1) Traduction de deux extraits des tables des Comptes-rendus de l'Académie des Sciences au sujet d'invariants proposés par Alain Connes pour les algèbres de von Neumann

46067
Connes, Alain :
Un nouvel invariant pour les algèbres de von Neumann.
C. r. Acad. Sci., Paris, Sér. A 273, 900-903 (1971).

L'auteur propose un nouvel invariant algébrique pour les algèbres σ-finies de von Neumann, qui est directement relié au développement récent des représentations standards des algèbres de von Neumann, initié par M. Tomita, et qui est spécialement adapté pour les facteurs de type III. Supposons que $\{\mathcal{M}, \mathfrak{H}\}$ est une algèbre de von Neumann avec des vecteurs cycliques et séparateurs. Soit $\mathfrak{S}$ dénotant l'ensemble de tous les vecteurs séparateurs et cycliques dans $\mathfrak{H}$ pour $\mathcal{M}$. À chaque $\alpha \in \mathfrak{S}$, il correspond de manière unique un opérateur modulaire Δ_α, auto-adjoint non singulier positif, qui donne naissance au groupe d'automorphismes modulaire de $\mathcal{M}$ associé à la fonctionnelle linéaire normale positive ω_α sur $\mathcal{M}$ donnée par $\omega_\alpha(x) = (x\alpha|\alpha), x \in \mathcal{M}$. Le nouvel invariant proposé par l'auteur est $S(\mathcal{M}) = \bigcap\limits_{\alpha\in\mathfrak{S}}$ (Spectrum de Δ_α). Évidemment, c'est un invariant algébrique. $S(\mathcal{M})$ est caractérisé comme l'ensemble de tous les $t \geq 0$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\alpha \in \mathfrak{S}$, il existe $x \in \mathcal{M}$ et $y \in \mathcal{M}$ avec les propriétés :

$$\|x_\alpha\| = 1, \quad \|t^{\frac{1}{2}}x\alpha - y\alpha\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|x^*\alpha - t^{\frac{1}{2}}y^*\alpha\| < \varepsilon.$$

L'auteur démontre que

(i) $S(\mathcal{M}) \subset \{0, 1\}$ si $\mathcal{M}$ est semi-finie ;

(ii) $S(\mathcal{M}_\lambda) = \{(1-2\lambda)^n/(1+2\lambda)^n \ : \ n = 0, \pm1, \pm2, ...\}$

si les $\mathcal{M}_\lambda$ sont les facteurs qui sont démontrés être non isomorphes par R. T. Powers [Ann. of Math., II. Ser. 86, 138-171 (1967, this Zbl. 157, 206)). Ceci est une nouvelle approche des types algébriques de facteurs de type III. Plus de développements dans cette direction seraient attendus.

M. Takesaki.

46068
Connes, Alain :
Calcul des deux invariants d'Araki et Woods par la théorie de Tomita et Takesaki.
C. r. Acad. Sci., Paris, Sér. A 274, 175-177 (1972).

L'auteur démontre que son nouvel invariant algébrique $S(\mathcal{M})$, défini dans l'article référencé ci-dessus, coïncide avec $r_\infty(\mathcal{M})$, l'ensemble de ratio asymptotique au sens de H. Araki et E. J. Woods [Publ. Res. Inst. math. Sci., Kyoto Univ., Ser. A4, 51-130 (1968, this Zbl. 206, 129)] si $\mathcal{M}$ est un

Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, mai 2025.

facteur ITPFI de type III. Il démontre de plus que si $\mathcal{N}$ est un facteur semi-fini σ-fini et si $\mathcal{M}_\lambda$ est un facteur hyperfini considéré dans l'article sus-mentionné, alors

$$S(\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}_\lambda) = S(\mathcal{M}_\lambda) = \left\{ \frac{(1-2\lambda)^n}{(1+2\lambda)^n} \quad : \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \right\}.$$

Par conséquent $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}_\lambda \neq \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}_\mu$ pour $\lambda \neq \mu$, ce qui montre immédiatement qu'il y a une quantité indénombrable de facteurs non hyperfinis non isomorphes de type III si on prend pour $\mathcal{N}$ le facteur construit à partir du groupe libre de deux générateurs. Il propose un autre invariant algébrique basé sur la période des groupes d'automorphismes modulaires d'un facteur.

M. Takesaki

2) Traduction d'un article d'Alain Connes et Erling Størmer au sujet des facteurs de type III

Journal d'analyse fonctionnelle 28, 187-196 (1978)

Homogénéité de l'espace des états des facteurs de type III_1

Alain Connes, Erling Størmer

Résumé : Un facteur M est de type III_1 si et seulement si l'action de son groupe unitaire sur son espace d'état par les automorphismes intérieurs est topologiquement transitive dans la topologie normique.

1. Introduction

Les états sur l'algèbre $M_n(\mathbb{C})$ des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{C}$ sont classifiés à équivalence unitaire près par la liste de leurs valeurs propres $(\lambda_j)_{j=1.....n}$, i.e. la liste des valeurs propres de la matrice de densité associée. Soit M un facteur de prédual séparable ; alors c'est un problème naturel que d'essayer et de classifier les états normaux de M à équivalence unitaire près, par exemple, $\phi_1 \sim \phi_2$ quand ϕ_2 est dans la fermeture normique de l'orbite de ϕ_1 selon les automorphismes intérieurs de M. Si M est de type $\neq \text{III}_1$, c'est un exercice facile, en utilisant les résultats sur le flot des poids de M que d'obtenir une telle classification. Si M est de type III_1, le flot de poids est trivial et on est amené à la conjecture (cf. [5]) que pour tout couple d'états normaux, les états sont topologiquement équivalents.

On prouve ce fait ci-dessous, et on obtient quelques conséquences faciles. La première est que M a la propriété L_λ de Powers [8] si et seulement si $\lambda/(1-\lambda) \in S(M)$. On montre alors que si M

Alain Connes : Université Paris VI, France, Erling Størmer : Université d'Oslo, Blindern, Oslo 3, Norvège
Communiqué par les éditeurs
Reçu le 22 septembre 1976.

est de type II ou III alors il existe un état normal fidèle sur M dont le centralisateur contient le facteur hyperfini. Ce dernier résultat rend très facile la preuve d'une conjecture de Dell'Antonio [6] dont l'effet est que les facteurs de type I sont les seuls facteurs dans lesquels la convergence faible d'une suite d'états normaux vers un état normal implique la convergence de norme de la séquence en question.

