilisant le fait que toute courbe projective non singulière dans le plan projectif peut être vue comme un revêtement ramifié de la droite projective. Toute courbe projective non singulière dans le plan (c'est-à-dire toute surface de Riemann compacte) peut être triangulée et la caractéristique d'Euler d'une courbe ne dépend pas de ce choix de triangulation. Dans le cas d'une surface orientable compacte sans bord et de genre g, la caractéristique d'Euler est simplement $2-2g$. On peut prouver cela en commençant par une surface de genre zéro (une sphère). Celle-ci a une caractéristique d'Euler de 2 et on procède par récurrence sur cette surface [4].

Un résultat très significatif dans ce domaine est le théorème de Riemann-Roch : ce théorème relie directement l'analyse complexe d'une surface de Riemann au genre (un invariant topologique). Le théorème dit que si D est un diviseur sur une courbe algébrique X, alors

$$\dim L(D) - \dim H^1(D) = \deg D + 1 - \dim H^1(0),$$

où $L(D)$ est l'espace des fonctions méromorphes sur X avec des pôles bornés par D. Un problème où l'on tente de calculer la dimension de cet espace est connu sous le nom de problème de Riemann-Roch. Rappelons de l'analyse complexe qu'une fonction est méromorphe sur un domaine si elle est holomorphe (infiniment différentiable et localement égale à sa propre série de Taylor au voisinage d'un point) partout sauf pour un ensemble de points. Si une fonction holomorphe d'une variable complexe $f(z)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

pour un entier n, la fonction a un zéro de multiplicité n en z_0. Si $n = 1$, nous disons que z_0 est un zéro simple. Un point où une fonction méromorphe n'est plus holomorphe est appelé une singularité.

4. Frances Kirwan, Complex Algebraic Curves (Cambridge : Cambridge University Press, 1992).

Si nous pouvons développer une fonction autour d'un point a via une série de Laurent (comme une série de Taylor, mais des termes de degré négatif sont autorisés),

$$f(z) = \cdots + C_2(z-a)^2 + C_1(z-a) + C_0 + \frac{C_{-1}}{z-a} + \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots,$$

alors ce point est une singularité. S'il n'y a qu'un nombre fini de termes contenant des puissances négatives de $z-a$, alors le point est un pôle [5].

Si X est une surface de Riemann, un diviseur sur X est une fonction $D : X \to \mathbb{Z}$ telle que l'ensemble des points dans X où $D(p) \neq 0$ est un sous-ensemble discret de cette courbe. Les diviseurs de la surface de Riemann forment un groupe lorsqu'ils sont munis de l'addition ponctuelle comme opération de groupe. Dans le cas d'une surface de Riemann compacte, le degré d'un diviseur est simplement la somme des valeurs de ce diviseur :

$$\deg(D) = \sum_{p \in X} D(p).$$

Un diviseur qui peut être défini en termes de fonction d'ordre est connu sous le nom de diviseur principal sur X :

$$\operatorname{div}(f) = \sum_p \operatorname{ord}_p(f) \cdot p.$$

Dans le cas où nous avons une 1-forme méromorphe plutôt qu'une fonction, le diviseur est canonique.

$$\operatorname{div}(\omega) = \sum_p \operatorname{ord}_p(\omega) \cdot p.$$

L'ensemble des diviseurs canoniques forme un coset des diviseurs principaux de X, qui eux-mêmes forment un sous-groupe des diviseurs. Telle quelle, notre énoncé du théorème de Riemann-Roch n'est pas très utile d'un point de vue computationnel, car il transforme le problème du calcul de la dimension de $L(D)$ en un problème de calcul des premiers groupes de cohomologie, qui doivent être identifiés. Cela peut être fait en utilisant le théorème de dualité de Serre, qui stipule que pour tout diviseur D sur une courbe algébrique X (une surface de Riemann compacte si nous travaillons sur $\mathbb{C}$), l'application résidu

$$\operatorname{Res} : L^{(1)}(-D) \to (H^1(D))^*$$

est un isomorphisme entre espaces vectoriels complexes. Pour un diviseur canonique K et un diviseur général D, on a

$$\dim H^1(D) = \dim L^{(1)}(-D) = \dim L(K-D).$$

Cela conduit finalement à la version améliorée du théorème de Riemann-Roch. Commençons par une courbe algébrique X de genre g. Pour tout diviseur général D et tout diviseur canonique K, on a le magnifique résultat

$$\dim L(D) - \dim L(K-D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Le théorème est particulièrement utile pour calculer le degré de grands diviseurs [6].

