

## Symétrie

Jacques Tits<sup>1</sup>

Le mot “symétrie” est employé différemment en mathématiques et dans le langage courant. Dans la vie de tous les jours, il désigne généralement une symétrie bilatérale, de type droite-gauche ; ce n’est pas le cas en mathématiques. Bien sûr, le mot a parfois un sens plus général dans le langage courant ; chacun, par exemple, s’accordera à dire que la figure de la FIGURE 1 est hautement symétrique, même si elle ne présente pas de symétrie bilatérale. Cependant, il s’agit d’une rare exception. (Cet exemple suscite une remarque : en préparant une conférence sur ce sujet, j’ai constaté qu’on rencontre facilement des symboles politiques ou religieux lorsqu’on cherche un exemple de figure à la fois simple et hautement symétrique ; cela témoigne de l’influence profonde que la symétrie a toujours exercée sur l’humanité).

Une deuxième différence entre les mathématiques et le langage courant concernant le concept de symétrie est que la symétrie parfaite n’existe qu’en mathématiques et non dans la vie. Je fais ici allusion au fait, souligné par Hermann Weyl dans son ouvrage “Symétrie”, que dans l’art occidental, les artistes évitent autant que possible la symétrie parfaite et la brisent toujours, d’une manière ou d’une autre. Il en donne de magnifiques exemples, tels que les célèbres cavaliers étrusques du tombeau triclinique de Corneto (FIG. 2).

L’image est presque symétrique, mais pas tout à fait : la symétrie parfaite en art est souvent un peu ennuyeuse ! Ce n’est pas le cas en mathématiques (bien que les mathématiciens s’intéressent depuis peu aux “quasi-symétries”). Mais l’affirmation selon laquelle la symétrie parfaite n’existe pas dans la réalité est en fait plus fondamentale.

Prenons l’exemple de la FIGURE 3. De manière générale, elle présente des symétries, sur lesquelles nous reviendrons bientôt, mais qui disparaissent lorsqu’on regarde l’image de plus près : cela saute aux yeux si l’on prête attention aux numéros associés aux sommets d’angle, car les 30 sommets d’angle portent 30 noms différents, mais même sans en tenir compte, on peut facilement trouver de petites irrégularités dans le dessin qui détruisent toutes les symétries apparentes.



FIGURE 1

---

1. *Miscellanea mathematica*, Festschrift H. Götze, Springer-Verlag, Berlin 1991, 293-304.

Ce texte est une version légèrement remaniée du texte d’une conférence donnée à Bonn le 28 novembre 1986 (Référence : “Considérations mathématiques”, Bouvier Verlag, Bonn, 1988, p. 32-44 ; je remercie sincèrement Bouvier-Verlag de m’avoir autorisé à reproduire partiellement ce texte). La principale modification consiste à remplacer les figures 3 et 4 par une nouvelle figure 3, beaucoup plus riche en propriétés de symétrie, que je dédie tout particulièrement au Dr H. Götze : voir la postface. Les commentaires relatifs aux figures susmentionnées (p. 34 et 35 de l’ouvrage cité) ont, bien entendu, été modifiés en conséquence.

Transcription en  $\text{\LaTeX}$  : Denise Vella-Chemla.