Pour démontrer le résultat principal, on étudie dans la section 2 l'information faussée $I(\phi, x)$ d'un opérateur x relative à un état ϕ. Si M est un facteur de type I et de trace Tr et si ϕ est l'état $\phi(x) = \mathrm{Tr}(hx)$, l'information faussée a été définie par Wigner et Yanase [9] comme la quantité $-\mathrm{Tr}([h^{1/2}, x]^2)$ quand x est auto-adjoint, et c'est une mesure de la distance à laquelle se trouve x de commuter avec ϕ.

2. Commutation des opérateurs avec états normaux

Soit M une algèbre de von Neumann de prédual séparable. M agit de façon standard sur $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}^\natural$ est le cône naturel associé à un certain vecteur cyclique et séparateur [1, 3, 10]. Soit J l'involution associée à $\mathcal{P}^\natural$. Si ϕ est une fonctionnelle normale positive linéaire sur M, soit ξ_0 l'unique vecteur dans $\mathcal{P}^\natural$ représentant ϕ : $\phi(x) = \langle x\xi_\phi, \xi_\phi\rangle, x \in M$. Quand ϕ est fidèle, appelons Δ_ϕ l'opérateur modulaire pour (M, ξ_ϕ). Pour estimer la commutativité de $x \in M$ avec ϕ, on utilise la quantité

$$I(\phi, x) = \frac{1}{2}\|(Jx^*J - x)\xi_\phi\|^2 \ ;$$

cf. [9]. Par construction $0 \leqslant I(\phi, x) \leqslant (\|x\|_\phi^\#)^2$, où $(\|x\|_\phi^\#)^2 = \|x\xi_\phi\|^2 + \|x^*\xi_\phi\|^2$. On liste quelques propriétés de $I(\phi, x)$ qui seront utilisées ci-dessous.

Proposition 1. *Soit ϕ comme ci-dessus. Alors*

(a) $I(\phi, xy)^{1/2} \leqslant I(\phi, x)^{1/2}\|y\| + \|x\|I(\phi, y)^{1/2}$, $x, y \in M$.

(b) $\|[\phi, x]\| \leqslant 2^{3/2}\phi(1)^{1/2}I(\phi, x)^{1/2}, x \in M$.

(c) Si ϕ est fidèle et $x \in M(\sigma^\phi, [(1-\delta)^2, (1+\delta)^2])$ où le sous-espace spectral est pris par rapport au groupe $\mathbb{R}_*^+$, alors $I(\phi, x) \leqslant \frac{1}{2}\delta^2(\|x\|_\phi)^2$.

(d) Soit e une projection dans le centralisateur M_ϕ de ϕ, alors $I(\phi^e, x) = I(\phi, x)$, où $\phi^e = \phi|M_e$ et $x \in M_e$.

(e) Soit e une projection dans M_ϕ, soit $x \in eM, y \in (1-e)M$. Alors $I(\phi, x+y) = I(\phi, x) + I(\phi, y)$.

(f) $|\|x\xi_\phi\| - \|x^*\xi_\phi\|| \leqslant (2I(\phi, x))^{1/2}$.

(g) Soit $\theta = \begin{pmatrix}\phi & 0\\ 0 & \phi\end{pmatrix}$ la fonctionnelle $\phi \otimes$ Trace sur M $\otimes M_2(\mathbb{C})$. Alors

$$I\left(\theta, \begin{pmatrix}0 & x^*\\ x & 0\end{pmatrix}\right) = 2I(\phi, x), x \in M.$$

(h) Étant donné $k = k^* \in M$, il existe une mesure finie positive μ sur $\mathbb{R}^2$ telle que pour toute fonction bornée réelle de Borel f sur $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} I(\phi, f(k)) &= \frac{1}{2} \int |f(x) - f(y)|^2 d\mu(x,y) \\ \phi(f(k)) &= \int f(x)\, d\mu = \int f(y)\, d\mu. \end{aligned}$$

Preuve. (a) Puisque $JMJ = M'$, on a

$$\|(J(xy)^*J - xy)\| \leqslant \|y\| \|(Jx^*J - x)\xi_\phi\| + \|x\| \|(Jy^*J - y)\xi_\phi\|.$$

(b) Si $y \in M$, on a

$$\begin{aligned} |[\phi, x](y)| &= |\langle xy\xi_\phi, \xi_\phi\rangle - \langle yx\xi_\phi, \xi_\phi\rangle| \\ &\leqslant |\langle y\xi_\phi, x^*\xi_\phi\rangle - \langle y\xi_\phi, Jx\xi_\phi\rangle| + |\langle yJx^*J\xi_\phi, \xi_\phi\rangle - \langle yx\xi_\phi, \xi_\phi\rangle| \\ &\leqslant 2\|y\| \|\xi_\phi\| \|(Jx^*J - x)\xi_\phi\|. \end{aligned}$$

(c) Soit $S = [(1-\delta)^2, (1+\delta)^2]$ et $x \in M(\sigma^\phi, S)$. Alors $x\xi_\phi$ appartient au domaine de la projection spectrale de Δ_ϕ correspondant à S, de telle façon que

$$(2I(\psi, x))^{1/2} = \|\Delta_\phi^{1/2} x\xi_\phi - x\xi_\phi\| \leqslant \sup_{\lambda \in S} |\lambda^{1/2} - 1| \|x\xi_\phi\|.$$

(d) Soit $x \in M_e$, et identifions x avec exe dans M. Puisque l'involution de $e\xi_\phi$ par rapport à M_e est eJe [3], et $Je\xi_\phi = e\xi_\phi$, on a

$$\begin{aligned} I(\phi^e, x) &= \tfrac{1}{2} \|((eJe)x^*(eJe) - x)\xi_\phi\|^2 \\ &= \tfrac{1}{2} \|Jex^*eJe\xi_\phi - x\xi_\phi\|^2 \\ &= \tfrac{1}{2} \|Jx^*\xi_\phi - x\xi_\phi\|^2 \\ &= I(\phi, x). \end{aligned}$$

(e) Comme dans (d) on a $eJx^*\xi_\phi = Jx^*Je\xi_\phi = Jx^*e\xi_\phi = Jx^*\xi_\phi$ quand $x \in eM$. Ainsi $e(x - Jx^*J)\xi_\phi = (x - Jx^*J)\xi_\phi$. De façon similaire, $(1-e)(y - Jy^*J)\xi_\phi = (y - Jy^*J)\xi_\phi$ pour $y \in (1-e)M$, et (e) s'ensuit.

(f) Utilisons que $|\|x\xi_\phi\| - \|x^*\xi_\phi\|| = |\|x\xi_\phi\| - \|Jx^*J\xi_\phi\|| \leqslant \|x\xi_\phi - Jx^*J\xi_\phi\|$.

