Traduction d'un extrait du livre de E. C. Titchmarsh, F.R.S. [1], au sujet du calcul des zéros de la fonction ζ de Riemann, Denise Vella-Chemla, janvier 2025

XV.
Calculs liés aux zéros

15.1. Il est possible de vérifier par des calculs que tous les zéros complexes jusqu'à un certain nombre tombent exactement (pas uniquement approximativement) sur la droite critique. Comme exemple simple, on trouvera grossièrement la position du premier zéro complexe dans le demi-plan supérieur, et on montrera qu'il est sur la droite critique.

On considère la fonction $Z(t) = e^{i\vartheta}\zeta(\frac{1}{2}+it)$ définie au § 4.17. Cette fonction est réelle pour des valeurs réelles de t, de telle façon que, si $Z(t_1)$ et $Z(t_2)$ sont de signes opposés, $Z(t)$ s'évanouit entre t_1 et t_2 et ainsi $\zeta(s)$ a un zéro sur la droite critique entre $\frac{1}{2}+it_1$ et $\frac{1}{2}+it_2$.

Il découle de (2.2.1) que $\zeta(\frac{1}{2}) < 0$ et donc il découle de (2.1.12) que $\xi(\frac{1}{2}) > 0$, i.e. que $\Xi(0) > 0$ et enfin de (4.17.3) que $Z(0) < 0$.

Considérons maintenant la valeur $t = 6\pi$. L'argument du § 4.14 montre que, si x est la moitié d'un entier impair,

$$\left|\zeta(s) - \sum_{n<x} \frac{1}{n^s}\right| \leq \frac{x^{1-\sigma}}{|1-s|} + \frac{2x^{-\sigma}}{2\pi - |t|/x}. \tag{15.1.1}$$

Par conséquent, en prenant $t > 0$,

$$\left|Z(t) - \sum_{n<x} \frac{\cos(t\ \mathrm{log} n - \vartheta)}{n^{\frac{1}{2}}}\right| \leq \frac{x^{\frac{1}{2}}}{t} + \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{2\pi x - t}. \tag{15.1.2}$$

Pour $x = \frac{9}{2}, t = 6\pi$, le côté droit est environ égal à 0.6.

On a ensuite besoin d'une approximation de ϑ. On a

$$e^{-2i\vartheta} = \chi\left(\frac{1}{2}+it\right) = \pi^{it}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}it\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it\right)},$$

de telle façon que

$$\begin{aligned}\vartheta &= -\frac{1}{2}\,t\log\pi + I\log\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it\right)\\ &= \frac{1}{2}\,t\ \log\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}\,t - \frac{1}{8}\pi + O\left(\frac{1}{t}\right).\end{aligned}$$

On peut vérifier que le terme $O(1/t)$ est négligeable dans les calculs.

[1]F.R.S. Membre de la Société royale. Le livre a pour titre *The theory of the Riemann zeta-function*, sa seconde édition a été révisée par Heath-Brown, il a été édité par Clarendon Press, Oxford, en 1988.

En écrivant $\vartheta = 2\pi K$ et en utilisant les valeurs

$$\log(2) = 0.6931, \quad \log(3) = 1.0986,$$

on trouve approximativement que

$$\begin{array}{cc} K = 0.1166, & 3\log(3) - K = 3.179 \\ 3\log(2) - K = 1.963, & 3\log(4) - K = 4.042, \end{array}$$

Par conséquent, les cosinus dans (15.1.2) sont tous positifs, et $\cos 2\pi K = 0.74$. Donc $Z(6\pi) > 0$.

Il y a donc un zéro au moins sur la droite critique entre $t = 0$ et $t = 6\pi$.

A nouveau, les formules du § 9.3 donnent

$$N(T) = 1 + 2K + \frac{1}{\pi}\,\Delta \arg \zeta(s),$$

où Δ dénote la variation le long de $(2, 2 + iT, \frac{1}{2} + iT)$. Maintenant $\mathfrak{Re}\,\zeta(s) > 0$ sur $\sigma = 2$ et un argument similaire à celui déjà utilisé, mais dépendant de (15.1.1), montre que $\mathfrak{Re}\,\zeta(s) > 0$ sur $(2 + iT, \frac{1}{2} + iT)$ si $T = 6\pi$. Donc $|\Delta \arg \zeta(s)| < \frac{1}{2}\pi$ et

$$N(6\pi) < \frac{3}{2} + 2K < 2.$$

Par conséquent, il y a au plus un zéro complexe de partie imaginaire moindre que 6π et donc en fait, juste un, notamment celui qui est sur la droite critique.