5. Louis Milne-Thomson, Theoretical Hydrodynamics (London : Macmillan Co Ltd, 1968).
6. Rick Miranda, Algebraic Curves and Riemann Surfaces (USA : American Mathematical Society, 1995).

Un espace de modules de courbes algébriques est un espace dont les points peuvent être vus comme des classes d'isomorphisme de courbes algébriques. En d'autres termes, c'est un espace quotient tel que la relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes (non singulières) est l'isomorphisme, ou un espace qui paramètre toutes les courbes de genre g. (La définition vaut également si l'on prend un autre type d'objet géométrique algébrique qu'une courbe). On pourrait généralement noter cet espace $\mathcal{M}_g$ où g est le genre ou le genre algébrique des courbes, en gardant à l'esprit que l'espace deviendra plus compliqué à mesure que le genre augmente. Un espace de modules est souvent ce qu'on appelle un champ algébrique, au point où l'on pourrait se référer au champ de modules plus fondamental $\mathcal{M}_g$. Je ne donnerai pas la définition d'un champ car elle est technique et vous pouvez la consulter ailleurs. Dans certains cas, il est plus facile de considérer des espaces de modules de courbes avec plusieurs points marqués ou « étiquetés » : on le note $\mathcal{M}_{g;n}$, où n est le nombre de points marqués. Comme exemple trivial, l'espace de modules $\mathcal{M}_{0;3}$ est un point unique, car deux points sur la droite projective complexe peuvent être envoyés l'un sur l'autre par un automorphisme de la droite. Dans le cas des courbes elliptiques avec un point marqué, les choses sont déjà plus compliquées. L'espace de modules correspondant $\mathcal{M}_{1;1}$ est le quotient du demi-plan supérieur par une action discrète de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, mais il peut aussi être représenté comme le quotient d'un espace de modules différent $\mathcal{M}_{0;4}$ par une action d'un groupe de permutations.

La théorie générale derrière la construction des espaces de modules de courbes est difficile, mais nous pouvons dire quelques choses générales sur ces espaces. L'espace doit avoir une topologie et une structure complexe. Il y a un sens précis dans lequel une courbe projective dont l'équation est une petite perturbation de l'équation d'une autre courbe doit donner un point dans l'espace de modules qui est une petite perturbation de l'autre point. Dans le cas sans points marqués et de genre supérieur ou égal à 3, l'espace de modules des courbes doit avoir une courbe universelle. Plus explicitement, l'espace de modules doit être muni d'une variété complexe $C_{g;0}$ et d'une application $\pi\colon C_{g;0} \to \mathcal{M}_{g;0}$ telle que la fibre au-dessus d'un point $\pi^{-1}(c)$ est une courbe complexe dont la classe d'équivalence coïncide avec le point correspondant dans l'espace de modules. Un espace de modules doit contenir toutes les familles possibles de courbes. Si p est une application holomorphe entre deux variétés complexes E et B telle que la fibre $p^{-1}(b)$ au-dessus de chaque point b dans B est le quotient d'une courbe complexe par son groupe d'automorphismes, alors il doit exister des applications de E vers $C_{g;0}$ et de B vers $\mathcal{M}_{g;0}$ telles que l'on puisse former un diagramme commutatif.

En général, il faut distinguer le problème des modules fins et grossiers. Un espace de modules grossier de courbes algébriques de genre g est un triplet constitué de $C_{g;0}, \mathcal{M}_{g;0}$ et d'une application π entre eux telle que chaque courbe de genre g apparaît une fois comme une fibre de π et telle que pour toute famille holomorphe $p\colon E \to B$ dont les fibres sont des quotients comme ci-dessus, il existe des applications holomorphes qui nous permettent de former un diagramme commutatif comme ci-dessus [7]. L'un des exemples non triviaux les plus simples d'un espace de modules est un schéma de Hilbert. C'est un espace de modules de sous-variétés (plus généralement, sous-schémas) avec un polynôme de Hilbert dans un espace projectif. Si l'on prend une sous-variété dans un espace projectif complexe et $I_X^{(n)} \subset \mathbb{C}^{(n)}[x_1, \ldots, x_n]$ l'espace des polynômes qui s'annulent sur la variété X, alors pour n grand, la dimension du quotient est un polynôme en n appelé le polynôme de Hilbert. Dans le cas particulier des points dans le plan complexe, le schéma de Hilbert est une variété lisse

