# Une correspondance sur un polynôme apparenté à la fonction zêta de Riemann

Atle Selberg, avec V. Brun, E. Jacobsthal, A. Selberg, C. L. Siegel

1946

*Norsk matematisk tidsskrift* B 28 (1946), 65–71

**Viggo Brun écrit le 16 février 1946 de Trondheim à Ernst Jacobsthal à Uppsala :**

— Je m'occupe de la fonction zêta ! Sujet sur lequel je n'ai que de très faibles connaissances. Mais à présent, je souhaite me divertir en vous écrivant quelques mots sur les aspects les plus empiriques auxquels je suis parvenu. Comme les nombres de Bernoulli y jouent un certain rôle, cela vous intéressera peut-être d'autant plus de lire ceci, et éventuellement de vous y pencher.

Si l'on applique la formule de sommation d'Euler-Maclaurin à la fonction zêta, on obtient, après multiplication par $(s-1)$ :

$$\begin{aligned}(s-1)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2}(s-1) + \frac{B_2}{2!}(s-1)s + \frac{B_4}{4!}(s-1)s(s+1)(s+2) \\ + \frac{B_6}{6!}(s-1)s\ldots(s+3)(s+4) + \ldots\end{aligned}$$

Cette série diverge certes ! Dans la *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes* I, p. 151, Stieltjes donne d'ailleurs un terme de reste.

La série peut également être "améliorée" en isolant d'abord les termes

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{r^s}$$

dans la fonction zêta.

En interrompant la série, on obtient successivement les polynômes :

$$\begin{aligned}
Q_1(s) &= 1 + \frac{1}{2}(s-1) \\
Q_2(s) &= 1 + \frac{1}{2}(s-1) + \frac{B_2}{2!}(s-1)s \\
Q_4(s) &= 1 + \frac{1}{2}(s-1) + \frac{B_2}{2!}(s-1)s + \frac{B_4}{4!}(s-1)s(s+1)(s+2) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

La réduction donne :

$$
\begin{aligned}
Q_2(s) &= \frac{B_2}{2!}(s+2)(s+3) \\
Q_4(s) &= \frac{B_4}{4!}(s+2)(s+4)(s+5)(s-9) \\
Q_6(s) &= \frac{B_6}{6!}(s+2)(s+4)(s+6)(s+7)(s^2-10s+45) \\
Q_8(s) &= \frac{B_8}{8!}(s+2)(s+4)(s+6)(s+8)(s+9)(s^3-9s^2+55s-175) \\
Q_{10}(s) &= \frac{B_{10}}{10!}(s+2)(s+4)(s+6)(s+8)(s+10)(s+11)\left[s^4-6s^3+\frac{232}{5}s^2-\frac{1122}{5}s+567\right] \\
Q_{12}(s) &= \frac{B_{12}}{12!}(s+2)(s+4)\dots(s+12)(s+13)\left[s^5-s^4+\dots-\frac{1091475}{691}\right]
\end{aligned}
$$

Il semble que l'on puisse écrire :

$$
\begin{aligned}
Q_{2r-2}(s) = \frac{B_{2r-2}}{(2r-2)!}(s+2)(s+4)\dots(s+2r-2)(s+2r-1)\Big\{ & s^{r-2}+(r^2-8r+6)s^{r-3}+\dots \\
& + \frac{(2r-2)!}{2^{r-1}(r-1)!(2r-1)B_{2^r-2}}\Big\}
\end{aligned}
$$

Le coefficient devant le second terme le plus élevé du polynôme

$$
q_{2r-2}(s) = s^{r-2}+(r^2-8r+6)s^{r-3}+\dots+\frac{(2r-2)!}{2^{r-1}(r-1)!(2r-1)B_{2^r-2}}
$$

ne fait guère de doute, pourvu que les termes du produit devant les crochets {} soient exacts. Le dernier terme de $q_r(s)$ est quant à lui trouvé sous la condition que les polynômes $Q_r(s)$ donnent la valeur correcte $(-\frac{1}{2})$ pour $\zeta(0)$ [1], ce qui est le cas pour les valeurs calculées de $Q_r(s)$.

À présent vient la question : les zéros de $q_r(s)$ ont-ils un rapport avec les zéros de la fonction zêta ? Jusqu'ici, je n'ai rien pu découvrir —

**E. Jacobsthal répond le 4 mars depuis Uppsala :**

— En toute honnêteté, je pense qu'il est très difficile et presque désespéré de dire quoi que ce soit sur les zéros de $q_r(s)$ et leur lien avec les zéros de la fonction $\zeta$. Quant aux zéros réels de $\zeta(s)$, ce sont aussi des zéros de $Q_r(s)$ si $\lambda$ est assez grand, mais cela prouve seulement que

$$
(s-1)\zeta(s) = Q_r(s) + R_r(s),
$$

l'intégrale de reste $R_r(s)$ pour un grand $\lambda$ s'annulant également en une partie des zéros réels $-2, -4, -6, \dots$

Mais je ne pense pas que l'on ait la moindre raison de croire que les zéros de $q_r(s)$ signifient quoi que ce soit pour les zéros complexes de $\zeta(s)$. Je ne peux pas prouver mon scepticisme ; c'est plutôt une sorte de pressentiment. Toute la fonction $\zeta$ est entourée d'un parfum de mystère. Elle ressemble

1. *Note de la traductrice : on trouve sur wikipedia que* $\zeta(0) = -\frac{\ln 2\pi}{2} \approx -0.91893\dots$.