15.2. Il est clair que le processus ci-dessus peut être poursuivi aussi longtemps que les changements de signes appropriés de la fonction $Z(t)$ ont lieu. En définissant $K = K(t)$ comme précédemment, appelons t_ν le nombre tel que

$$K(t_\nu) = \frac{1}{2}\nu - 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{15.2.1}$$

Alors (15.1.2) donne

$$Z(t_\nu) \sim (-1)^\nu \sum_{n<x} \frac{\cos(t_\nu \log n)}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Si la somme est dominée par son premier terme, elle est positive, et donc $Z(t_\nu)$ a le signe de $(-1)^\nu$. Si ceci est vrai pour ν et $\nu + 1$, $Z(t)$ a un zéro dans l'intervalle $(t_\nu, t_{\nu+1})$.

La valeur $t = 6\pi$ dans l'argument ci-dessus est une approximation grossière de t_2.

Les ordonnées des six premiers zéros sont

$$14.13, \quad 21.02, \quad 25.01, \quad 30.42, \quad 32.93, \quad 37.58$$

à deux décimales près [2]. Certains d'entre eux ont été calculés avec une grande précision.

[2] Voir les références Gram (6), Lindelöf (3), dans le *Handbuch* de Landau.

15.3. Les calculs que le processus ci-dessus nécessitent sont très laborieux si t est très grand. Une meilleure méthode consiste à utiliser la formule (4.17.5) provenant de l'équation fonctionnelle approximative. Ecrivons $t = 2\pi u$

$$\alpha_n = \alpha_n(u) = n^{-\frac{1}{2}} \cos 2\pi(K - u \log n),$$

et

$$h(\xi) = \frac{\cos 2\pi(\xi^2 - \xi - \frac{1}{16})}{\cos 2\pi\xi}$$

Alors (4.17.5) donne

$$Z(2\pi u) = 2\sum n = 1^m \alpha_n(u) + (-1)^{m-1} u^{-\frac{1}{4}h}(\sqrt{u} - m) + R(u),$$

où $m = [\sqrt{u}]$, et $R(u) = O(u^{-3/4})$. On peut trouver les $\alpha_n(u)$, pour des valeurs données de u, à partir d'une table de la fonction $\cos 2\pi x$. Dans l'intervalle $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$, $h(\xi)$ décroît régulièrement de 0.92388 à 0.38268, et $h(1-\xi) = h(\xi)$.

Pour effectuer le calcul, on a besoin d'une borne numérique supérieure pour $R(u)$. Une formule plutôt compliquée de cette sorte est fournie dans le théorème 2 de la référence [2] Titchmarsh (17). Pour des valeurs de u qui ne sont pas trop petites, cette formule peut être grandement simplifiée et en fait, il est facile de déduire que

$$|R(u)| < \frac{3}{2u^{\frac{3}{4}}} \qquad (u > 125).$$

Cette inégalité est suffisante pour atteindre la plupart des objectifs.

Occasionnellement, quand $Z(2\pi u)$ est trop petit, un second terme de la formule asymptotique de Riemann-Siegel doit être utilisé.

Les valeurs de u pour lesquelles les calculs sont effectuées sont les solutions de (15.2.1), puisqu'elles rendent alternativement α_1 égal à 1 et -1. Dans les calculs décrits dans [2] Titchmarsh (17), j'ai commencé avec

$$u = 1.6, \qquad K = -0.04865$$

et je suis allé jusqu'à

$$u = 62.785, \qquad K = 98.5010.$$

Les valeurs de u ont été obtenues successivement, et sont plutôt des approximations grossières des u_ν, de telle façon que les K ne sont pas suffisamment proches d'entiers ou d'entiers augmentés de un demi.

Il a été montré de cette façon que les 198 premiers zéros de $\zeta(s)$ au-dessus de l'axe des abscisses sont tous sur la droite critique $\sigma = \frac{1}{2}$.