7. Maxim Kazaryan, Sergei Lando and Victor Prasolov, Algebraic Curves : Towards Moduli Spaces (Switzerland :Springer, 2018).

irréductible :

$$\mathrm{Hilb}(\mathbb{C}^2, n) = \{\text{idéaux} I \subset \mathbb{C}[x_1, x_2] \text{ de codimension } n\}.$$

Un ensemble de points dans le plan complexe est spécifié par un idéal dans l'anneau des coordonnées

$$I_P = \{f(p_1) = \cdots = f(p_n) = 0\} \subset \mathbb{C}[x_1, x_2],$$

et la codimension de cet idéal est toujours n, donc c'est le type d'idéal considéré dans la définition. L'application de I_P à P s'étend à une application

$$\pi_{\mathrm{Hilb}} \colon \mathrm{Hilb}(\mathbb{C}^2, n) \to \frac{(\mathbb{C}^2)^n}{S(n)},$$

qui est ce qu'on appelle une résolution des singularités de $(\mathbb{C}^2)^n/S(n)$. Cela fait de ce schéma de Hilbert particulier un type de variété connu sous le nom de résolution symplectique équivariante [8].

La géométrie symplectique est une branche de la géométrie différentielle qui étudie les propriétés des variétés symplectiques invariantes sous les symplectomorphismes, une variété symplectique étant une variété lisse munie d'une 2-forme ω lisse, fermée et non dégénérée. Un choix de forme symplectique sur une variété est également appelé une structure symplectique et un difféomorphisme entre deux variétés symplectiques est appelé un symplectomorphisme si la forme symplectique sur une variété est égale à la forme tirée en arrière sur l'autre variété par ce difféomorphisme :

$$F^*\tilde{\omega} = \omega.$$

Dans le cadre de l'algèbre linéaire (connu sous le nom de géométrie symplectique linéaire), un 2-tenseur alterné non dégénéré est appelé un tenseur symplectique et un espace vectoriel avec une structure symplectique est appelé un espace vectoriel symplectique. Un 2-tenseur est dit non dégénéré si l'équation $\omega(X, Y) = 0$ implique que $X = 0$ pour tout X et Y dans l'espace vectoriel. Si ω est un tenseur symplectique sur un espace vectoriel, on peut montrer par un argument de récurrence que l'espace vectoriel doit avoir une dimension paire et qu'il doit exister une base appelée base symplectique telle que ω puisse s'écrire comme $\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \wedge \beta^i$, où les α^i et β^i
sont des éléments de la base duale pour V^*. Cela implique que toute variété symplectique a une dimension paire. L'exemple le plus évident d'un espace vectoriel symplectique est l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n}$ muni d'une forme bilinéaire [9]

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i.$$

Nous avons mentionné que les espaces de modules sont souvent construits en quotientant des variétés par une action d'un groupe linéaire G : pour simplifier, nous pouvons considérer un groupe linéaire comme un produit semi-direct d'un groupe unipotent avec un groupe réductif. Une manière très importante de développer des quotients de cette façon pour les espaces de modules est la théorie géométrique des invariants de Mumford. L'objectif fondamental de la théorie générale des invariants est d'étudier les actions de groupe sur une variété ou un schéma X. Dans la théorie géométrique des invariants, on étudie ces actions en vue de former un quotient géométrique de X

8. Andrei Okounkov, 'On the crossroads of enumerative geometry and geometric representation theory' (2018), arXiv :1801.09818.

