

Une nouvelle preuve que plus des 2/3 des zéros de la fonction zêta de Riemann sont simples et sur la droite critique

Youness Lamzouri

Université de Lorraine, CNRS, IECL, F-54000 Nancy, France

Résumé

Nous obtenons une nouvelle preuve, conceptuellement plus simple et inconditionnelle, que plus de 67,25% des zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann sont simples et sur la droite critique, et qu'au moins 83,62% des zéros non triviaux sont distincts. Une preuve de ces résultats a été produite très récemment par une version de recherche interne de Claude développée par Anthropic, puis vérifiée par Alpöge et Furman. Cet argument est techniquement complexe, et son mécanisme principal n'est pas immédiatement transparent. Il combine plusieurs ingrédients d'algèbre linéaire, incluant une représentation matricielle de dimension finie de la forme hermitienne de Weil et une inégalité rang-trace pour les matrices hermitiennes, avec un calcul de second moment sur les zéros utilisant la formule explicite. Notre nouvelle preuve est plus courte et procède en remplaçant l'intégralité du cadre matriciel de dimension finie par une inégalité dans un espace de Hilbert, ce qui permet une application directe du théorème de Montgomery sur la corrélation des paires de zéros de la fonction zêta, dans la forme inconditionnelle obtenue par Baluyot, Goldston, Suriajaya et Turnage-Butterbaugh.¹

1 Introduction

L'hypothèse de Riemann (RH) est l'un des problèmes ouverts centraux des mathématiques et l'un des sept problèmes du Prix du Millénaire. Cette conjecture, formulée par Riemann en 1859, affirme que tous les zéros non triviaux² de la fonction zêta de Riemann se trouvent sur la droite critique $\text{Re}(s) = 1/2$. Sa vérité aurait des applications considérables en théorie des nombres, notamment pour notre compréhension de la distribution des nombres premiers.

Soit $\rho = \beta + i\gamma$ un zéro non trivial de la fonction zêta de Riemann, et soit m_ρ sa multiplicité. Nous écrivons

$$N(T) := \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T}} 1,$$

où les zéros sont comptés avec multiplicité. La formule classique de Riemann–von Mangoldt donne $N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log T$, lorsque $T \rightarrow \infty$. En l'absence d'une preuve de l'hypothèse de Riemann, un problème fondamental a été de déterminer quelle proportion des zéros peut être montrée comme se trouvant sur la droite critique. Les premiers progrès dans cette direction remontent à Hardy [15], qui a prouvé en 1914 qu'une infinité de zéros se trouvent sur la droite $\text{Re}(s) = 1/2$. Hardy et Littlewood [16] ont ensuite montré que le nombre de ces zéros jusqu'à la hauteur T est $\gg T$. Une avancée fondamentale a été réalisée par Selberg [22], qui a été le pionnier de l'utilisation de la mollification dans ce problème et a prouvé en 1942 qu'une proportion positive des zéros se trouve sur la droite critique. En 1974, Levinson [18] a introduit une nouvelle méthode de mollificateur et

1. Traduction par l'ia deepseek de l'article sur arxiv ici <https://arxiv.org/pdf/2609.02882>.

2. C'est-à-dire les zéros situés dans la bande critique $0 \leq \text{Re}(s) \leq 1$.

l'a utilisée pour prouver que plus d'un tiers des zéros se trouvent sur la droite critique. Conrey [9] a ensuite développé la méthode de Levinson et a prouvé en 1989 que plus des 2/5 des zéros sont simples et se trouvent sur la droite critique. Plus récemment, Pratt, Robles, Zaharescu et Zeindler [21] ont obtenu les bornes légèrement meilleures

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_0(T)}{N(T)} \geq 0,417293 \quad \text{et} \quad \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_0^s(T)}{N(T)} \geq 0,407511,$$

où

$$N_0(T) := \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T \\ \beta = 1/2}} 1 \quad \text{et} \quad N_0^s(T) := \left| \left\{ \rho : 0 < \gamma \leq T, \beta = \frac{1}{2}, \text{ et } m_\rho = 1 \right\} \right|,$$

où les zéros dans la définition de $N_0(T)$ sont comptés avec multiplicité. Nous notons également

$$N_d(T) := |\{\rho : 0 < \gamma \leq T\}|$$

le nombre de zéros distincts jusqu'à la hauteur T .

En 1973, Montgomery [19] a établi son théorème de corrélation des paires pour les zéros de la fonction zêta et l'a utilisé pour prouver, en supposant RH, qu'au moins 2/3 des zéros sont simples. Montgomery et Taylor (voir [20]) ont ensuite obtenu la proportion plus grande

$$C_0 := \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0,6725007 \dots, \quad (1.1)$$

et celle-ci a été améliorée à 0,6792 par Chirre, Gonçalves et de Laat [7]. Par une méthode différente, Conrey, Ghosh et Gonek [8] ont prouvé, en supposant RH et l'hypothèse de Lindelöf généralisée (GLH), qu'au moins $\frac{19}{27} = 0,7037 \dots$ des zéros de zêta sont simples, et qu'au moins 0,8456 des zéros sont distincts. Bui et Heath-Brown [5] ont ensuite supprimé GLH de ce résultat et ont obtenu la proportion 19/27 en supposant uniquement RH. De manière inconditionnelle, Farmer [10] a prouvé que plus de 63,952% des zéros sont distincts. Cette proportion a été améliorée par Ki et Lee [17, Théorème 5], qui ont prouvé que plus de 70% des zéros sont distincts.

Plus récemment, des progrès substantiels ont été réalisés pour supprimer l'hypothèse de Riemann de l'argument de corrélation des paires de Montgomery. Aryan [2] a obtenu une forme inconditionnelle de la formule de corrélation des paires pour le noyau de Fejér et a montré que la borne de Montgomery 2/3 pour les zéros simples découle d'une hypothèse de densité des zéros. Baluyot, Goldston, Suriajaya et Turnage-Butterbaugh [3] ont ensuite établi une version inconditionnelle du théorème de corrélation des paires de Montgomery et, sous des hypothèses plus faibles que RH, ont prouvé qu'au moins 61,7% des zéros sont simples. Dans un travail ultérieur [4], ils ont montré pour la première fois que la méthode de corrélation des paires peut également fournir des informations sur la distribution horizontale des zéros. Plus précisément, ils ont prouvé que si tous les zéros avec $T < \gamma \leq 2T$ satisfont $|\beta - \frac{1}{2}| < \frac{b}{2 \log T}$, alors au moins 2/3 des zéros sont simples et sur la droite critique lorsque $b = 0,3185$, tandis que pour $b = 0,001$ la proportion correspondante est d'au moins 0,6725. Goldston et Suriajaya [13, 14] ont ensuite clarifié le mécanisme derrière ces résultats. De plus, étendant des travaux antérieurs de Gallagher et Mueller [12], Goldston, Lee, Schettler et Suriajaya [11] ont montré que la conjecture complète de corrélation des paires de Montgomery, sans supposer RH, implique asymptotiquement que 100% des zéros sont simples et sur la droite critique. Le but de cet article est de donner une nouvelle preuve du résultat suivant, qui a été très récemment annoncé par une version de recherche interne de Claude, développée par Anthropic, et ensuite vérifiée par Alpöge et Furman [1].