Les calculs ont été menés bien plus loin par le Dr. Comrie [3]. En suivant les mêmes voies, il a été montré que les 1041 premiers zéros de $\zeta(s)$ au-dessus de l'axe des abscisses sont tous sur la droite

[3] voir [3] Titchmarsh (18).

critique dans l'intervalle $0 < t < 1468$.

Un point intéressant qui émerge de ces calculs est que $Z(t_\nu)$ n'a pas toujours le même signe que $(-1)^\nu$. Un nombre considérable de cas d'exceptions ont été trouvés ; mais dans chacun de ces cas, il y a un point dans le voisinage t'_ν, tel que $Z(t'_\nu)$ a le signe de $(-1)^\nu$, et la succession des changements de signe de $Z(t)$ n'est par conséquent pas interrompue.

15.4. Aussi loin qu'ils ont été menés, ces calculs sont en faveur de la vérité de l'hypothèse de Riemann. Pourtant, il est possible qu'ils n'aient pas été menés assez loin pour révéler l'état réel de la situation. A la fin de la table construite par le Dr. Comrie, il y a seulement quinze termes dans la série pour $Z(t)$, et ceci est un très petit nombre quand on traite de séries oscillantes de cette sorte. En effet, il y a une caractéristique de la table qui peut suggérer un changement de son caractère plus loin. Principalement, le résultat est dominé par le premier terme α_1, et plus tard, les termes s'annulent plus ou moins. Occasionnellement (par exemple pour $K = 435$), tous les nombres, ou presque tous les α_n ont le même signe, et $Z(t)$ a un maximum ou un minimum qui est grand. Quand on passe de cela aux valeurs voisines de t, quelques premiers termes changent brutalement alors que les suivants varient en comparaison lentement. Le terme α_n apparaît quand $u = n^2$ et ici

$$\begin{aligned}\cos 2\pi(K - u\log n) &= \cos\pi(u\log(u/n^2) - u - \tfrac{1}{8} + ...)\\ &= \cos\pi(n^2 + \tfrac{1}{8} + ...) = (-1)^n\cos\tfrac{1}{8}\pi + ...,\end{aligned}$$

et

$$\frac{d}{du}(K - u\log n) = \frac{1}{2}\log u - \log n - \frac{1}{192\pi^2u^2} + ... \sim -\frac{1}{192\pi^2u^2}$$

A sa première apparition dans la table, α_n sera environ égal à $(-1)^n n^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{8}\pi$ et il variera lentement quelques temps après son apparition.

Il est concevable que si t, et donc le nombre de termes, étaient assez grands, il pourrait y avoir des endroits où les plus petits termes variant lentement devraient se combiner pour surpasser les termes moins nombreux variant plus vite, et ainsi devraient empêcher le graphe de $Z(t)$ de traverser l'axe des zéros entre deux maxima successifs. Il y a trop peu de termes dans la table déjà construite pour tester cette possibilité.

Il y a, bien sûr, des relations entre les nombres α_n, qui détruisent un argument d'un type si simple. Si l'hypothèse de Riemann est vraie, il doit y avoir une relation, pour l'instant cachée, qui empêche une telle possibilité de jamais advenir.

Il ne fait aucun doute que l'ensemble de ce sujet sera testé par les méthodes modernes de calcul. Naturellement, l'hypothèse de Riemann ne peut pas être démontrée par le calcul, mais si elle est fausse, elle sera infirmée par la découverte d'exceptions de cette manière.

Notes pour le chapitre 15

15.5. Un certain nombre de chercheurs ont testé l'hypothèse de Riemann dans des domaines de plus en plus grands. Au moment de l'écriture de cet article, les calculs les plus avancés sont ceux de van de Lune et te Riele (comme cela est reporté dans Odlyzko et te Riele [1]), qui ont trouvé que les 1.5×10^9 premiers zéros non triviaux sont simples et sont sur la droite critique.

Références

[1] Odlyzko A. M., Te Riele H. J. J., Disproof of Mertens conjecture, *J. Reine Angew. Math.* 357 (1985), 138-160.

[2] Titchmarsh E. C. ([18]) The zeros of the Riemann zeta function, *Proc. Royal Soc.*, A, 151, 1935, 234-255.

[3] Titchmarsh E. C. ([18]) The zeros of the Riemann zeta function, *Proc. Royal Soc.*, A, 157, 1936, 261-263.