9. John M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds (New York : Springer, 2003).

par G qui est lui-même un bon schéma. Pour être plus technique, si X est une G-variété quasi-projective normale, alors il existe une G-linéarisation pour l'G-action sur cette variété. L'objectif est alors de chercher une variété naturelle qui paramètre les G-orbites dans une variété affine ou projective en utilisant des fonctions invariantes dans l'anneau des coordonnées $k[X]$ [10]. Comme exemple spécifique, il existe un théorème qui stipule que si X est un schéma affine sur un corps k, G est un groupe algébrique réductif et $\sigma : G \times X \to X$ est une action de groupe de G sur X, alors un quotient catégorique uniforme (Y, ϕ) de X par G existe et Y est un schéma affine. Si X est algébrique, alors Y est algébrique sur k. Si le corps k est de caractéristique zéro, alors (Y, ϕ) est un quotient catégorique universel, et si X est noethérien, alors Y est noethérien [11].

Nous n'avons pas complètement défini un schéma précédemment, donc nous allons faire une parenthèse rapide et le faire ici. Commençons par un espace topologique X. Un faisceau de groupes abéliens sur l'espace de base X est un espace topologique O muni d'une application π de O vers X telle que π est un homéomorphisme local, les fibres $\pi^{-1}(p)$ sont des groupes abéliens (la définition peut facilement être ajustée pour permettre des fibres qui sont des anneaux ou des modules), et les opérations de groupe sur chaque fibre sont continues dans la topologie relative de l'espace O. Les fibres du faisceau sont appelées des tiges dans le jargon. Maintenant, prenons un espace annelé (c'est-à-dire un faisceau d'anneaux). Si O_X et O_Y sont deux espaces annelés, un morphisme d'espaces annelés est défini comme une fonction continue $\sigma : X \to Y$ et une collection ψ d'homomorphismes ψ_U de $O_Y(U)$ vers $O_X(\sigma^{-1}(U))$ qui respectent la composition avec les applications de restriction pertinentes pour les espaces annelés. Un schéma affine peut être défini comme un espace annelé isomorphe au faisceau structural (Spec A, O) d'un anneau. On peut définir des morphismes de schémas affines qui sont localement des morphismes des schémas en tant qu'espaces annelés. Un schéma général est un espace annelé (X, O) tel que tout point de X a un voisinage ouvert tel que la restriction à ce voisinage est un schéma affine modulo des isomorphismes appropriés. Les schémas ainsi que leurs morphismes forment une catégorie, comme vous pouvez vous y attendre. La définition d'un schéma peut sembler étrange, mais vous devrez me croire que c'est le seul outil qui permet aux mathématiciens de formuler des problèmes et de prouver des résultats en géométrie algébrique sans être en quelque sorte liés à leur intuition géométrique (c'était le problème qui a finalement fait dérailler la grande école italienne de géométrie algébrique classique). Les autres objets algébriques comme les variétés que vous connaissez peut-être mieux peuvent être retrouvés à partir des schémas [12].

Nous avons vu qu'une grande partie de la motivation pour la théorie géométrique des invariants provient de la construction d'espaces de modules, mais c'est aussi une théorie développée en soi, qui en termes plus algébriques étudie les actions des groupes algébriques réductifs. Un groupe algébrique G sur un corps k est un pré-schéma de groupe G/k qui est aussi un schéma algébrique. Kirwan a récemment étudié le problème de la généralisation de la théorie géométrique des invariants aux actions de groupes non réductifs. C'est une étape nécessaire, car de nombreux problèmes intéressants dans les théories des espaces de modules et des invariants classiques auxquels nous aimerions appliquer la théorie géométrique des invariants impliquent ce type d'action. Il y a quelques aspects clés

10. Brent Doran and Frances Kirwan, 'Towards non-reductive geometric invariant theory', Pure and Applied Mathematics Quarterly 1 (3) 61 – 105 (2007).

11. David Mumford, John Fogarty and Frances Kirwan, Geometric Invariant Theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), 23 (New York : Springer, 1994).