Théorème 1.1. *Nous avons*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_0^s(T)}{N(T)} \geq C_0 = 0,67250\dots \quad \text{et} \quad \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_d(T)}{N(T)} \geq C_1 := \frac{C_0 + 1}{2} = 0,83625\dots,$$

où C_0 est défini en (1.1). Autrement dit, plus de 67,25% des zéros non triviaux de la fonction zêta sont simples et sur la droite critique, et plus de 83,62% sont distincts.

Nous comparons brièvement notre preuve avec l’argument découvert par Claude et vérifié par Alpöge et Furman [1]. Leur preuve part de la forme hermitienne de Weil et la restreint à une famille finie de fonctions test, produisant une matrice symétrique réelle de dimension asymptotique à $N(T)$. Ils évaluent ensuite sa trace et la somme des carrés de ses entrées (c’est-à-dire le carré de sa norme de Hilbert-Schmidt) et combinent ces estimations avec une inégalité rang-trace. À cette fin, ils séparent la partie de la matrice provenant des zéros simples sur la droite critique du reste. L’inégalité rang-trace donne alors une borne inférieure pour le nombre de zéros simples sur la droite critique en fonction de $N(T)$, de la trace de la matrice et du carré de sa norme de Hilbert-Schmidt. Notre preuve adopte une approche différente et plus directe. Nous évitons complètement la construction matricielle de dimension finie et remplaçons la partie algèbre linéaire de l’argument par une seule inégalité dans un espace de Hilbert. Cela réduit le problème directement à une estimation d’une somme de corrélation des paires sur les zéros de la fonction zêta, à laquelle nous appliquons le théorème de corrélation des paires de Montgomery dans la forme inconditionnelle obtenue par Baluyot, Goldston, Suriajaya et Turnage-Butterbaugh (voir le Lemme 5 de [3]).

Bien que les deux preuves soient assez différentes, elles réduisent toutes deux l’information pertinente à l’estimation d’une certaine forme quadratique sur les zéros. En ce sens, les deux peuvent être considérées comme des variantes d’un argument de second moment, et l’optimisation conduit dans les deux cas au même problème extremal de Montgomery–Taylor (voir la Remarque 3.4 ci-dessous), ce qui explique pourquoi les mêmes constantes apparaissent dans les deux preuves.

Remerciements

L’auteur est particulièrement reconnaissant à Brian Conrey, Daniel Goldston, Steve Gonek, Andrew Granville, Micah Milinovich et Gérald Tenenbaum pour avoir attentivement lu une version antérieure du manuscrit et pour leurs précieux commentaires. Il remercie également Kannan Sundararajan pour ses suggestions utiles, et Ade Irma Suriajaya pour ses commentaires et discussions. L’auteur est soutenu par une chaire junior de l’Institut Universitaire de France. L’auteur est également reconnaissant à Ken Ono et à l’équipe d’Axiom Math pour leur enthousiasme et pour avoir produit, dans des délais très courts et suite à l’achèvement de ce travail, les certificats formels Lean décrits dans l’annexe A. L’auteur a utilisé des outils d’IA pour l’aider dans les recherches bibliographiques et l’édition linguistique. Toute suggestion fournie par ces outils a été vérifiée de manière indépendante par l’auteur. Tout le contenu mathématique et les arguments sont de l’auteur.

2 La proposition clé

Puisque les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann sont comptés avec multiplicité, nous travaillerons avec des multi-ensembles plutôt qu’avec des ensembles de zéros. L’argument classique

de Montgomery dans [19], qui montre qu'au moins $2/3$ des zéros de la fonction zêta sont simples en supposant RH, repose sur l'inégalité de base suivante

$$\sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T \\ m_\rho = 1}} 1 \geq \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T}} (2 - m_\rho) = 2 \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T}} 1 - \sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \rho = \rho'}} 1, \quad (2.1)$$

qui est vraie inconditionnellement. Par conséquent, on réduit le problème à l'obtention d'une borne supérieure pour la contribution diagonale du membre droit de (2.1). Si RH est supposée, on a

$$\sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \rho = \rho'}} 1 \leq \sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T}} K \left((\gamma - \gamma') \frac{\log T}{2\pi} \right) \frac{4}{4 + (\gamma - \gamma')^2}, \quad (2.2)$$

pour tout noyau K tel que $K(0) = 1$ et $K(u) \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Montgomery calcule ensuite cette somme de corrélation des paires avec K étant le noyau de Fejér $K(u) = \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \right)^2$. Les tentatives récentes d'utiliser cette approche de manière inconditionnelle reposaient sur une certaine forme de positivité pour K lorsqu'elle est évaluée sur des différences de zéros non triviaux pouvant se trouver en dehors de la droite critique. Dans [4], Baluyot, Goldston, Suriajaya et Turnage-Butterbaugh ont réalisé cela en utilisant un noyau de Tsang dont la partie réelle est positive dans une bande horizontale fixe. Après une mise à l'échelle par $\log T/(2\pi)$, cette positivité ne s'applique que si l'on suppose que tous les zéros non triviaux jusqu'à la hauteur T se trouvent dans une bande très étroite de la forme $|\beta - 1/2| \leq c/\log T$. Cette restriction ne peut pas être levée simplement en cherchant un meilleur noyau. En effet, pour que la méthode ci-dessus fonctionne sans aucune information sur les parties réelles des zéros, il faudrait que le noyau K satisfasse $\operatorname{Re} K(z) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Cependant, aucun noyau entier non constant de ce type n'existe.