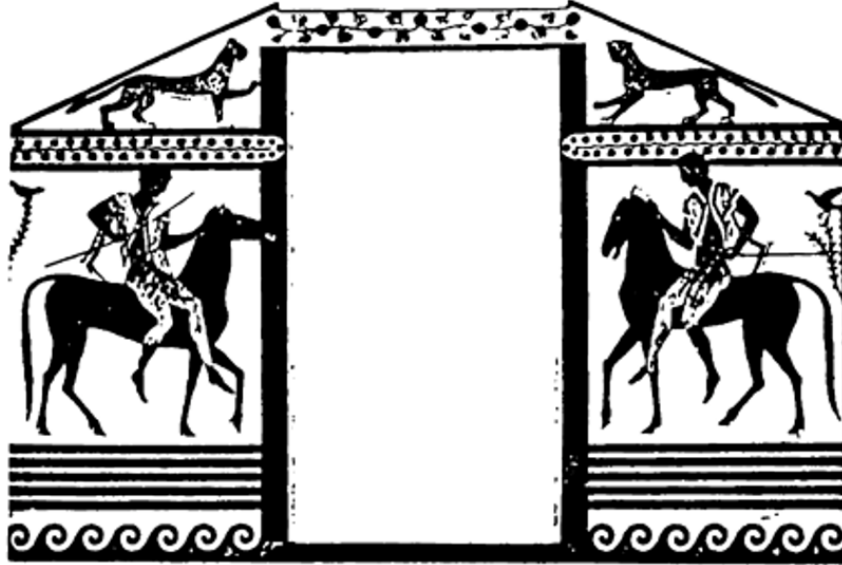


FIGURE 2

Si l'on fait abstraction des nombres et des irrégularités mineures, on reconnaît immédiatement une symétrie de rotation d'ordre 5 dans la figure, voire d'ordre 10 si l'on choisit de ne pas distinguer les sommets "blancs" des sommets "noirs". Mais une symétrie bien plus importante se cache dans cette image et se révèle lorsqu'on considère la figure comme un simple graphe, c'est-à-dire lorsqu'on ne perçoit que 30 sommets (les 30 sommets sur le cercle frontière), dont certaines paires sont reliées et d'autres non : imaginons, par exemple, que les sommets représentent 30 personnes et qu'une connexion corresponde à une connaissance. Les longueurs et les angles des lignes de connexion (appelées arêtes) sont ici sans importance. Ces symétries cachées se manifestent ainsi : chaque point blanc est relié à trois sommets noirs.

Les sommets sont reliés entre eux, et les paires de nombres associées à ces trois sommets forment une partition de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Par exemple, le point  $\overline{12}$  est relié à 46, 15 et 23, ce qui donne la partition (46)(15)(23) de cet ensemble. Réciproquement, si l'on part d'une partition quelconque, telle que (12)(34)(56), on constate que les trois sommets noirs correspondants, 12, 34 et 56, sont reliés à un seul point blanc, ici  $\overline{23}$ . Ainsi, les 15 partitions de 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont associées de manière unique aux sommets blancs par paires. Or, toute permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  donne une permutation des sommets noirs (puisqu'ils correspondent aux paires d'éléments de cet ensemble) et une permutation des sommets blancs (considérés comme des partitions), qui, ensemble, représentent évidemment une symétrie de la structure entière (considérée comme un graphe). Par exemple, la permutation  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1$  donne la symétrie

$$12 \rightarrow 23 \rightarrow 34 \rightarrow 45 \rightarrow 56 \rightarrow 16 \rightarrow 12,$$

$$13 \rightarrow 24 \rightarrow 35 \rightarrow 46 \rightarrow 15 \rightarrow 26 \rightarrow 13,$$

$$14 \rightarrow 25 \rightarrow 36 \rightarrow 14,$$



forment un groupe est le groupe symétrique  $S_6$ . L'affectation  $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$  est une symétrie, ou, en termes mathématiques, un automorphisme du groupe  $S_6$ . L'existence de cet automorphisme extérieur de  $S$  est un phénomène remarquable et bien connu, sans équivalent lorsque 6 est remplacé par un autre entier. En utilisant la méthode décrite précédemment, nous avons obtenu 720 symétries de la figure 3, considérée comme un graphe; ce nombre passe à 1440 lorsqu'on y ajoute la symétrie centrale  $12 \leftrightarrow \bar{12}, 13 \leftrightarrow \bar{13}, \dots, 56 \leftrightarrow \bar{56}$ , qui, cependant, n'est une symétrie que si l'on ne distingue pas les sommets blancs des sommets noirs.

Il est évident que les propriétés de symétrie d'une figure dépendent fortement du point de vue adopté. Par exemple, dans l'exemple ci-dessus, l'attention portée aux irrégularités du dessin, à la longueur des segments de droite, aux différences entre les sommets blancs et noirs, etc., est déterminante. Ceci conduit naturellement à la conception d'un objet mathématique, c'est-à-dire une chose dont on choisit à l'avance les propriétés précises à considérer. De tels objets peuvent présenter de véritables symétries. Dans la vie courante, cependant, il est fréquent, et souvent nécessaire, de considérer tous les aspects des choses autant que possible, ce qui détruit naturellement toute symétrie.