(g) On a $\begin{pmatrix} 0 & x^* \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^* \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ commute avec θ, de telle façon que $I\left(\theta, \begin{pmatrix} 0 & x^* \\ x & 0 \end{pmatrix}\right) = I\left(\theta, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^* \end{pmatrix}\right) = 2I(\theta, x)$, en utilisant (d) et (e).

(h) Soit A et B des sous-ensembles de Borel de $\mathbb{R}$. Soit l_A, l_B leurs fonctions caractéristiques. Posons $\mu(A\times B) = \langle l_A(k)\xi_\phi, Jl_B(k)\xi_\phi\rangle$. Alors $\mu(A\times B)\geqslant 0$ puisque $Jl_B(k)Jl_A(k)\geqslant 0$, de telle façon qu'il existe une unique mesure positive μ sur $\mathbb{R}^2$ déterminée par ces valeurs sur les rectangles. Si f et g sont des fonctions de Borel réelles bornées sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\int f(x)g(y)d\mu(x,y) = \langle f(k)\xi_\phi, Jg(k)\xi_\phi\rangle,$$
$$\int f(x)d\mu(x,y) = \langle f(k)\xi_\phi, \xi_\phi\rangle = \langle \xi_\phi, Jf(k)\xi_\phi\rangle = \int f(y)d\mu(x,y).$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\|Jf(k)\xi_\phi - f(k)\xi_\phi\|^2 &= 2\|f(k)\xi_\phi\|^2 - 2\langle f(k)\xi_\phi, Jf(k)\xi_\phi\rangle\\ &= \int (f(x)^2 + f(y)^2 - 2f(x)f(y))d\mu(x,y)\end{aligned} \qquad \text{Q.E.D}$$

Ensuite, comme dans [4], on dénote par E_a la fonction caractéristique de l'intervalle $[a,+\infty)\subset\mathbb{R}$ pour chaque $a>0$. Pour $x\in M$, on pose $u_a(x) = u(x)E_a(|x|)$, où $x = u(x)|x|$ est la décomposition polaire de x. Soit da la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2. *Pour tout $\phi\in M_*^+$ et $x\in M$, on a :*

(a) $\displaystyle\int_0^\infty (\|u_{a^{1/2}}(x)\|_p hi^{\#})^2 da = (\|x\|_\phi^{\#})^2,$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty I(\phi, u_{a^{1/2}}(x))da \leqslant 6I(\phi,x)^{1/2}\|x\|_\phi^{\#}.$

Preuve. (a) On a $u_{a^{1/2}}(x)^*u_{a^{1/2}}(x) = E_{a^{1/2}}(|x|) = E_a(x^*x)$ et $\displaystyle\int_0^\infty E_a(x^*x)da = x^*x$. Puisque $u_{a^{1/2}}(x^*) = u_{a^{1/2}}(x)^*$, (a) est immédiat.

(b) D'abord remplaçons ϕ par $\theta = \begin{pmatrix}\phi & 0\\ 0 & \phi\end{pmatrix}$ et x par $\begin{pmatrix}0 & x^*\\ x & 0\end{pmatrix}$. On a

$$\begin{pmatrix}0 & x^*\\ x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & x^*\\ x & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^*x & 0\\ 0 & xx^*\end{pmatrix},$$

et donc

$$\left|\begin{pmatrix}0 & x^*\\ x & 0\end{pmatrix}\right| = \begin{pmatrix}|x| & 0\\ 0 & |x^*|\end{pmatrix}, \qquad u\left(\begin{pmatrix}0 & x^*\\ x & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & u(x)^*\\ u(x) & 0\end{pmatrix}.$$

Donc on a

$$u_a\left(\begin{pmatrix}0 & x^*\\ x & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & u(x^*)\\ u(x) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_a(x) & 0\\ 0 & E_a(|x^*|)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & u_a(x^*)\\ u_a(x) & 0\end{pmatrix}.$$

En utilisant la proposition 1(g) et le calcul de $\left\|\begin{pmatrix}0 & x^*\\ x & 0\end{pmatrix}\right\|_\theta^{\#}$, on voit que pour démontrer (b), on peut supposer que $x = x^*$. Alors par la proposition 1(h), on doit juste montrer qu'avec les fonctions de Borel $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F_a(t) = \mathrm{sign}(t)E_a(|t|)$, on a

$$\int_0^\infty \left(\int |F_{a^{1/2}}(x) - F_{a^{1/2}}(y)|^2 d\mu(x,y) \right) da$$

$$\leqslant 4 \left(\int |x-y|^2 d\mu(x,y) \right)^{1/2} \left[\left(\int |x|^2 d\mu(x,y) \right)^{1/2} + \left(\int |y|^2 d\mu(x,y) \right)^{1/2} \right]$$

pour toute mesure positive finie μ sur $\mathbb{R}^2$. Pour $\mathrm{sign}\, x = \mathrm{sign}\, y$, on a, puisque $E_{a^{1/2}}(x) = E_a(x^2)$,

$$\int |F_{a^{1/2}}(x) - F_{a^{1/2}}(y)|^2 da = \int |E_a(x^2) - E_a(y^2) da = |x-y|(|x|+|y|).$$

Pour $\mathrm{sign}\, x = -\mathrm{sign}\, y$, on a $|F_{a^{1/2}}(x) - F_{a^{1/2}}(y)|^2 \leqslant 2(E_a(x^2) + E_a(y^2))$, de telle façon que

$$\int |F_{a^{1/2}}(x) - F_{a^{1/2}}(y)|^2 da \leqslant 2(x^2+y^2) \leqslant 4(x-y)^2 = 4|x-y|(|x|+|y|).$$

L'inégalité souhaitée découle maintenant facilement de l'inégalité de Schwarz. Q.E.D.

Corollaire 3. *Soit $\phi \in M_*^+$ et $x \in M$ satisfaisant $x \neq 0, I(\phi,x) \leqslant \epsilon(\|x\|_\phi^\#)^2$. Alors il existe $a > 0$ tel que $v = u_a(x) \neq 0$ et $I(\phi, v) \leqslant 7\epsilon^{1/2}(\|v\|_\phi^\#)^2$.*

Preuve. Par hypothèse $I(\phi,x)^{1/2} \leqslant \epsilon^{1/2}\|x\|_\phi^\#$; par conséquent, par le théorème 2

$$\begin{aligned} \int I(\phi, u_{a^{1/2}}(x)) da &\leqslant 6\epsilon^{1/2}\|x\|_\phi^\# r \\ &= 6\epsilon^{1/2} \int (\|u_{a^{1/2}}(x)\|_\phi^\#)^2 da. \end{aligned}$$

Comme $x \neq 0$, il est impossible que

$$I(\phi, u_{a^{1/2}}(x)) \geqslant 7\epsilon^{1/2}(\|u_{a^{1/2}}(x)\|_\phi^\#)^2 \quad \text{pour tout} \quad a > 0;$$

d'où la conclusion.