12. Anthony Knapp, Advanced Algebra (New York : Birkhäuser, 2007).

des actions réductives qui les rendent beaucoup plus agréables à manipuler. Par exemple, prenons une variété affine X avec une G-action réductive. S'il y a deux sous-variétés fermées G-invariantes disjointes Y_1 et Y_2 contenues dans X, alors il existe un invariant f dans l'anneau $k[X]^G$ tel que $f(Y_1) = 0$ et $f(Y_2) = 1$. Comme autre exemple, si X est une sous-variété affine G-invariante de $\mathbb{A}^n$ telle que G agit réductivement sur $\mathbb{A}^n$, alors étant donné $f \in k[X]^G$, ce f peut être étendu à un invariant F sur $\mathbb{A}^n$ et si I_X est l'idéal définissant de X, alors

$$k[X]^G = k[\mathbb{A}^n]^G / I_X \cap \mathbb{A}^n.$$

Comme autre exemple, si G est un groupe algébrique réductif agissant sur une variété affine $X = \mathrm{Spec}(A)$, alors A^G est une k-algèbre de type fini. Pour un dernier exemple, prenons G un groupe réductif comme ci-dessus agissant sur une variété affine ou projective. Dans ce cas, l'application quotient $q : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A^G)$ est une surjection, mais il est possible de construire un contre-exemple où le quotient d'une variété affine par une action de groupe non réductif n'est pas lui-même une variété affine (l'énoncé ci-dessus dit effectivement que dans le cas réductif, le quotient devrait également être affine).

Plus important encore, la théorie géométrique des invariants réductive permet souvent de calculer les sous-ensembles ouverts constitués de points stables et semi-stables, puisque dans le cas d'une action de groupe réductif sur une variété affine, il existe toujours une fonction invariante qui sépare deux sous-variétés G-invariantes fermées disjointes de X. Bien que de nombreuses propriétés échouent pour les actions non réductives, les groupes unipotents ont certaines caractéristiques intéressantes qui donnent une motivation pour la théorie géométrique des invariants non réductive en plus d'une plus grande généralité et applicabilité à un plus large éventail de problèmes (unipotent peut être lu ici comme non réductif). Comme exemples, toute orbite pour une action de groupe unipotent sur une variété quasi-affine est fermée, ce qui est utile car la théorie dont nous parlons ici ne distingue pas une orbite contenue dans une autre. De plus, tout espace homogène d'un groupe unipotent est isomorphe à un espace affine et un groupe unipotent connexe sur un corps de caractéristique zéro n'a pas de sous-groupes finis propres [13].

Kirwan a également étudié les liens entre la théorie géométrique des invariants et les applications moment en géométrie symplectique. La théorie des invariants géométriques classiques dans le cas de la géométrie algébrique complexe est liée à la réduction en géométrie symplectique. Commençons par un groupe de Lie compact et connexe G avec une algèbre de Lie g qui agit de manière lisse sur une variété symplectique (M, ω) par symplectomorphismes. L'application auto $\psi_g \colon M \to M$ est un symplectomorphisme pour tout $g \in G$ et on a que

$$\psi_{gh} = \psi_g \circ \psi_h, \psi_1 = \mathrm{Id}.$$

L'action infinitésimale nous donne un homomorphisme d'algèbres de Lie défini comme

$$X_\xi = \frac{d}{dt} \psi_{\exp(t\xi)},$$

pour $\xi \in g$ lorsque la dérivée est évaluée en $t = 0$. Comme ψ_g est un symplectomorphisme, il s'ensuit que X_ξ tel que défini ci-dessus est toujours un champ de vecteurs symplectique. L'action de G sur

13. Brent Doran and Frances Kirwan, 'Towards non-reductive geometric invariant theory', Pure and Applied Mathematics Quarterly 1 (3) 61 – 105 (2007).

M est appelée faiblement hamiltonienne si chacun des champs de vecteurs X_ξ est hamiltonien. Si nous avons une variété symplectique et une fonction lisse $f \in C^\infty(M)$, le champ de vecteurs hamiltonien de f est le champ de vecteurs défini comme

$$Xf = \bar{\omega}^{-1}(df),$$

où $\bar{\omega}$ est l'isomorphisme de fibré du fibré tangent vers son dual. Nous pourrions également écrire la fonction comme H pour indiquer qu'il s'agit d'une fonction hamiltonienne. Si M est une variété fermée, alors le champ de vecteurs XH génère une famille à un paramètre de difféomorphismes ϕ_H^ξ telle que