En mathématiques et en physique, des symétries remarquables apparaissent souvent de manière totalement insoupçonnée, sous le nom de "symétries cachées". La figure 3 en donne deux exemples : d'une part, les symétries d'ordre 720 du graphe, issues des permutations de  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , qui, hormis la rotation d'ordre 72 et ses multiples, ne sont pas évidentes; d'autre part, l'automorphisme extérieur du groupe symétrique  $S_6$ . La découverte de telles symétries cachées constitue l'un des objectifs passionnants des mathématiciens. Nous présenterons d'autres exemples.

Pour introduire l'exemple suivant, considérons deux problèmes apparemment très élémentaires. Premièrement : de combien de façons différentes un nombre naturel  $N$  peut-il être décomposé en sommes de nombres impairs? Imaginez, par exemple, que vous deviez affranchir une lettre avec  $N$  marks allemands<sup>2</sup>, en utilisant des timbres de 1 DM, 3 DM, 5 DM, etc., et demandez-vous de combien de façons cela est possible. Pour  $N = 6$ , par exemple, il existe quatre solutions.

Le nombre  $M$  de possibilités augmente avec  $N$  selon une loi qui n'est pas facile à comprendre au premier abord (voir FIGURE 4).

Le second problème formulé dans la figure 4 ne peut pas être expliqué aussi facilement à l'aide de timbres-poste, mais essayons tout de même : cette fois, deux types de timbres sont disponibles, les timbres ordinaires dont les valeurs sont des nombres pairs (2, 4, 6, ...) et les timbres spéciaux dont les valeurs sont les timbres dits spéciaux.

---

2. deutschmark (DM).

PROBLÈME 1. De combien de façons différentes un entier positif  $N$  donné peut-il être exprimé comme la somme d'une suite décroissante monotone de nombres positifs impairs ?

*Exemple :*

$$\begin{aligned} 6 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 3 + 1 + 1 + 1 \\ &= 3 + 3 \\ &= 5 + 1 \end{aligned}$$

PROBLÈME 2. De combien de façons différentes le nombre  $N$  peut-il être décomposé en une somme ordonnée dont le premier terme est un nombre de la forme  $\frac{1}{2}n(n+1)$ , tandis que les autres termes forment une séquence monotone décroissante de nombres pairs positifs ?

*Exemple :*

$$\begin{aligned} 6 &= 0 + 2 + 2 + 2 \\ &= 0 + 2 + 4 \\ &= 0 + 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Les deux problèmes ont la même réponse  $M$  :

$N$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$M$	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	14	17	...

FIGURE 4

L'équivalence des problèmes 1 et 2 correspond à la formule de Gauss.

$$\frac{\eta(q^2)^2}{\eta(q)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{2(n+\frac{1}{4})^2}$$

où

$$\eta(q) = q^{1/24} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$

FIGURE 5

On donne le nombre de nombres triangulaires  $(1, 3, 6, 10, \dots)$ , et la condition supplémentaire est qu'un seul timbre spécifique peut être utilisé. La question demande à nouveau le nombre de combinaisons possibles de tels timbres dont la somme est égale à  $N$  D-marks.

Étrangement, ces deux problèmes d'apparence très différente ont la même solution : pour une valeur de  $N$  donnée, le nombre de combinaisons possibles est identique dans les deux cas (FIGURE 4). Ceci

correspond à une formule bien connue et fondamentale de Gauss (FIGURE 5).

Peut-on alors affirmer que la situation est pleinement comprise dès lors qu’une démonstration de la formule de Gauss est disponible ? Je ne le crois pas. Une compréhension plus approfondie s’obtient en construisant un objet mathématique où se reflètent les deux problèmes posés, de telle sorte que leur équivalence (c’est-à-dire l’égalité de leurs solutions) corresponde à une symétrie bien cachée de cet objet ; l’existence de cette symétrie éclaire alors à la fois l’équivalence des deux problèmes et la formule de Gauss. Un tel objet se trouve effectivement, d’après Frenkel, Kac, Lepowsky et al., dans la théorie des représentations de certaines algèbres de Kac-Moody-Lie.