Notre idée clé est que l'on peut contourner l'inégalité (2.1) et prouver directement, pour une large classe de noyaux K , que le nombre d'éléments réels simples d'un multi-ensemble fini $\mathcal{Z}$ invariant par conjugaison complexe est

$$\geq 2 \sum_{z \in \mathcal{Z}} 1 - \sum_{z, s \in \mathcal{Z}} K(z - s)^2,$$

sans exiger que les termes hors diagonale individuels $K(z - s)^2$ soient non négatifs.

Pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ à support compact, nous définissons sa transformée de Fourier $\hat{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i \xi u} du, \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{C}. \quad (2.3)$$

Notons qu'il s'agit d'une fonction entière puisque f est à support compact. Pour un élément z d'un multi-ensemble fini $\mathcal{Z}$, nous désignons par m_z sa multiplicité. Nous disons qu'un multi-ensemble fini $\mathcal{Z}$ est *invariant par conjugaison complexe* si pour tout $z \in \mathcal{Z}$ nous avons $\bar{z} \in \mathcal{Z}$ et $m_{\bar{z}} = m_z$. Nous prouvons la proposition clé suivante.

Proposition 2.1. *Soient $\lambda > 0$ un nombre réel et $\eta \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction paire à valeurs réelles avec $\operatorname{supp}(\eta) \subset (-\lambda, \lambda)$, telle que $\widehat{\eta^2}(0) = 1$. Soit $\mathcal{Z}$ un multi-ensemble fini non vide de nombres complexes invariant par conjugaison complexe. Pour $z \in \mathcal{Z}$, nous notons m_z sa multiplicité dans $\mathcal{Z}$. Alors nous avons*

$$\sum_{\substack{z \in \mathcal{Z} \cap \mathbb{R} \\ m_z = 1}} 1 \geq 2 \sum_{z \in \mathcal{Z}} 1 - \sum_{z, s \in \mathcal{Z}} K(z - s)^2, \quad (2.4)$$

où K est le noyau $K(\xi) := \widehat{\eta^2}(\xi)$. De plus, le nombre d'éléments distincts de $\mathcal{Z}$ est

$$\geq \frac{3}{2} \sum_{z \in \mathcal{Z}} 1 - \frac{1}{2} \sum_{z, s \in \mathcal{Z}} K(z - s)^2. \quad (2.5)$$

Nous observons que la version inconditionnelle de la formule de corrélation des paires (voir le Lemme 3.1 ci-dessous) produit la somme pondérée contenant un facteur supplémentaire $4/(4 - (\rho - \rho')^2)$, plutôt que la forme quadratique non pondérée qui apparaît dans la Proposition 2.1. Une modification supplémentaire de la fonction test sera utilisée dans la Section 3 pour supprimer ce poids.

Preuve de la Proposition 2.1. Pour tout $z \in \mathcal{Z}$, nous définissons les fonctions $f_z, g_z, h_z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$f_z(u) := \eta(u)e^{-2\pi iuz}, \quad g_z(u) := \frac{f_z(u) + f_{\bar{z}}(u)}{2}, \quad \text{et} \quad h_z(u) = \frac{f_z(u) - f_{\bar{z}}(u)}{2i}. \quad (2.6)$$

Alors $g_{\bar{z}} = g_z$, $h_{\bar{z}} = -h_z$ et $f_z = g_z + ih_z$. De plus, nous observons que

$$K(z - \bar{s}) = \widehat{\eta^2}(z - \bar{s}) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \eta(u)e^{-2\pi izu} \eta(u)e^{2\pi i\bar{s}u} du = \int_{-\lambda}^{\lambda} f_z(u) \overline{f_s(u)} du. \quad (2.7)$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$ nous avons

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} |f_x(u)|^2 du = K(0) = 1, \quad (2.8)$$

et

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\lambda}^{\lambda} f_z(u) \overline{f_{\bar{z}}(u)} du = \operatorname{Re} \int_{-\lambda}^{\lambda} (g_z(u) + ih_z(u)) (\overline{g_z(u)} + i\overline{h_z(u)}) du \\ &= \int_{-\lambda}^{\lambda} |g_z(u)|^2 du - \int_{-\lambda}^{\lambda} |h_z(u)|^2 du. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Maintenant, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, nous définissons

$$F(u, v) := \sum_{z \in \mathcal{Z}} f_z(u) f_z(v).$$

Puisque $\mathcal{Z}$ est invariant par conjugaison complexe, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{z, s \in \mathcal{Z}} K^2(z - s) &= \sum_{z, s \in \mathcal{Z}} K^2(z - \bar{s}) = \sum_{z, s \in \mathcal{Z}} \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} f_z(u) \overline{f_s(u)} du \right)^2 \\ &= \sum_{z, s \in \mathcal{Z}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} f_z(u) f_z(v) \overline{f_s(u)} \overline{f_s(v)} du dv = \int_{-\lambda}^{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} |F(u, v)|^2 du dv. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments réels distincts de $\mathcal{Z}$, et soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses éléments non réels distincts. Nous divisons en outre l'ensemble $\mathcal{R}$ en deux sous-ensembles disjoints $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, où $\mathcal{R}_1$ est l'ensemble des éléments réels simples de $\mathcal{Z}$, et $\mathcal{R}_2$ est l'ensemble des éléments qui sont réels et ont une multiplicité ≥ 2 . Puisque $\mathcal{Z}$ est invariant par conjugaison complexe, nous pouvons lister les éléments de ces ensembles comme

$$\mathcal{R}_1 = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad \mathcal{R}_2 = \{x_{n+1}, \dots, x_{n+r}\}, \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \{z_1, \bar{z}_1, \dots, z_k, \bar{z}_k\}.$$

En regroupant les éléments non réels par paires de conjugués complexes, nous déduisons que

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{\ell=1}^{n+r} m_{x_\ell} f_{x_\ell}(u) f_{x_\ell}(v) + \sum_{\ell=1}^k m_{z_\ell} (f_{z_\ell}(u) f_{z_\ell}(v) + f_{\bar{z}_\ell}(u) f_{\bar{z}_\ell}(v)) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+r} m_{x_\ell} f_{x_\ell}(u) f_{x_\ell}(v) + 2 \sum_{\ell=1}^k m_{z_\ell} (g_{z_\ell}(u) g_{z_\ell}(v) - h_{z_\ell}(u) h_{z_\ell}(v)). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nous considérons maintenant les sous-espaces de dimension finie emboîtés suivants de l'espace de Hilbert $L^2((-\lambda, \lambda), \mathbb{C})$, muni de son produit scalaire usuel $\langle f, g \rangle = \int_{-\lambda}^{\lambda} f(u) \overline{g(u)} du$:

$$U = \text{Vect}(f_{x_{n+1}}, \dots, f_{x_{n+r}}, g_{z_1}, \dots, g_{z_k}), \quad V = \text{Vect}(f_{x_1}, \dots, f_{x_{n+r}}, g_{z_1}, \dots, g_{z_k}),$$

et

$$W = \text{Vect}(f_{x_1}, \dots, f_{x_{n+r}}, g_{z_1}, \dots, g_{z_k}, h_{z_1}, \dots, h_{z_k}).$$