à une chaste jeune fille qui préserve sa vertu. Les zéros sont son secret. Que savons-nous au fond de la fonction $\zeta$ ? Très peu. Nous connaissons très précisément d'autres fonctions transcendantes, mais la recherche dans le domaine de la fonction $\zeta$ ressemble à un travail pénible dans une forêt vierge à travers laquelle on réussit à peine à se frayer un chemin étroit vers le but. Tout ce qui se trouve à côté de ce chemin est plongé dans l'ombre et reste une *terra incognita*. Cet état de fait se retrouve si souvent dans notre science, et c'est — je pense — aussi la raison pour laquelle la recherche y est si attrayante. D'un autre côté, il est si difficile de n'utiliser que le premier terme d'un développement. Que sait-on au fond du résultat ? Pas même le O de Landau. —

**Atle Selberg répond à Viggo Brun le 15 mars 1946 depuis Oslo à une lettre de contenu similaire à celle envoyée à Jacobsthal :**

J'ai examiné pendant quelques jours la question que vous posez dans votre lettre, et je vais essayer d'y répondre du mieux que je peux, même si je ne suis pas particulièrement savant sur le sujet.

Pour autant que je sache, la question des zéros des approximations polynomiales de la fonction zêta n'a pas été traitée sous cet angle auparavant. J'ai moi-même pensé une fois à utiliser des approximations par des polynômes, mais ce n'était pas pour $(s-1)\zeta(s)$, mais plutôt pour la fonction :

$$s(1-s)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

dont je suis parti, et les polynômes étaient d'un tout autre type. Cela n'a malheureusement mené à aucun résultat.

En ce qui concerne les chances d'obtenir de nouveaux résultats par l'étude des polynômes $q_{2r}(s)$, je ne souhaite pas m'exprimer de manière définitive à ce sujet, mais je suis plutôt enclin à partager le point de vue sceptique de Jacobsthal. Mes raisons sont les suivantes :

1. Puisque la série obtenue en utilisant la formule de Euler-Maclaurin pour $(s-1)\zeta(s)$ est divergente, il est difficile de voir une raison fondamentale pour laquelle les zéros de $Q_{2r}(s)$ ou $q_{2r}(s)$ auraient un rapport quelconque avec les zéros de $\zeta(s)$. Les zéros réels $s=-2,-4,\ldots,-2r$ apparaissent dans $Q_{2r}(s)$ pour une tout autre raison, à savoir que $Q_{2r}(s)$ est un polynôme de degré au plus $2r+1$ qui interpole $(s-1)\zeta(s)$ pour les valeurs $s=1,0,-1,\ldots,-2r$. J'ai aussi regardé un peu les expressions elles-mêmes pour $q_{2r}(s)$ pour les premières valeurs de $r$, et il ne semble pas que les racines montrent une tendance à s'accumuler autour de la ligne $\sigma=\frac{1}{2}$. Le deuxième coefficient dans l'expression générale :

   $$q_{2r}(s)=s^{r-1}+(r^2-6r-1)s^{r-2}+\ldots$$

   semble également montrer que les racines ont généralement une partie réelle négative et une valeur absolue assez grande pour un grand $r$. Mais cela n'empêche pas qu'une partie des racines puisse s'approcher des zéros complexes de $\zeta(s)$.
2. Si ce dernier cas était vrai, il serait probablement très difficile de l'utiliser pour en savoir plus sur l'emplacement des zéros de $\zeta(s)$. Mon expérience personnelle avec les zéros de polynômes est que, mis à part les cas où l'on peut montrer par exemple que tous les zéros sont réels, ou plus généralement, situés sur une ligne droite, on ne peut généralement rien dire d'autre que des trivialités sur l'emplacement des zéros.

Comme vous le voyez, je suis plutôt pessimiste, mais je ne veux pas exclure complètement la possibilité de progresser par cette voie. Il vaudrait sans doute la peine de faire quelques calculs numériques pour voir si l'on trouve effectivement l'un des zéros de ces polynômes $q_{2r}$ à proximité des premiers zéros complexes de $\zeta(s)$, par exemple $\frac{1}{2} + i\,14, \dots$ etc.

**Carl Siegel répond à Viggo Brun le 11 avril 1946 depuis Princeton (U.S.A.) à une lettre de contenu similaire :**

— Votre question concernant les zéros des sections de l'approximation d'Euler pour la fonction zêta peut être attaquée de la manière suivante.