3. Homogénéité de l'espace d'état des facteurs de type III_1

Il a été montré dans [5] que si M est un facteur de type III_1, de groupe unitaire U alors l'action de U par automorphismes intérieurs sur l'espace des poids de multiplicité infinie, offerte par une topologie naturelle, est topologiquement transitive, i.e. chaque poids a une orbite dense. De plus, il a été conjecturé que la même chose est vraie pour l'action de U sur l'ensemble des états normaux de M. On va démontrer le :

Théorème 4. *Soit M un facteur de type III_1 de prédual séparable. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ et ϕ et ψ des états normaux, il existe un unitaire u dans M tel que $\|\phi_u - \psi\| < \epsilon, (\phi_u(x) = \phi(u^*xu), x \in M)$.*

Avant de donner la preuve, fournissons quelques applications. Nos algèbres de von Neumann auront toujours des préduaux séparables. Notons d'abord que si $M \neq C$ est un facteur satisfaisant la conclusion du théorème alors il est facile de voir que $S(M) = \mathbb{R}_+$; cf. la preuve du prochain corollaire.

Corollaire 5. Soit $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$. Alors un facteur M a la propriété L_λ de Powers si et seulement si $\lambda/(1–\lambda) \in S(M)$.

Preuve. Par [8, p. 157], M a la propriété L_0 si et seulement si M est de type infini, par conséquent, si et seulement si $0 \in S(M)$. Si $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ par [2, Théorème 3.5.4 et Corollaire 3.7.7], tout ce qui reste à faire est de montrer que si M est de type III_1 alors M a la propriété L_λ. En utilisant un état de la forme $\omega_\lambda \otimes \phi$ sur $M_2(\mathbb{C}) \otimes M$, où $\omega_\lambda = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right)$, il est clair que la condition L_λ est satisfaite par un certain état sur M pour tout $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$, par conséquent, par tous les états, en utilisant l'homogénéité (Théorème 4).

Corollaire 6. *Une algèbre de von Neumann M agissant de façon standard sur un espace de Hilbert de dimension infinie $\mathcal{H}$ est un facteur de type* III_1 *si et seulement si le produit $\mathcal{U}\mathcal{U}'$ des groupes d'unitaires de M et M', respectivement, agit transitivement topologiquement sur la sphère unité dans $\mathcal{H}$.*

Preuve. La partie "si" est facile ; cf. la preuve du corollaire 5. Inversement, pour montrer que les vecteurs unités ξ et η étant donnés dans $\mathcal{H}$ et $\epsilon > 0$, il existe $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{U}'$ avec $\|uv\xi–\eta\| < \epsilon$, on peut supposer que ξ et η sont séparateurs et cycliques par [7] et que $\eta \in \mathcal{P}^\natural\xi$ par [2, lemme 3.5.5]. Alors on applique le théorème 4 aux états des vecteurs ω_ξ et ω_η.

Corollaire 7. *Soit $(M_\nu)_{\nu\in A}$ une famille dénombrable de facteurs de type* III_1. *Alors le produit tensoriel infini $\otimes_{\nu\in A}(M_\nu, \phi_\nu)$ est, à isomorphisme près, indépendant du choix de la suite (ϕ_ν), ϕ_ν étant un état normal de M_ν.*

Preuve. Immédiate par homogénéité.

Corollaire 8. *Soit R le facteur hyperfini et soit M un facteur non de type* I. *Alors il existe un état normal fidèle ϕ sur M dont le centralisateur contient R.*

Preuve. Quand M est semi-fini ou de type III_μ, $0 \leqslant \mu < 1$, la conclusion est facile (cf. [2]), donc on suppose que M est de type III_1. À partir de la preuve du corollaire 5, M a la propriété $L_{1/2}$, donc si ϕ_0 est un état normal de M alors il existe un sous-facteur K_0 de type I_2 de M tel que $\|\phi_0 - \phi_0 \,|\, K_0' \otimes \tau_{K_0}\| < \epsilon$ pour $\epsilon > 0$, où τ_{K_0} est la trace normalisée sur K_0, et $\phi \,|\, K_0'$ la restriction de ϕ_0 au commutant de K_0 dans M. La répétition de cette procédure donne une suite (ϕ_n, K_n), où ϕ_n est un état normal de M, les K_j sont des sous-facteurs I_2 commutant deux à deux de M, et les $K_1, ..., K_n$ appartiennent au centralisateur de ϕ_n. De plus, on peut supposer $\|\phi_n - \phi_{n+1}\| < 2^{-n}$; par conséquent, les ϕ_n convergent en norme vers un état normal ϕ. Par construction, l'algèbre de von Neumann K engendrée par les K_j est contenue dans le centralisateur de ϕ et par conséquent, c'est le facteur hyperfini R. Maintenant ϕ peut échouer à être fidèle, mais comme son support e

appartient au commutant relatif de K dans M, on obtient la conclusion du corollaire pour M_e. Puisque M est isomorphe à M_e, on est arrivé.

En suivant Dell'Antonio [6], un facteur M a *la propriété* U si toute suite d'états normaux de M qui converge faiblement vers un état normal converge déjà dans la topologie normique. Dell'Antonio a montré que tout facteur de type I a la propriété U et il a conjecturé la contraposée [6].

Corollaire 9. *Un facteur a la propriété U si et seulement s'il est de type* I.

Preuve. Soit M un facteur non du type I. Par le corollaire 8, il y a un état normal fidèle ϕ sur M dont le centralisateur M_ϕ contient le facteur hyperfini R. En composant les espérances canoniques de M sur M_ϕ et de M_ϕ sur R, on obtient une espérance normale Φ de M sur R. Puisque R n'a pas la propriété U [6], il y a une suite (ϕ_n) d'états normaux sur R qui converge faiblement vers un état normal mais pas en norme. Alors la suite $(\phi_n \cdot \Phi)$ a les mêmes propriétés dans M_*, donc M n'a pas la propriété U.

Notons que puisqu'on pourrait considérer une algèbre réduite M_e, le corollaire 9 reste vrai sans l'hypothèse que M_* est séparable.

On prouve maintenant deux lemmes qui seront importants pour la preuve du théorème 4.

Lemme 10. *Soit $\phi \in M_*^+$, où M est un facteur de type* III_1. *Soit $e', f' \in M_\phi$ des projections non nulles plus petites que le support de ϕ. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une isométrie partielle $u \neq 0$ dans M telle que $u^*u = e \leqslant e', uu^* = f \leqslant f'$ et*

(α) $I(\phi, u) \leqslant \epsilon(\|u\|_\phi^\#)^2$,

(β) $I(\phi, e) \leqslant \epsilon\phi(e), I(\phi, f) \leqslant \epsilon\phi(f)$.