Nous posons également

$$D_U := \dim U, \quad D_V := \dim V \quad \text{et} \quad D_W := \dim W.$$

On peut observer que toutes les fonctions f_{x_ℓ}, g_{z_ℓ} et h_{z_ℓ} satisfont la propriété suivante

$$\overline{\Phi}(u) = \Phi(-u). \quad (2.12)$$

De plus, si Φ_1 et Φ_2 satisfont (2.12), alors

$$\begin{aligned} \langle \overline{\Phi_1}, \overline{\Phi_2} \rangle &= \int_{-\lambda}^{\lambda} \overline{\Phi_1(u)} \overline{\Phi_2(u)} du = \int_{-\lambda}^{\lambda} \Phi_1(-u) \overline{\Phi_2(-u)} du, \\ &= \int_{-\lambda}^{\lambda} \Phi_1(u) \overline{\Phi_2(u)} du = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \end{aligned} \quad (2.13)$$

par un simple changement de variables.

Nous appliquons maintenant le processus standard de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormale $(\psi_1, \dots, \psi_{D_W})$ de W , telle que $(\psi_1, \dots, \psi_{D_U})$ soit une base pour U et $(\psi_1, \dots, \psi_{D_V})$ soit une base pour V . Puisque la famille génératrice originale satisfait (2.12), l'identité (2.13) montre par induction que tous les coefficients de Gram-Schmidt sont réels. Par conséquent, chaque ψ_j satisfait également (2.12), et donc tous les coefficients de produit scalaire apparaissant ci-dessous sont réels. De plus, les fonctions $\Psi_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, définies par $\Psi_j(u, v) = \psi_j(u) \psi_j(v)$, sont orthonormales dans $L^2((-\lambda, \lambda)^2, \mathbb{C})$. En effet, pour $1 \leq j, \ell \leq D_W$, nous avons

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} \psi_j(u) \psi_j(v) \overline{\psi_\ell(u)} \overline{\psi_\ell(v)} du dv = \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} \psi_j(u) \overline{\psi_\ell(u)} du \right)^2.$$

Par conséquent, par l'inégalité de Bessel, nous obtenons

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} |F(u, v)|^2 du dv \geq \sum_{j=1}^{D_W} |\alpha_j|^2, \quad (2.14)$$

où

$$\begin{aligned}
\alpha_j &:= \int_{-\lambda}^{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} F(u, v) \overline{\psi_j(u) \psi_j(v)} du dv \\
&= \sum_{\ell=1}^{n+r} m_{x_\ell} \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} f_{x_\ell}(u) \overline{\psi_j(u)} du \right)^2 \\
&\quad + 2 \sum_{\ell=1}^k m_{z_\ell} \left(\left(\int_{-\lambda}^{\lambda} g_{z_\ell}(u) \overline{\psi_j(u)} du \right)^2 - \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} h_{z_\ell}(u) \overline{\psi_j(u)} du \right)^2 \right). \tag{2.15}
\end{aligned}$$

et où la dernière identité découle de (2.11). Notons que α_j est réel d'après (2.13).

Pour prouver (2.4) et (2.5), nous établirons les bornes inférieures correspondantes pour la somme $\sum_{1 \leq j \leq D_W} \alpha_j^2$. À cette fin, nous divisons cette somme en trois parties $1 \leq j \leq D_U$, $D_U + 1 \leq j \leq D_V$ et $D_V + 1 \leq j \leq D_W$. Nous supposons que ces trois plages sont non vides, sinon la somme correspondante sera simplement 0.

Nous commençons par prouver (2.4).

D'abord, nous traitons la deuxième plage car elle est la plus facile. Ici, nous utilisons uniquement l'inégalité très basique $a^2 + 1 \geq 2a$, valable pour tous les nombres réels a , pour obtenir

$$\sum_{j=D_U+1}^{D_V} \alpha_j^2 \geq 2 \sum_{j=D_U+1}^{D_V} \alpha_j - (D_V - D_U) \geq 2 \sum_{j=D_U+1}^{D_V} \alpha_j - \sum_{\substack{z \in \mathcal{Z} \cap \mathbb{R} \\ m_z=1}} 1, \tag{2.16}$$

puisque $\sum_{\substack{z \in \mathcal{Z} \cap \mathbb{R} \\ m_z=1}} 1 = n \geq D_V - D_U$.

Maintenant, pour la première plage, nous utilisons l'inégalité basique $a^2 + 4 \geq 4a$, valable pour tous les nombres réels a . Ceci donne

$$\sum_{j=1}^{D_U} \alpha_j^2 \geq 4 \sum_{j=1}^{D_U} \alpha_j - 4D_U. \tag{2.17}$$

Soit $1 \leq j \leq D_U$. Puisque $f_{x_\ell} \in U$ pour tout $n+1 \leq \ell \leq n+r$ et $g_{z_d} \in U$ pour tout $1 \leq d \leq k$, alors par le théorème de Parseval et (2.8) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{D_U} \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} f_{x_\ell}(u) \overline{\psi_j(u)} du \right)^2 &= \int_{-\lambda}^{\lambda} |f_{x_\ell}(u)|^2 du = K(0) = 1, \\
\text{et } \sum_{j=1}^{D_U} \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} g_{z_d}(u) \overline{\psi_j(u)} du \right)^2 &= \int_{-\lambda}^{\lambda} |g_{z_d}(u)|^2 du.
\end{aligned}$$

De plus, par l'inégalité de Bessel, nous avons

$$\sum_{j=1}^{D_U} \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} h_{z_\ell}(u) \overline{\psi_j(u)} du \right)^2 \leq \int_{-\lambda}^{\lambda} |h_{z_\ell}(u)|^2 du,$$

pour tout $1 \leq \ell \leq k$. En combinant les trois estimations ci-dessus avec la définition de α_j dans