Pour introduire nos derniers exemples de symétries cachées, considérons les grilles représentées sur les figures 6 et 7, dont nous examinerons brièvement les symétries. Toutes deux possèdent des symétries dites de translation, que nous négligerons ici ; pour les exclure, il suffit, par exemple, de fixer un point sur le réseau, le groupe de symétrie devient fini : d’ordre 12 dans le cas de la figure 6, où l’on trouve 6 rotations et 6 réflexions qui laissent le réseau invariant, et d’ordre 8 dans le cas du réseau de la figure 7 (qui est donc légèrement moins symétrique que le premier). La question des groupes de symétrie des réseaux a récemment suscité un vif intérêt, notamment pour des raisons de théorie des nombres. Si l’on examine les réseaux dans l’espace tridimensionnel, quadridimensionnel, etc., compte tenu de ses propriétés de symétrie, un réseau très particulier, doté d’une symétrie extrêmement élevée, apparaît soudainement dans l’espace euclidien à vingt-quatre dimensions. Il s’agit du réseau de Leech (inconnu il y a encore 30 ans, ce qui est difficilement concevable pour de nombreux mathématiciens aujourd’hui). Lorsque J. Leech découvrit ce réseau, il ignorait probablement qu’il possédait de telles propriétés de symétrie extraordinaires : il s’intéressait à un problème tout à fait différent, à savoir l’empilement le plus dense de sphères. Si l’on considère le réseau de Leech proprement dit, c’est-à-dire la construction proposée par Leech lui-même, ce réseau ne semble pas particulièrement symétrique. En résumé, cette construction peut être décrite comme suit : on part d’un réseau parfaitement symétrique, à savoir un réseau rectangulaire ; on en retire certains sommets et on en ajoute d’autres à leur place. Ces deux modifications sont assez asymétriques et détruisent partiellement la symétrie du réseau initial. Cependant, ce processus engendre de nouvelles symétries, qui ne sont pas immédiatement visibles : ce sont donc des “symétries cachées” au sens décrit précédemment. C’est J.H. Conway qui a remarqué le premier que le réseau de Leech possède un groupe de symétrie immense, d’ordre 8 315 553 513 086 720 000. Je ne connais aucune construction explicite du réseau de Leech où la symétrie complète soit immédiatement apparente : des symétries cachées subsistent toujours, et leur découverte est un travail considérable.

Un dernier exemple célèbre est le suivant. On sait que dans l’espace à 196 883 dimensions, il existe un magnifique réseau dont le groupe de symétrie a l’ordre

$$\begin{aligned} & 808\ 017\ 424\ 794\ 512\ 875\ 886\ 459\ 904\ 961\ 710\ 757\ 005\ 754\ 368\ 000\ 000\ 000 \\ & = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \end{aligned}$$

Ce réseau n’a probablement jamais été observé directement : nous savons seulement qu’il existe, mais aucune construction explicite n’a encore été réalisée. Cependant, il est possible de construire le groupe de symétrie du réseau, appelé groupe Monstre  $M$  par R. Griess et B. Fischer. Là encore, la découverte d’une symétrie cachée est une étape essentielle de la construction. Le groupe  $M$  possède

un certain sous-groupe d'ordre

$$2^{46} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23,$$



FIGURE 6

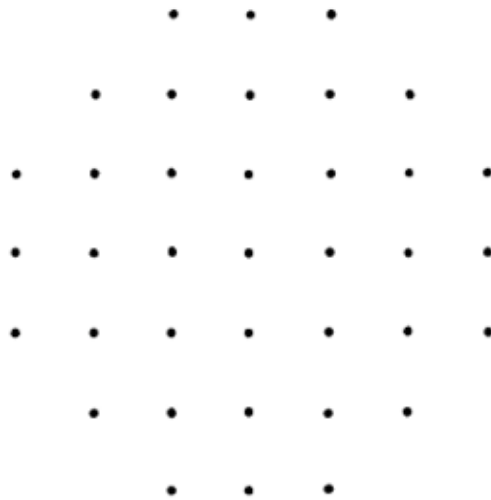


FIGURE 7

Ce qui est aisément compréhensible. Pour générer  $M$ , Griess a construit un objet, une algèbre, de dimension 196 883, dont le groupe de symétrie (partiel) est constitué de ce sous-groupe. Au prix d'efforts considérables, il a ensuite pu déterminer une symétrie supplémentaire, véritablement cachée, qui, combinée au sous-groupe déjà connu, engendre le groupe  $M$ . L'auteur a par la suite démontré que  $M$  est le groupe de symétrie complet de l'algèbre de Griess.