Preuve. On peut supposer que ϕ est fidèle [7]. Puisque M est un facteur de type III_1, pour tout $\delta > 0$, il existe $x \neq 0$, $x \in M(\sigma^\phi, [1-\delta, 1+\delta]), x \in f'Me'$; voir [2, Sect. 2.1]. Maintenant, par le corollaire 3 et la proposition 1(c), on peut trouver une isométrie partielle $u \in f'Me'$ telle que $I(\phi, u) \leqslant \epsilon(\|u\|_\phi^\#)^2, u \neq 0$. Ensuite, par la proposition 1(f), on obtient, avec $u^*u = e, uu^* = f$, que

$$\begin{aligned} |\phi(e) - \phi(f)| &\leqslant |\phi(e)^{1/2} - \phi(f)^{1/2}|\ |\phi(e)^{1/2} + \phi(f)^{1/2}| \\ &\leqslant 2I(\phi, u)^{1/2}\ (\phi(e) + \phi(f))^{1/2} \\ &\leqslant 2\epsilon^{1/2}\ (\phi(e) + \phi(f)). \end{aligned}$$

Par conséquent, en supposant $\epsilon^{1/2} < \frac{1}{8}$, on obtient $\frac{1}{2}\phi(e) \leqslant \phi(f) \leqslant 2\phi(e)$. Par la proposition 1(a), on a $I(\phi, u^*u) \leqslant 4I(\phi, u) \leqslant 4\epsilon(\phi(e) + \phi(f))$. Par conséquent, ($\beta$) en découle. Q.E.D.

Lemme 11. *Soit $\xi \in \mathcal{P}^\natural$, et $e \in M$ une projection. Posons $\xi' = eJeJ\xi + (1-e)J(1-e)J\xi$. Alors*

(a) *ξ' appartient à $\mathcal{P}^\natural$ et avec une notation évidente, $\phi'(e) = \phi(e)|(\phi, e)$.*

(b) *Soit u une isométrie partielle dans M telle que $ue = u, eu = 0$. Alors $(\phi', u) \leqslant (\phi, u)$.*

Preuve. (a) À la fois $eJeJ\xi$ et $(1-e)J(1-e)J\xi$ appartiennent à $\mathcal{P}^\natural$ [3], donc $\xi' \in \mathcal{P}^\natural$. On a $\langle e\xi', \xi'\rangle = \langle eJeJ\xi, eJeJ\xi\rangle = \langle e\xi, JeJ\xi\rangle$, mais $I(\phi, e) = \phi(e) - \langle e\xi, JeJ\xi\rangle$.

(b) On a $(u - Ju^*J)eJeJ = uJeJ$, puisque $u^*e = 0$. Aussi, $(u - Ju^*J) \times (1-e)J(1-e)J = -(1-e)Ju^*J$. Ainsi $(u - Ju^*J)\xi' = JeJu\xi - (1-e) \times Ju^*J\xi = (1-e)JeJ(u - Ju^*J)\xi$ puisque $(1-e)u = u$ et $eu^* = u^*$. Puisque $\|(1-e)JeJ\| \leqslant 1$, (b) en découle. Q.E.D.

Preuve du théorème 4. Soit $\delta > 0, \delta \leqslant, \phi_0, \psi_0$, des états normaux fidèles de M et ξ_0, η_0 les vecteurs unitaires correspondant dans $\mathcal{P}^\natural$. Soit R l'ensemble de tous les triplets $r = (w, \alpha, \beta)$, où w est une isométrie partielle dans $M, \alpha, \beta \in$, et :

(a) Avec $a = w^*w, b = ww^*$, on a $a\alpha = \alpha, b\beta = \beta$.

(b) $\|\alpha\|^2 \leqslant \delta\phi_0(a), \|\beta\|^2 \leqslant \delta\psi_0(b)$.

(c) $\xi = \xi_0 - \alpha - J\alpha$ et $\eta = \eta_0 - \beta - J\beta$ appartiennent à $\mathcal{P}^\natural$ et $(a - JaJ)\xi = 0, (b - JbJ)\eta = 0, \|\xi\| \leqslant 1, \|\eta\| \leqslant 1$.

(d) Soit $\phi, \psi \in M_*^+$ correspondant à ξ, η, soit $\theta = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}$; alors $\overline{w} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}$ satisfait $I(\theta, \overline{w}) \leqslant \delta(\|\overline{w}\|_\theta^\#)^2$.

On définit un ordre partiel sur R en posant $r \leqslant r'$ quand

(1) w' est une extension de w (i.e. $w'a = w, w'^*b = w^*$),

(2) $a(\alpha' - \alpha) = 0, b(\beta' - \beta) = 0$,

(3) $\|\alpha' - \alpha\|^2 \leqslant \delta\phi_0(a' - a), \|\beta' - beta\|^2 \leqslant \delta\psi_0(b' - b)$.

Cette relation est transitive, en fait, si $r \leqslant r'$ et $r' \leqslant r''$ alors $a(\alpha'' - \alpha) = 0$ parce que $a'(\alpha'' - \alpha') = 0$ et $a \leqslant a'$. Aussi $\|\alpha'' - \alpha\|^2 = \|\alpha'' - \alpha'\|^2 + \|\alpha' - \alpha\|^2$ parce que $a'(\alpha' - \alpha) = \alpha' - \alpha$ alors que $a'(\alpha'' - \alpha') = 0$. Il découle de cela que $\leqslant$ est en effet un ordre partiel sur R.

Pour prouver l'existence d'un élément maximal dans R, on note que l'application $r = (w, \alpha, \beta) \to \phi_0(a)$ $(a = w^*w)$ est injective sur n'importe quel sous-ensemble totalement ordonné de R puisque $a = a'$ implique $r = r'$ dès que $r \leqslant r'$. Par conséquent, on a juste à montrer que toute suite croissante $(r_n)_{n\in N}$ dans R est majorée. Pour voir cela, posons $a = \lim_n a_n$, $b = \lim_n b_n$ dans la topologie forte. De plus, puisque les w_n sont des extensions les uns des autres, ils convergent dans la *-topologie forte vers une isométrie partielle w telle que $w^*w = a$, $ww^* = b$. Par (3), $\|\alpha_n - \alpha_m\|^2 \leqslant \delta\phi_0(a_m - a_n)$ dès que $n \leqslant m$. Donc $\alpha = \lim_n\alpha_n$, $\beta = \lim_n\beta_n$ existe, et par continuité, on a $r = (w, \alpha, \beta) \in R$. La relation $r_n \leqslant r$ pour tout n en découle aussi par continuité.