(2.15) ainsi que les identités (2.8) et (2.9), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{D_U} \alpha_j &= \sum_{\ell=1}^{n+r} m_{x_\ell} \sum_{j=1}^{D_U} \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} f_{x_\ell}(u) \overline{\psi_j(u)} du \right)^2 \\
&\quad + 2 \sum_{\ell=1}^k m_{z_\ell} \left(\sum_{j=1}^{D_U} \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} g_{z_\ell}(u) \overline{\psi_j(u)} du \right)^2 - \sum_{j=1}^{D_U} \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} h_{z_\ell}(u) \overline{\psi_j(u)} du \right)^2 \right) \\
&\geq \sum_{\ell=n+1}^{n+r} m_{x_\ell} + 2 \sum_{\ell=1}^k m_{z_\ell} \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} |g_{z_\ell}(u)|^2 du - \int_{-\lambda}^{\lambda} |h_{z_\ell}(u)|^2 du \right) \geq 2(r+k) \geq 2D_U,
\end{aligned}$$

puisque $m_{x_\ell} \geq 2$ pour tout $n+1 \leq \ell \leq n+r$. En insérant cette borne inférieure dans (2.17), il vient

$$\sum_{j=1}^{D_U} \alpha_j^2 \geq 2 \sum_{j=1}^{D_U} \alpha_j. \quad (2.18)$$

Enfin, dans la dernière plage $D_V + 1 \leq j \leq D_W$, les fonctions ψ_j sont orthogonales à V et donc à toutes les f_{x_ℓ} et g_{z_ℓ} . Par conséquent, nous obtenons de (2.15) que

$$\alpha_j = -2 \sum_{\ell=1}^k m_{z_\ell} \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} h_{z_\ell}(u) \overline{\psi_j(u)} du \right)^2 \leq 0.$$

Par conséquent, nous avons trivialement

$$\sum_{j=D_V+1}^{D_W} \alpha_j^2 \geq 2 \sum_{j=D_V+1}^{D_W} \alpha_j. \quad (2.19)$$

En sommant les inégalités (2.16), (2.18) et (2.19) et en utilisant (2.14), nous dérivons

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} |F(u, v)|^2 du dv \geq \sum_{j=1}^{D_W} \alpha_j^2 \geq 2 \sum_{j=1}^{D_W} \alpha_j - \sum_{\substack{z \in \mathcal{Z} \cap \mathbb{R} \\ m_z=1}} 1. \quad (2.20)$$

Enfin, il reste à estimer la somme $\sum_{1 \leq j \leq D_W} \alpha_j$. En utilisant la définition de α_j dans (2.15) avec le théorème de Parseval et les identités (2.8) et (2.9), nous trouvons que

$$\sum_{j=1}^{D_W} \alpha_j = \sum_{\ell=1}^{n+r} m_{x_\ell} + 2 \sum_{\ell=1}^k m_{z_\ell} = \sum_{z \in \mathcal{Z}} 1. \quad (2.21)$$

En insérant cette identité dans (2.20) et en la combinant avec (2.10), la preuve de (2.4) est achevée. Nous établissons maintenant (2.5). En utilisant notre notation ci-dessus, le nombre d'éléments distincts de $\mathcal{Z}$ est $n+r+2k$. Nous procéderons de manière similaire à la preuve de (2.4), mais nous modifierons notre traitement pour les première et deuxième plages $1 \leq j \leq D_U$ et $D_U+1 \leq j \leq D_V$. Dans la première plage, nous utilisons (2.17) qui implique

$$\sum_{j=1}^{D_U} \alpha_j^2 \geq 4 \sum_{j=1}^{D_U} \alpha_j - 4(k+r). \quad (2.22)$$

Pour la deuxième plage $D_U + 1 \leq j \leq D_V$, nous remarquons que ψ_j est orthogonal à U et donc par (2.15) nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{j=D_U+1}^{D_V} \alpha_j &= \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=D_U+1}^{D_V} \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} f_{x_\ell}(u) \overline{\psi_j(u)} du \right)^2 - 2 \sum_{\ell=1}^k m_{z_\ell} \sum_{j=D_U+1}^{D_V} \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} h_{z_\ell}(u) \overline{\psi_j(u)} du \right)^2 \\ &\leq \sum_{\ell=1}^n \int_{-\lambda}^{\lambda} |f_{x_\ell}(u)|^2 du = n, \end{aligned}$$

par l'inégalité de Bessel et (2.8). En combinant ceci avec (2.16), nous obtenons

$$\sum_{j=D_U+1}^{D_V} \alpha_j^2 \geq 2 \sum_{j=D_U+1}^{D_V} \alpha_j - n \geq 4 \sum_{j=D_U+1}^{D_V} \alpha_j - 3n. \quad (2.23)$$

Enfin, dans la dernière plage $D_V + 1 \leq j \leq D_W$, nous utilisons que $\alpha_j \leq 0$ ce qui implique l'inégalité triviale

$$\sum_{j=D_V+1}^{D_W} \alpha_j^2 \geq 4 \sum_{j=D_V+1}^{D_W} \alpha_j. \quad (2.24)$$

En sommant les inégalités (2.22), (2.23) et (2.24), nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{D_W} \alpha_j^2 \geq 4 \sum_{j=1}^{D_W} \alpha_j - 3n - 4(k+r).$$

D'autre part, par (2.21), nous avons

$$\sum_{j=1}^{D_W} \alpha_j = \sum_{z \in \mathcal{Z}} 1 \geq n + 2r + 2k.$$

Ainsi, nous déduisons que

$$\sum_{j=1}^{D_W} \alpha_j^2 \geq 4 \sum_{z \in \mathcal{Z}} 1 - 3n - 4(k+r) \geq 3 \sum_{z \in \mathcal{Z}} 1 - 2(n+r+2k).$$

En combinant ceci avec (2.10) et (2.14), nous obtenons

$$n + r + 2k \geq \frac{3}{2} \sum_{z \in \mathcal{Z}} 1 - \frac{1}{2} \sum_{z, s \in \mathcal{Z}} K(z-s)^2,$$

comme souhaité. □

3 Preuve du Théorème 1.1

Pour les nombres complexes z avec $|\operatorname{Re}(z)| < 2$, nous définissons

$$w(z) := \frac{4}{4 - z^2}.$$

Nous utiliserons la formule de corrélation des paires inconditionnelle suivante établie par Baluyot, Goldston, Suriajaya et Turnage-Butterbaugh dans [3]. Sa preuve suit le même argument que la preuve originale de Montgomery sous RH [19], tandis qu'une forme inconditionnelle du cas particulier correspondant au noyau de Fejér a été obtenue précédemment par Aryan [2].