On pourrait naturellement se demander : pourquoi un tel intérêt pour ce groupe Monstre ? Son étude présente-t-elle plus d'intérêt qu'un simple jeu divertissant ?

La réponse à ces questions, comme je vais le démontrer, est un oui retentissant.

Depuis Galois, la question de l'existence de tous les types de symétrie possibles, c'est-à-dire de tous les groupes existants (j'entends ici toujours les groupes finis), a acquis une signification claire. Il s'agit sans doute d'une question naturelle, voire fondamentale, mais il s'avère qu'elle ne constitue pas un problème raisonnable, ce que je vais brièvement expliquer. Comme on le sait, tout nombre naturel est un produit de nombres premiers, qui sont donc les "atomes indivisibles" de la théorie des nombres. De même, la théorie des groupes (finis) possède ses "atomes", appelés groupes simples : tout groupe est, en un certain sens, une composition de tels atomes. Mais alors que le processus de composition dans le cas des nombres n'est rien d'autre qu'une simple formation de produits, en théorie des groupes (sous le nom d'"extension"), il est considérablement plus complexe et extraordinairement diversifié : des atomes donnés (c'est-à-dire des groupes simples) peuvent potentiellement être combinés de plusieurs manières, et si le nombre de constituants considérés et leur "réactivité" mutuelle sont importants, la totalité des combinaisons possibles peut devenir absolument ingérable. La question se pose alors de savoir s'il faut au moins énumérer tous les groupes simples finis. Ce problème, lui aussi, aurait probablement été considéré comme irréaliste il y a 40 ans, mais il a récemment été entièrement résolu. Le résultat, dont la démonstration n'est pas encore entièrement rédigée et qui remplit déjà des milliers de pages de revues (il est le fruit des efforts de nombreux spécialistes coordonnés par D. Gorenstein), est étonnant. Comme prévu, il existe une infinité de groupes simples finis ; cependant, ils peuvent tous être décrits de manière concise et uniforme, à l'exception de 26 groupes qui ne s'intègrent pas dans ce cadre élégant et que l'on appelle groupes sporadiques. Le terme [imprécis] mentionné précédemment intervient ici.

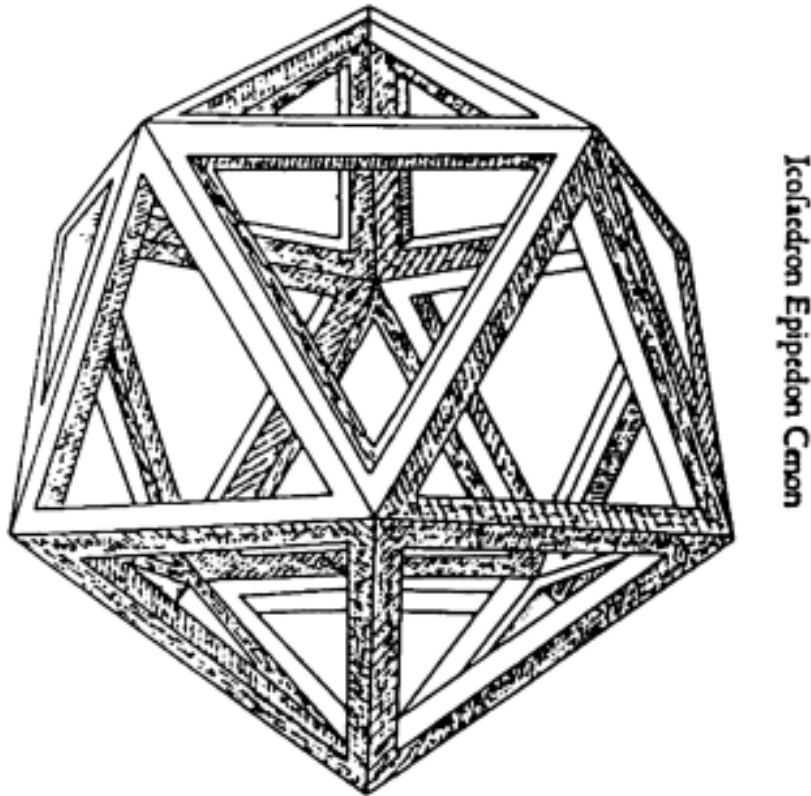
Le groupe Monstre occupe une place particulière : il fait partie des groupes simples découverts récemment et est le plus grand des groupes sporadiques. De plus, il possède des propriétés arithmétiques remarquables et encore assez mystérieuses. Comprendre pleinement ces propriétés constitue actuellement l'un des enjeux les plus passionnants de la théorie des groupes finis. Fait intéressant, dans un article récent d'I. Frenkel, J. Lepowski et A. Meurman consacré à ce sujet, la symétrie cachée entre les deux problèmes de la figure 4 joue un rôle crucial.