Maintenant, par le lemme de Zorn, soit $r = (w, \alpha, \beta)$ l'élément maximal de R. On suppose que $a = w^*w \neq 1$, $b = ww^* \neq 1$ et on obtiendra une contradiction.

Soit $e' = 1 - a$, $f' = 1 - b, \overline{e}' = \begin{pmatrix} e' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{f}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}$, et $\theta = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}$ où ϕ et ψ sont comme en (d). Par construction $\overline{e}'$ et $\overline{f}'$ commutent avec θ, de plus $\theta^{\overline{e}'}$ est identique à $\phi^{e'}$; $\phi^{e'}$ est représenté dans $\mathcal{P}^\natural$ par le vecteur $e'Je'J\xi = (1-a)J(1-a)J\xi = (1-a)J(1-a)J\xi_0$ parce que $\xi = \xi_0 - \alpha - J\alpha$ et $(1-a)\alpha = 0$. Puisque ξ_0 est séparateur et cyclique pour M, il s'ensuit que $\phi^{e'}$ qui correspond à $e'Je'J\xi_0$, est fidèle sur $M_{e'}$. En particulier $\overline{e}'$ est plus petit que le support θ. Similairement $f' \leqslant \text{support}\,\theta$. Ainsi, le lemme 10 nous donne une isométrie partielle de la forme $\overline{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}$ de support $\overline{u} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et support $\overline{u}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$, où $e \leqslant e'$, $f \leqslant f'$, $u^*u = e$, $uu^* = f$, et

(α) $I(\theta, \overline{u}) \leqslant (\delta/2)(\|\overline{u}\|_\theta^\#)^2$,

(β) $I(\phi, e) \leqslant (\delta/2)\phi(e)$, $I(\psi, f) \leqslant (\delta/2)\psi(f)$.

Comme e est orthogonal à a et f à b, on pose $w' = w + u$ et on obtient une isométrie partielle dans M étendant w. Soit $a' = a + e, b' = b + f$ étant, respectivement le support et le support atteint de w'. Soit $\alpha' = \alpha + eJ(1-e)J\xi$, $\beta' = \beta + fJ(1-f)J\eta$. On affirme que $r' = (w', \alpha', \beta') \in R$ et $r \leqslant r'$.

Clairement, (a) est vérifiée. Pour montrer (b), notons que $e(\alpha' - \alpha) = \alpha' - \alpha$, et donc $a(\alpha' - \alpha) = 0$ et α est orthogonal à $\alpha' - \alpha$. Mais $\|\alpha' - \alpha\|^2 = \|eJ(1-e)J\xi\|^2 = \|e(e - JeJ)\xi\|^2 \leqslant 2I(\phi, e)$. Puisque $\phi(e) = \phi^{e'}(e) = \langle e(1-a)J(1-a)J\xi_0, \langle (1-a)J(1-a)J\xi_0 \rangle = J(1-a)Je\xi_0 \rangle \leqslant \phi_0(e)$, on obtient par ($\beta$) $\|\alpha' - \alpha\|^2 \leqslant 2I(\phi, e) \leqslant \delta\phi(e) \leqslant \delta\phi_0(e) = \delta\phi_0(a' - a)$. Puisque α et $\alpha' - \alpha$ sont orthogonaux, on obtient (b). Pour montrer (c); soit $\xi' = \xi_0 - \alpha' - J\alpha'$ et $\eta' = \eta_0 - \beta' - J\beta'$. Alors $\xi' = \xi - eJ(1-e)J\xi - (1-e)JeJ\xi = eJeJ\xi + (1-e)J(1-e)\xi$, de telle façon que $\xi' \in \mathcal{P}^\natural$ et e commute avec ξ', i.e. $(e - JeJ)\xi' = 0$. Comme a commute avec ξ, on a $Ja\xi = a\xi$ et $a(1-e)JeJ\xi = Jea\xi = 0$. Ainsi, $a\xi = a\xi'$ et $(JaJ - a)\xi' = 0$, de telle façon que $(Ja'J - a')\xi' = 0$, et (c) en découle.

Pour montrer (d), soient ϕ' et ψ' dans M_*^+ correspondant à ξ' et η', respectivement, et soit $\theta' = \begin{pmatrix} \phi' & 0 \\ 0 & \phi' \end{pmatrix}$. Du précédent paragraphe, a commute avec ϕ' ; donc $\overline{a} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ commute avec θ' ainsi que $\overline{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Comme le support de $\overline{w} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}$ est contenu dans $\overline{a}$ et que celui de $\overline{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}$ est dans $1 - \overline{a}$, on obtient par la proposition 1(e) que

$$I(\theta', \overline{w} + \overline{u}) = I(\theta', \overline{w}) + I(\theta', \overline{u}).$$

Maintenant par construction $\overline{c} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ commute avec $\theta = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}$ et $\theta^{\overline{c}} = (\theta')^{\overline{c}}$, comme on peut le voir en utilisant $\phi^a = (\phi')^a$, $\psi^b = (\psi')^b$. Comme $\overline{w} \in (M \otimes M_2(\mathbb{C}))_{\overline{c}}$, on obtient donc par la proposition 1(d) et (d),

$$I(\theta', \overline{w}) = I(\theta, \overline{w}) \leqslant \delta(\|\overline{w}\|_\theta^\#)^2 = \delta(\|\overline{w}\|_\theta^{\prime\#})^2.$$

On affirme que $I(\theta', \overline{u}) \leqslant I(\theta, \overline{u})$. En effet, on peut appliquer le lemme 11(b) deux fois, puisque dans $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_4$, où $\mathcal{H}_4$ est l'espace de Hilbert des matrices 2×2 de Hilbert-Schmidt, le vecteur $\begin{pmatrix} \xi' & 0 \\ 0 & \eta' \end{pmatrix}$ s'obtient à partir de $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$ en appliquant les opérateurs $\overline{e}\widetilde{J}\overline{e}\widetilde{J} + (1-\overline{e})\widetilde{J}(1-\overline{e})\widetilde{J}$ et $\overline{f}\widetilde{J}\overline{f}\widetilde{J} + (1-\overline{f})\widetilde{J}(1-\overline{f})\widetilde{J}$, où $\widetilde{J} = J \otimes$ conjugaison complexe.