Lemme 3.1 (Lemme 5 de [3]). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction paire à valeurs réelles avec support dans $[-1, 1]$, et supposons que f est lipschitzienne en $x = 0$ (c'est-à-dire $f(x) - f(0) = O(|x|)$ quand $x \rightarrow 0$). Alors nous avons*

$$\sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T}} \widehat{f}\left(i(\rho - \rho') \frac{\log T}{2\pi}\right) w(\rho - \rho') = \frac{T}{2\pi} \log T \left(f(0) + 2 \int_0^1 \alpha f(\alpha) d\alpha + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log T}}\right) \right).$$

Pour combiner la Proposition 2.1 avec la formule de corrélation des paires du Lemme 3.1, nous devons supprimer le poids $w(\rho - \rho')$.

En effet, soit $\eta \in C_c^\infty((-1/2, 1/2))$ une fonction paire à valeurs réelles telle que $\widehat{\eta^2}(0) = 1$. Définissons $K := \widehat{\eta^2}$ et $Q := \eta^2 * \eta^2$, où, ici et dans la suite, nous définissons

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x - u) du$$

pour toutes $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{Q} = K^2$ et Q est supportée dans $[-1, 1]$. Par conséquent, une application directe du Lemme 3.1 donne une formule asymptotique pour la somme pondérée

$$\sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T}} K\left(i(\rho - \rho') \frac{\log T}{2\pi}\right)^2 w(\rho - \rho').$$

D'autre part, pour utiliser la Proposition 2.1, nous devons estimer la somme correspondante sans le facteur $w(\rho - \rho')$. Ce facteur ne peut pas être supprimé en appliquant directement le Lemme 3.1 à une fonction test différente. En effet, en écrivant $z = i(\rho - \rho') \frac{\log T}{2\pi}$, nous avons

$$w(\rho - \rho') = \left(1 + \frac{\pi^2 z^2}{(\log T)^2}\right)^{-1}.$$

Ainsi, l'identité

$$K(z)^2 = \widehat{f}(z)w(\rho - \rho')$$

nécessiterait

$$\widehat{f}(z) = \left(1 + \frac{\pi^2 z^2}{(\log T)^2}\right) K(z)^2,$$

qui dépend de T . Par conséquent, le Lemme 3.1 ne peut pas être appliqué directement à une telle fonction test sans un argument d'uniformité supplémentaire. Pour surmonter cela, nous exprimons le noyau désiré comme une combinaison linéaire de deux fonctions tests fixes auxquelles le Lemme 3.1 peut être appliqué séparément.

Lemme 3.2. *Posons*

$$C_{\text{MT}} := \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1,3274992963206\dots \quad (3.1)$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction paire à valeurs réelles $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty((-1/2, 1/2))$ telle que, pour le noyau $K_\varepsilon(z) := \widehat{\eta_\varepsilon^2}(z)$, nous ayons $K_\varepsilon(0) = 1$, et

$$\sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T}} K_\varepsilon\left(i(\rho - \rho') \frac{\log T}{2\pi}\right)^2 = \left(C_{\eta_\varepsilon} + O_\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{\log T}}\right)\right) \frac{T}{2\pi} \log T,$$

où $|C_{\eta_\varepsilon} - C_{\text{MT}}| < \varepsilon$.

Remarque 3.3. Avant de prouver le lemme, nous le comparons brièvement avec la formulation correspondante dans la preuve de Claude [1]. Posons $L = \log(T/(2\pi))$, $\gamma_\rho = -i(\rho - \frac{1}{2})$, et $\psi(u) = \cos(\sqrt{2}u)$. Choisissons une fonction de coupure lisse χ telle que $\chi(u) = 0$ pour $u \leq 0$ et $\chi(u) = 1$ pour $u \geq 1$. Définissons $\phi(u) = \chi(\frac{L}{2} + u) \chi(\frac{L}{2} - u) \psi(u/L)^{1/2}$, et $\alpha_k = T + 2\pi k/L$, pour $0 \leq k < d := \lfloor LT/(2\pi) \rfloor$. Alors la formule de second moment utilisée dans [1] prend la forme (voir le Théorème 5.7 de [1])

$$\frac{1}{a^2 L^4} \sum_{0 \leq k, k' < d} \left(\sum_{\substack{\rho \\ \operatorname{Re}(\gamma_\rho) \in [T - \sqrt{T}, 2T + \sqrt{T}]}} m_\rho \hat{\phi}\left(\frac{\gamma_\rho - \alpha_k}{2\pi}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\gamma_\rho - \alpha_{k'}}{2\pi}\right) \right)^2 = (C_{\text{MT}} + o(1)) \frac{T}{2\pi} \log T,$$

où $a = \frac{1}{L} \int_{\mathbb{R}} \phi(u)^2 du$.

Preuve du Lemme 3.2. Soit $I = [-1/2, 1/2]$ et définissons

$$f_0(x) := \begin{cases} \frac{\cos(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2} \sin(1/\sqrt{2})} & \text{si } x \in I, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $|\sqrt{2}x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in I$, la fonction f_0 est strictement positive sur I . De plus, f_0 est à valeurs réelles et paire, et nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2} \sin(1/\sqrt{2})} \int_{-1/2}^{1/2} \cos(\sqrt{2}x) dx = 1.$$

Pour $0 < \delta < 1/4$, soit $\psi_\delta \in C_c^\infty((-1/2, 1/2))$ une fonction paire telle que $0 \leq \psi_\delta \leq 1$ et $\psi_\delta(x) = 1$ pour $|x| \leq \frac{1}{2} - \delta$. Posons

$$A_\delta := \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(x)^2 f_0(x) dx.$$

Nous définissons maintenant

$$\eta_\delta(x) := \frac{\psi_\delta(x) \sqrt{f_0(x)}}{\sqrt{A_\delta}} \quad \text{et} \quad f_\delta(x) := \eta_\delta(x)^2 = \frac{\psi_\delta(x)^2 f_0(x)}{A_\delta}.$$

Puisque f_0 est lisse et strictement positive sur $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, il s'ensuit que $\eta_\delta, f_\delta \in C_c^\infty((-1/2, 1/2))$. De plus, η_δ et f_δ sont à valeurs réelles et paires, $f_\delta \geq 0$, et

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\delta(x) dx = 1.$$

Par conséquent, si $K_\delta(z) := \widehat{f_\delta}(z) = \widehat{\eta_\delta^2}(z)$, alors $K_\delta(0) = 1$. Nous définissons maintenant $Q_\delta := f_\delta * f_\delta$. Puisque $f_\delta \in C_c^\infty((-1/2, 1/2))$, nous avons $Q_\delta \in C_c^\infty((-1, 1))$. En particulier, Q_δ et Q_δ'' sont des fonctions paires à valeurs réelles supportées dans $[-1, 1]$, et les deux sont lipschitziennes en 0. Ainsi, les deux fonctions satisfont les hypothèses du Lemme 3.1.