$$\frac{d}{dt}\phi_H^\xi = XH \circ \phi_H^\xi, \phi_H^0 = Id.$$

C'est ce qu'on appelle le flot hamiltonien associé à H et on peut montrer que H est constante le long du flot de XH et qu'en tout point régulier de H le champ de vecteurs hamiltonien est tangent aux ensembles de niveau de H. Pour un exemple visualisable, prenons H comme la fonction hauteur sur S^2. Les ensembles de niveau de cette fonction (c'est-à-dire les valeurs où elle est constante) sont des cercles de hauteur constante et la famille de difféomorphismes fait tourner chaque cercle à vitesse constante, donc le flot hamiltonien fait simplement tourner la sphère autour de son axe vertical (c'est un exemple d'action symplectique de cercle). L'action de G est hamiltonienne si l'application de ξ vers $H\xi$ peut être choisie comme un homomorphisme d'algèbres de Lie par rapport à la structure d'algèbre de Lie de g et à la structure de Poisson sur $C^\infty(M)$ [14].

Une application moment pour l'action de G sur M est une application lisse μ de M vers g^* qui est équivariante par rapport à cette action et à l'action coadjointe de G sur g^*. L'application doit également satisfaire la relation

$$d\mu(x)(\nu)\xi = \omega_x(\nu, X_\xi),$$

pour x un point de la variété et $\nu \in T_xM$. Le quotient $\mu^{-1}(0)/G$ a une structure symplectique et est connu sous le nom de réduction symplectique de M par l'action de G en 0 (ou alternativement, le quotient symplectique). Il y a certaines situations où le type de quotient que nous avons considéré en théorie géométrique des invariants $X//K$ peut être canoniquement identifié avec le quotient symplectique (cela peut arriver dans le cas d'une variété projective complexe non singulière X et K un groupe réductif complexe agissant via une représentation linéaire complexe) [15]. Un théorème de Kirwan dit que si l'on prend une variété symplectique sur laquelle agit un groupe de Lie avec une application moment μ, plus le quotient symplectique $\mu^{-1}(p)/G$ et l'anneau de cohomologie équivariante de M noté $H_G^*(M)$, alors l'application de Kirwan

$$H_G^*(M) \to H^*\left(\frac{\mu^{-1}(p)}{G}\right)$$

est une surjection sur les coefficients rationnels [16]. Si vous n'êtes pas familier avec la cohomologie équivariante, pensez à une cohomologie où l'on peut avoir des actions de groupe sur les espaces

14. Dusa McDuff and Dietmar Salamon, Introduction to Symplectic Topology (New York : Oxford University Press, 1998).

15. Frances Kirwan, 'Quotients by non-reductive algebraic group actions' (2008), arXiv :0801.4607v4.

16. Frances Kirwan, Cohomology of Quotients in Complex and Algebraic Geometry (Princeton : Princeton University Press, 1984).

pertinents.

Nous mentionnerons quelques autres résultats. Si l'on prend un groupe de Lie compact G et que l'on fixe un produit scalaire sur l'algèbre de Lie g, alors étant donné une action hamiltonienne du groupe sur une variété symplectique avec une application moment associée, le carré de la norme de cette application définit une certaine stratification de Morse de la variété par des sous-variétés symplectiques localement fermées telle que la strate à laquelle tout point de M appartient est déterminée par le comportement limite de sa trajectoire sous le flot de gradient par rapport à une métrique compatible. Kirwan a montré que l'on peut construire des quotients symplectiques de manière naturelle pour l'action du groupe sur les strates instables [17]. Avec Jeffrey, Kirwan a prouvé une formule de résidu qui permet d'évaluer des éléments de l'anneau de cohomologie $H^*\left(\frac{\mu^{-1}(0)}{G}\right)$ dont le degré est la dimension de $\mu^{-1}(0)/G$, à condition que 0 soit une valeur régulière de l'application moment. Les techniques utilisées dans la preuve de cette formule ont permis une nouvelle preuve de la formule de localisation non abélienne de Witten pour les actions hamiltoniennes de groupes compacts sur les variétés symplectiques [18].

17. Frances Kirwan, 'Symplectic quotients of unstable Morse strata for normsquares of moment maps' (2018), arXiv :1802.09237v1.

18. Lisa Jeffrey and Frances Kirwan, 'Localization for nonabelian group actions'. (Balliol College, Oxford :Technical Report, 1993).