Ensuite, $(\|\overline{u}\|_\theta^\#)^2 = \phi(e) + \psi(f)$ et $(\|\overline{u}\|_\theta'^\#)^2 = \phi'(e) + \psi'(f)$ et par le lemme 11(a) et (β), on a $\phi'(e) \geqslant \frac{1}{2}\phi(e), \psi'(f) \geqslant \frac{1}{2}\psi(f)$ puisque $\delta \leqslant 1$. Donc on a

$$I(\theta', \overline{u}) \leqslant I(\theta, \overline{u}) \leqslant (\delta/2)(\|\overline{u}\|_\theta^\#)^2 \leqslant \delta(\|\overline{u}\|_\theta'^\#)^2$$

Puisque $(\|\overline{w}\|_\theta'^\#)^2 = (\|\overline{w}\|_\theta'^\#)^2 + (\|\overline{u}\|_\theta'^\#)^2$, on a donc

$$I(\theta', \overline{w}') = I(\theta', \overline{w}) + I(\theta', \overline{u}) \leqslant \delta(\|\overline{w}\|_\theta'^\#)^2 + \delta(\|\overline{u}\|_\theta'^\#)^2 = \delta(\|\overline{w}'\|_\theta'^\#)^2,$$

et (d) en découle.

Ainsi $r' \in R$ comme affirmé. À partir de la discussion ci-dessus, il est clair que $r \leqslant r'$ et $r \neq r'$. Ceci contredit la maximalité de r, de telle façon que soit w est une isométrie, soit c'est une co-isometrie. Par symétrie, on peut supposer que $w^*w = 1$ et poser que $\phi_1 = \phi$ et que ψ_1 est la réduite de ψ par $b = ww^*$. Par (b) et (c), on a

$$\|\phi_0 - \phi_1\| \leqslant \|\xi - \xi_0\| \leqslant 4\delta^{1/2} \;;$$

en particulier, $\theta(\overline{w}^*\overline{w}) = \phi(1) \geqslant 1 - 4\delta^{1/2}$. Par la Proposition 1 (f), $\theta(w\overline{w}\overline{w}^*)^{1/2} - \theta(w^*\overline{w})^{1/2}| \leqslant (2I(\theta, \overline{w}))^{1/2} \leqslant 2^{1/2}\delta^{1/2}\|\overline{w}\|_\theta^\# \leqslant 2\delta^{1/2}$. Donc $\psi(b)^{1/2} = \theta(\overline{w}\overline{w}^*)^{1/2} \geqslant \theta(\overline{w}^*\overline{w})^{1/2} - 2\delta^{1/2} \geqslant 1 - 6\delta^{1/2}$, et on a

$$\|\psi - \psi_1\| \leqslant 2\|b\eta – \eta\| = 2\psi(1-b)^{1/2} < 14\delta^{1/2}.$$

En particulier,

$$\|\psi_0 - \psi_1\| \leqslant \|\psi_0 - \psi\| + \|\psi - \psi_1\| < 4\delta^{1/2} + 14\delta^{1/2} = 18\delta^{1/2}.$$

Comme $I(\theta, \overline{w}) < 2\delta$, on a, découlant de la proposition 1 (b), que $|\theta(\overline{w}yy\overline{w})| \leqslant 8\delta^{1/2}\|y\|$ pour tout $y \in M \otimes M_2(\mathbb{C})$. Il en découle que $|\phi(xw) - \psi(wx)| \leqslant 8\delta^{1/2}\|x\|$ pour tout $x \in M$. En particulier, puisque $ww^* = b \in M_\psi$, on a

$$|\psi_1(w^*xw) – \psi_1(x) \leqslant 8\delta^{1/2}\|x\|, \quad x \in M.$$

Puisque M est de type III, les arguments standards montrent qu'on peut trouver une suite d'unitaires (v_n) dans M convergeant fortement vers w. Alors $v_n\xi \to w\xi$ in $\mathcal{H}$, de telle façon que pour n suffisamment grand, on a

$$|\phi_1(v_n^*xv_n) - \psi_1(x)| \leqslant 9\delta^{1/2}\|x\|, \quad x \in M.$$

Ainsi $\phi_0(v_n^*xv_n) – \psi_0(x)31\delta^{1/2}\|x\|, \quad x \in M$, et la preuve est terminée.

Références

1. H. Araki, Some properties of modular conjugation operator of von Neumann algebras and a noncommutative Radon Nikodym theorem, *Pacific J. Math.* 50 (1974), 309-354.
2. A. Connes, Une classification des facteurs de type III, *Ann. Sci. École Norm. Sup., Sér.* 6 4 (1973), 133-252.
3. A. Connes, Caractérization des algèbres de von Neumann comme espaces vectoriels ordonnes, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 26 (1974), 121-155.
4. A. Connes, Classification of injective factors, *Annals of Math.* 104 (1976), 73-115.
5. A. Connes, M. Takesaki, The flow of weights on factors of type III, to appear.
6. G. F. Dell'Antonio, On the limit of sequences of normal states, Comm. *Pure Appl. Math.* 20 (1967), 413-429.

7. J. Dixmier, O. Marechal, Vecteurs totalisateurs d'une algèbre de von Neumann, *Comm. Math. Phys.* 22 (1971), 44-50.
8. R. T. Powers, UHF algebras and their applications to representations of the anti-commutation relations, in "Cargèse Lectures in Physics, 1969" (D. Kastler, Ed.), Vol. 4, pp. 137-168, Gordon & Breach, New York/London/Paris, 1970.
9. E. P. Wigner, M. M. Yanase, Information contents of distributions, *Proc. Nat. Acad. Sci.* U.S.A. 49 (1963), 910-918.
10. S. L. Woronowicz, On the purification of factor states, *Comm. Math. Phys.* 28 (1972), 221-235.

Bulletin de la Société mathématique américaine
Volume 81, Numéro 6, Novembre 1975

Classification des automorphismes des facteurs hyperfinis de type II_1 et II_∞ et application aux facteurs de type III

A. Connes

Résumé. Pour tout entier $p = 0, 1, 2, \ldots$ et pour tout nombre complexe γ, $\gamma^p = 1$ ($\gamma = 1$ pour $p = 0$), on définit un automorphisme s_p^γ du facteur hyperfini de type II_1, R. Pour chaque automorphisme α de R, il existe un unique couple (p, γ) et un unitaire $v \in R$ tel que α est conjugué à $\mathrm{Ad}\, v \circ s_p^\gamma$. Soit $R_{0,1}$ le produit tensoriel de R par un facteur I_∞. Il existe, à conjugaison près, seulement un automorphisme θ_λ de $R_{0,1}$ tel que θ_λ multiplie la trace par λ, sous la condition que $\lambda \neq 1$.