De plus, nous avons $\widehat{Q_\delta}(z) = \widehat{f_\delta}(z)^2 = K_\delta(z)^2$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Nous définissons maintenant

$$r_{\delta, T} := Q_\delta - \frac{Q_\delta''}{4(\log T)^2}. \tag{3.2}$$

Puisque Q_δ est lisse et à support compact, deux intégrations par parties donnent

$$\widehat{Q}_\delta''(z) = (2\pi iz)^2 \widehat{Q}_\delta(z) = -4\pi^2 z^2 K_\delta(z)^2.$$

Par conséquent, nous dérivons

$$\widehat{r}_{\delta,T}(z) = \left(1 + \frac{\pi^2 z^2}{(\log T)^2}\right) K_\delta(z)^2,$$

et donc

$$\widehat{r}_{\delta,T}\left(i(\rho - \rho')\frac{\log T}{2\pi}\right) = \left(1 - \frac{(\rho - \rho')^2}{4}\right) K_\delta\left(i(\rho - \rho')\frac{\log T}{2\pi}\right)^2.$$

Ainsi, nous déduisons que

$$\begin{aligned} K_\delta\left(i(\rho - \rho')\frac{\log T}{2\pi}\right)^2 &= \widehat{r}_{\delta,T}\left(i(\rho - \rho')\frac{\log T}{2\pi}\right) w(\rho - \rho') \\ &= \widehat{Q}_\delta\left(i(\rho - \rho')\frac{\log T}{2\pi}\right) w(\rho - \rho') - \frac{1}{4(\log T)^2} \widehat{Q}_\delta''\left(i(\rho - \rho')\frac{\log T}{2\pi}\right) w(\rho - \rho'), \end{aligned} \quad (3.3)$$

par (3.2) et la linéarité de la transformée de Fourier.

De plus, par le Lemme 3.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T}} \widehat{Q}_\delta\left(i(\rho - \rho')\frac{\log T}{2\pi}\right) w(\rho - \rho') \\ = \frac{T}{2\pi} \log T \left(Q_\delta(0) + 2 \int_0^1 \alpha Q_\delta(\alpha) d\alpha + O_\delta\left(\frac{1}{\sqrt{\log T}}\right) \right), \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T}} \widehat{Q}_\delta''\left(i(\rho - \rho')\frac{\log T}{2\pi}\right) w(\rho - \rho') \\ = \frac{T}{2\pi} \log T \left(Q_\delta''(0) + 2 \int_0^1 \alpha Q_\delta''(\alpha) d\alpha + O_\delta\left(\frac{1}{\sqrt{\log T}}\right) \right). \end{aligned}$$

En combinant ces estimations avec (3.3), nous dérivons

$$\sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T}} K_\delta\left(i(\rho - \rho')\frac{\log T}{2\pi}\right)^2 = \frac{T}{2\pi} \log T \left(Q_\delta(0) + 2 \int_0^1 \alpha Q_\delta(\alpha) d\alpha + O_\delta\left(\frac{1}{\sqrt{\log T}}\right) \right).$$

Maintenant, en écrivant

$$C_\delta := Q_\delta(0) + 2 \int_0^1 \alpha Q_\delta(\alpha) d\alpha,$$

et $Q_0 := f_0 * f_0$, nous avons

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} C_\delta = Q_0(0) + 2 \int_0^1 \alpha Q_0(\alpha) d\alpha = C_{\text{MT}},$$

puisque $f_\delta \rightarrow f_0$ dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, et où le dernier calcul a été effectué par Montgomery et Taylor (voir [20]).

Ainsi, nous pouvons choisir $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $|C_\delta - C_{\text{MT}}| < \varepsilon$. Nous fixons un tel δ , et posons $\eta_\varepsilon := \eta_\delta$, $K_\varepsilon := K_\delta$ et $C_{\eta_\varepsilon} := C_\delta$. Ceci achève la preuve. $\square$

Remarque 3.4. Il découle du Corollaire 14 de Carneiro, Chandee, Littmann et Milinovich [6] que $C_{\eta_\varepsilon} \geq C_{\text{MT}}$. La fonction extrémale correspondante a été identifiée à l'origine par Montgomery et Taylor [20]. Avec la construction précédente, cela montre que C_{MT} est la constante optimale que l'on peut obtenir avec notre méthode.

Preuve du Théorème 1.1. Fixons $\varepsilon > 0$, et soient η_ε , K_ε et C_{η_ε} donnés par le Lemme 3.2. Pour $T \geq 20$, soit $\mathcal{Z}_T$ le multi-ensemble fini

$$\mathcal{Z}_T := \left\{ i \left(\rho - \frac{1}{2} \right) \frac{\log T}{2\pi} : 0 < \gamma \leq T \right\},$$

où chaque zéro ρ apparaît avec sa multiplicité. L'équation fonctionnelle de la fonction zêta implique que $1 - \bar{\rho}$ est un zéro avec la même multiplicité que ρ . De plus,

$$\overline{i \left(\rho - \frac{1}{2} \right) \frac{\log T}{2\pi}} = i \left(1 - \bar{\rho} - \frac{1}{2} \right) \frac{\log T}{2\pi}.$$

Ainsi, $\mathcal{Z}_T$ est invariant par conjugaison complexe. De plus, un élément de $\mathcal{Z}_T$ est réel si et seulement si le zéro correspondant satisfait $\beta = 1/2$, et il est simple si et seulement si ce zéro est simple. Par conséquent, la Proposition 2.1 donne

$$N_0^s(T) \geq 2N(T) - \sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T}} K_\varepsilon \left(i(\rho - \rho') \frac{\log T}{2\pi} \right)^2,$$

et

$$N_d(T) \geq \frac{3}{2}N(T) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T}} K_\varepsilon \left(i(\rho - \rho') \frac{\log T}{2\pi} \right)^2.$$