Enfin, j'aimerais présenter une dernière structure symétrique, belle et bien connue : l'icosaèdre. C'est précisément en raison de l'effet psychologique de sa grande symétrie, évoquée au début, que l'icosaèdre est de plus en plus omniprésent dans notre monde saturé de publicité, mais le modèle présenté ici (FIGURE 8) est particulièrement ancien, car il serait attribué à Léonard de Vinci.

Déterminer toutes les symétries de l'icosaèdre est un exercice simple : on trouve 60 rotations et les 60 produits de ces rotations présentant une symétrie centrale. Imaginons maintenant un cristal dans un espace à 196 883 dimensions, il ressemble légèrement à l'icosaèdre, mais au lieu de soixante, il possède

808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 005 754 368

milliards de symétries de rotation. Ces symétries forment le groupe Monstre que nous venons d'évoquer et que le lecteur peut désormais commencer à se représenter. Il pourra ainsi apprécier la beauté des symétries en mathématiques.



Icosaedron Epihedon Canon

**Icosaedron Planum Vacuum**

FIGURE 8 : ICOSAÈDRE ÉVIDÉ

ÉPILOGUE

Comme chacun sait, le Dr Götze a un faible pour les octogones<sup>3</sup> ! Il sera peut-être ravi de découvrir 90 octogones, quelque peu dissimulés et disposés de manière très irrégulière, sur la figure 3, grâce aux indices suivants :

- Le “graphe” représenté dans cette illustration (voir ci-dessus) comporte 30 sommets (15 sommets “blancs” et 15 sommets “noirs”) situés sur le cercle frontière ;
- Chaque bord relie un point d’angle blanc et un point d’angle noir ;
- Chaque sommet appartient à exactement trois arêtes ;
- Deux sommets de types différents, qui ne sont pas des sommets de la même arête, peuvent être reliés par exactement une chaîne de longueur trois.

Il s’ensuit immédiatement que :

- le graphe ne contient aucun chemin fermé (c’est-à-dire aucun polygone) de longueur  $\leq 7$  ;

---

3. H. Götze (1984) : Castel del Monte, Munich : Prestel

- Chaque chaîne de longueur cinq peut être intégrée dans exactement un chemin fermé de longueur 8, déterminant ainsi exactement un octogone (par exemple : la chaîne  $12, \overline{23}, 34, \overline{45}, 15, \overline{12}$  doit être complétée par la seule chaîne de longueur trois qui relie  $\overline{12}12$ , à savoir  $\overline{12}, 46, \overline{46}, 12$ , afin d'obtenir un octogone) ;
- deux bords appartiennent toujours à un octogone commun (puisque'ils peuvent toujours être inclus dans une chaîne de longueur 5) ;
- la figure contient exactement 90 octogones (en fait, le nombre de chaînes orientées de longueur 5 est égal à  $30 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 90 \cdot 2^4$ , et chaque octogone contient  $8 \cdot 2 = 2^4$  de ces chaînes).