Introduction. La classification des facteurs de type III que nous avons proposée dans [2] relie les classes d'isomorphismes des facteurs de type III_λ, $\lambda \in]0,1[$ aux les classes de conjugaison extérieures des automorphismes des facteurs de type II_∞. Une critique évidente de la valeur d'une telle relation est alors la suivante : est-il possible de classifier les automorphismes même pour le facteur le plus simple de type II_∞, notamment $R_{0,1}$, le produit tensoriel de R, l'hyperfini II_1, par un facteur I_∞. On répond à cette question dans le présent article, en montrant que pour tout $\lambda \in]0,1[$, il existe un automorphisme, à conjugaison près, de $R_{0,1}$ qui multiplie la trace par λ. La preuve de ce fait repose sur la classification des automorphismes du facteur hyperfini R (voir le théorème 1) qui en retour utilise principalement l'analogie entre la théorie ergodique classique et la théorie ergodique sur une algèbre de von Neumann non abélienne.

Automorphismes du facteur hyperfini de type II_1. Rappelons que si M est un facteur et $\theta \in \mathrm{Aut} M$, on définit la période extérieure $p_0(\theta)$ comme la période de θ modulo les automorphismes intérieurs (i.e. $\theta^k \in \mathrm{Int}\, M \iff k \in p_0(\theta)Z$). Aussi, l'obstruction de θ, notée $\gamma(\theta)$, est la racine de l'unité dans $\mathbf{C}$ telle que $(\theta^{p_0} = \mathrm{Ad}\, v, v \text{ unitaire dans } M) \implies \theta(v) = \gamma v$. Finalement α et $\beta \in \mathrm{Aut} M$ sont conjugués extérieurs ssi β est conjugué au produit de α par un automorphisme intérieur.

Théorème 1 *Deux automorphismes α, β de R sont conjugués extérieurs si et seulement si $p_0(\alpha) = p_0(\beta)$ et $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.*

Communiqué par I. M. Singer, 10 avril 1975

En particulier, n'importe quels deux automorphismes apériodiques α, β de R sont conjugués extérieurs. Cela découle d'un analogue du théorème de Rokhlin. Dans le cas où $p_0(\alpha) \neq 0$, la preuve utilise le produit tensoriel comme une structure de groupe sur l'ensemble $Br(Z/p, R)$ des classes de conjugaison extérieures de α avec $p_0(\alpha) = p$ (voir [5]). Pour $p \neq 0$ et $\gamma \in \mathbf{C}, \gamma^p = 1$, il y a, à conjugaison près, seulement un automorphisme s_p^γ de R de période p, d'ordre γ et d'invariants p, γ. Cet automorphisme s_p^γ a été décrit dans [4], [5]. Pour $p = 0$, on dénote par s_0 le décalage bilatéral R quand R s'écrit $R = \bigotimes_{\nu \in Z}(R_1)$, avec R_1 isomorphe à R.

Le théorème 1 signifie qu'à conjugaison près, tout automorphisme de R est le produit d'un s_p^γ par un automorphisme intérieur.

Corollaire 2. *Le groupe* $\mathrm{Out}\, R = \mathrm{Aut}\, R/\mathrm{Int}\, R$ *a un sous-groupe normal non trivial.*

En particulier, le centre de $\mathrm{Out}\, R$ est trivial, contrairement à ce qui se passe pour n'importe quels facteurs de type III [2, 1.2.8b].

Le corollaire 2 signifie que R ne peut pas se décomposer d'une manière significative et invariante en objets plus simples.

Corollaire 3. *Soit N une algèbre de von Neumann finie engendrée par une sous-algèbre de von Neumann hyperfinie P et un unitaire U, $UPU^* = P$, alors N est hyperfinie.*

On montre, en utilisant le théorème 1, que tout automorphisme α de P engendre le même groupe complet [2, 1.5.4] qu'un automorphisme β tel que pour une certaine suite croissante de sous-algèbres de dimension finie $K_\nu, \nu \in N$, de P, on a $\beta(_\nu) = K_\nu$, pour tout ν, et $\bigcup_{\nu=1}^\infty K_\nu$ dense dans P. Alors, on remplace U, $\mathrm{Ad}\, U/P = \alpha$ par un unitaire $V \in N$ tel que $\mathrm{Ad}\, V/P = \beta$.

Avec le corollaire 3, on peut alors démontrer un résultat dû à Golodets quand N est proprement infini (voir [6]).

Corollaire 4. *Soit P une algèbre de von Neumann hyperfinie et G un groupe résoluble d'unitaires dans $L(H)$ tel que $vPv^* = P$ pour tout $v \in G$; alors $(P \cup G)''$ est hyperfini.*

En particulier, toute représentation d'un groupe résoluble engendre une algèbre de von Neumann hyperfinie.

Automorphismes du facteur hyperfini connu de type II_∞. Soit N un facteur de type II_∞, τ une trace normale semi-finie fidèle sur N, $\theta \in \mathrm{Aut}\, N$; alors on appelle l'unique $\lambda \in R_+^*$ tel que $\tau \circ \theta = \lambda\tau$ le module de $\theta : \lambda = \mathrm{mod}\, \theta$.

Théorème 5. *Soit $R_{0,1} = R \otimes L(H)$ le facteur hyperfini connu de type* II_∞. *Pour tout $\lambda \in R_+^*, \lambda \neq 1$, il y a à conjugaison près seulement un $\theta \in \mathrm{Aut} R_{0,1}$ de module égal à λ.*

Aussi, deux automorphismes α, β ou $R_{0,1}$, de modules égaux à 1, sont conjugués extérieurs ssi ils ont la même période extérieure et la même obstruction.

Corollaire 6. *Un automorphisme $\theta \in \operatorname{Aut} R_{0,1}$ est un commutateur $\theta = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ pour $\alpha, \beta \in \operatorname{Aut} R_{0,1}$ si et seulement si son module est égal à 1.*

Corollaire 7. *Soit M un facteur de type III_λ, et $M = W^*(\theta, N)$ sa décomposition discrète [2, Théorème 4.4.1]. Alors M est isomorphe au facteur de Powers R_λ ssi N est isomorphe à $R_{0,1}$.*

Bibliographie

1. A. Connes, W. Krieger, *Outer conjugacy of noncommutative Bernouilli shifts* (to appear).
2. ___________, *Une classification des facteurs de type* III, Ann. Sci. École Norm Sup. (4) 2. 6 (1973), 133-252.
3. ___________, *On hyperfinite factors of type* III_0*, and Krieger's factors*, J. Functional 3. Analysis (to appear).
4. ___________, *A factor not antiisomorphic to itself*, Bull. London Math. Soc. (to appear).
5. ___________, *Periodic automorphisms of the* II_1 *hyperfinite factor*, Queen's preprint, 1974-25.
6. A. Connes, P. Ghez, R. Lima, D. Testard and E. J. Woods, Analyse de *Crossed products of von Neumann algebras* (article de Golodets).

Département de mathématiques, Université de la Reine, Kingston, Ontario, Canada