Par le Lemme 3.2, nous avons

$$\sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T}} K_\varepsilon \left(i(\rho - \rho') \frac{\log T}{2\pi} \right)^2 = \left(C_{\eta_\varepsilon} + O_{\eta_\varepsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{\log T}} \right) \right) \frac{T}{2\pi} \log T.$$

Par conséquent, nous déduisons que

$$\frac{N_0^s(T)}{N(T)} \geq 2 - C_{\eta_\varepsilon} + o_{\eta_\varepsilon}(1), \quad \text{et} \quad \frac{N_d(T)}{N(T)} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}C_{\eta_\varepsilon} + o_{\eta_\varepsilon}(1).$$

Puisque $|C_{\eta_\varepsilon} - C_{\text{MT}}| < \varepsilon$, nous obtenons

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_0^s(T)}{N(T)} \geq 2 - C_{\text{MT}} - \varepsilon, \quad \text{et} \quad \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_d(T)}{N(T)} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}C_{\text{MT}} - \varepsilon.$$

Enfin, en faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, la preuve est achevée. $\square$

A Certificat formel par AxiomProver

AxiomProver, un système d’IA actuellement en développement par Axiom Math, a généré de manière autonome (à partir du langage naturel) un certificat formel inconditionnel pour la Proposition 2.1. En utilisant la Proposition 2.1, un certificat formel a également été généré de manière autonome pour le Théorème 1.1 sous les hypothèses du [3, Lemme 5] (voir le Lemme 3.1 ci-dessus) et de l’asymptotique standard de Riemann–von Mangoldt $N(T) \sim \frac{1}{2\pi} T \log T$ (voir [23, Théorème 9.4]). Les certificats se trouvent à l’adresse

<https://github.com/AxiomMath/ZetaZeros>

Ce dépôt contient un fichier de défi formel contenant les énoncés des trois résultats principaux, qui peuvent être vérifiés mécaniquement à l’aide de l’outil Comparator dans Lean.

Références

- [1] L. Alpöge et R. Furman. *More than two thirds of the zeta zeros are simple and on the critical line*, arXiv :2608.13637 (2026).
- [2] F. Aryan. *On an extension of the Landau–Gonek formula*, J. Number Theory **233** (2022), 389–404.
- [3] S. A. C. Baluyot, D. A. Goldston, A. I. Suriajaya et C. L. Turnage-Butterbaugh. *An unconditional Montgomery theorem for pair correlation of zeros of the Riemann zeta-function*, Acta Arith. **214** (2024), 357–376.
- [4] S. A. C. Baluyot, D. A. Goldston, A. I. Suriajaya et C. L. Turnage-Butterbaugh. *Pair correlation of zeros of the Riemann zeta function I : Proportions of simple zeros and critical zeros*, arXiv :2501.14545 (2025).
- [5] H. M. Bui et D. R. Heath-Brown. *On simple zeros of the Riemann zeta-function*, Bull. Lond. Math. Soc. **45** (2013), no. 5, 953–961.
- [6] E. Carneiro, V. Chandee, F. Littmann et M. B. Milinovich. *Hilbert spaces and the pair correlation of zeros of the Riemann zeta-function*, J. Reine Angew. Math. **725** (2017), 143–182.
- [7] A. Chirre, F. Gonçalves et D. de Laat. *Pair correlation estimates for the zeros of the zeta function via semidefinite programming*, Adv. Math. **361** (2020), 106926, 22 pp.
- [8] J. B. Conrey, A. Ghosh et S. M. Gonek. *Simple zeros of the Riemann zeta-function*, Proc. London Math. Soc. (3) **76** (1998), no. 3, 497–522.
- [9] J. B. Conrey. *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line*, J. Reine Angew. Math. **399** (1989), 1–26.
- [10] D. W. Farmer. *Counting distinct zeros of the Riemann zeta-function*, Electron. J. Combin. **2** (1995), Research Paper 1, 5 pp.
- [11] D. A. Goldston, J. Lee, J. Schettler et A. I. Suriajaya. *Pair Correlation Conjecture for the Zeros of the Riemann Zeta-function I : Simple and Critical Zeros*, à paraître dans Mathematika ; arXiv :2503.15449 (2025).
- [12] P. X. Gallagher et J. H. Mueller. *Primes and zeros in short intervals*, J. Reine Angew. Math. **303/304** (1978), 205–220.
- [13] D. A. Goldston et A. I. Suriajaya. *Zeta zeros on the critical line*, à paraître dans Anal. Math. **52** (2026), no. 3 ; arXiv :2511.20059 (2025).
- [14] D. A. Goldston et A. I. Suriajaya. *Zeta zeros in a narrow vertical box*, à paraître dans Anal. Math. **52** (2026), no. 3 ; arXiv :2603.28104 (2026).
- [15] G. H. Hardy. *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris **158** (1914), 1012–1014.
- [16] G. H. Hardy et J. E. Littlewood. *The zeros of Riemann’s zeta-function on the critical line*, Math. Z. **10** (1921), 283–317.
- [17] H. Ki et Y. Lee. *Zeros of the derivatives of the Riemann zeta-function*, Funct. Approx. Comment. Math. **47** (2012), no. 1, 79–87.

- [18] N. Levinson. *More than one third of zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma = 1/2$* , Adv. Math. **13** (1974), 383–436.
- [19] H. L. Montgomery. *The pair correlation of zeros of the zeta function*, in : Analytic Number Theory (St. Louis, 1972), Proc. Sympos. Pure Math. **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973, 181–193.
- [20] H. L. Montgomery. *Distribution of the zeros of the Riemann zeta function*, in : Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, 1974), Vol. 1, Canad. Math. Congress, 1975, 379–381.
- [21] K. Pratt, N. Robles, A. Zaharescu et D. Zeindler. *More than five-twelfths of the zeros of ζ are on the critical line*, Res. Math. Sci. **7** (2020), Paper No. 2, 74 pp.
- [22] A. Selberg. *On the zeros of Riemann's zeta-function*, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I **10** (1942), 1–59.
- [23] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function*, seconde édition, révisée par D. R. Heath-Brown, Clarendon Press, Oxford, 1986.