Si $A_n(x)$ désigne le polynôme de Bernoulli de degré $n$ et que l'on pose

$$P_n = P_n(s) = \frac{B_n}{n!}(s-1)s(s+1)\dots(s+n-2) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

où $B_1 = \frac{1}{2}$ et $B_n$ pour $n \neq 1$ est le $n$-ième nombre de Bernoulli, et de plus

(1) $$R_n(s) = \tfrac{1}{n!}(s-1)s(s+1)\dots(s+n-1) \int_1^\infty A_n(x-[x]) \tfrac{dx}{x^{s+n}}$$

pour $\sigma > 1 - n$ avec $s = \sigma + it$, et

$$(s-1)\zeta(s) - R_n(s) = Q_n(s)$$

alors d'après la formule d'Euler :

$$Q_n(s) = \sum_{k=0}^{n} P_k \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Supposons en outre $n$ pair et $> 0$. En vertu de (1), $R_n(s) = 0$ pour $s = 1, 0, -1, \dots, 2-n$ et aussi pour $s = 1-n, -n$, en raison de la relation de prolongement analytique de $R_n(s) = P_{n+2}(s) + R_{n+2}(s)$ dans le demi-plan $\sigma > -1 - n$. Symboliquement, on a :

$$(1 - B)^k = B^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Pour tout $s$ entier de l'intervalle $-n \leq s \leq 1$, on a donc :

$$(s-1)\zeta(s) = Q_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!}(s-1)s\dots(s+k-2) = (1-B)^{1-s} = B_{1-s}$$

en particulier $Q_n(s) = 0$ pour $s = -2, -4, \dots, -n+2, -n$.

Pour $s = -n-1$, on a de plus $R_{n+2}(s) = 0$, donc là aussi :

$$Q_n(s) = (s-1)\zeta(s) - R_n(s) = B_{1-s} - P_{n+2}(s) = 0.$$

Cela montre que $Q_n(s)$ possède les zéros $-2, -4, \dots, -n+2, -n$ et $-n-1$.

Pour déterminer l'emplacement des $\frac{n}{2} - 1$ zéros restants de $Q_n(s)$, on applique le théorème de Rouché : si deux fonctions $f = f(s)$ et $g = g(s)$ sont régulières à l'intérieur et sur une courbe simple fermée $C$ et que l'inégalité $|g| < |f|$ est vérifiée partout sur $C$, alors $f$ et $f + g$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de $C$. On choisit $f = P_n$ et $g = P_0 + P_1 + \dots + P_{n-1}$, on doit alors considérer des courbes $C$ le long desquelles les fonctions rationnelles $\varphi_k = P_k/P_n$ $(k = 0, \dots, n-1)$ vérifient l'inégalité $|\varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1}| < 1$.

Soit spécifiquement $G$ la région formée par l'ensemble des $n-2$ disques circulaires $|s+g| < 11$ pour $g = 1, 2, \ldots, n-2$ et soit $C$ sa frontière. Pour tout $k > 0$ pair, on a :

$$\frac{B_k}{k!} = 2\,(-1)^{\frac{k}{2}-1}(2\pi)^{-k}\zeta(k),$$

$$-\frac{B_{k+2}}{(k+2)!}\Big/\frac{B_k}{k!} = (2\pi)^{-2}\frac{\zeta(k+2)}{\zeta(k)} \geq (2\pi)^{-2}\frac{\zeta(4)}{\zeta(2)} = \frac{1}{60};$$

ainsi, en dehors de $G$, on a l'estimation :

$$\left|\frac{P_{k+2}}{P_k}\right| \geq \frac{1}{60}|s+k|\cdot|s+k-1| \geq \frac{11^2}{60} > 2 \quad (k = 2, 4, \ldots, n-2)$$

$$|\varphi_{2l}| < 2^{l-\frac{n}{2}} \qquad \left(l = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}-1\right).$$

De plus, on a sur $C$, $|s| \geq |s+1| - 1 \geq 10$ et $|s-1| \geq 9$, d'où :

$$\left|\frac{P_0+P_1}{P_2}\right| = \left|\frac{12}{3}\left(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{6}{5}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\right) < 1$$

$$|\varphi_0+\varphi_1| < |\varphi_2| < 2^{1-\frac{n}{2}}.$$

Le long de $C$, on a donc :

$$|\varphi_0+\varphi_1+\cdots+\varphi_{n-1}| < 2^{1-\frac{n}{2}} + \sum_{l=1}^{\frac{n}{2}-1} 2^{l-\frac{n}{2}} = 1$$

Ainsi, tous les zéros de $P_n$ se trouvent dans $G$, et $P_n(s)$, $Q_n(s)$ ont le même degré. Par conséquent, les $n$ zéros de $Q_n(s)$ se trouvent dans $G$. En particulier, les parties imaginaires de tous les zéros de $Q_n(s)$ se situent entre $-11$ et $11$.

Par une estimation plus fine de $\varphi_l$, que je ne souhaite pas détailler ici, on peut obtenir un résultat plus précis : Si un nombre positif arbitrairement petit $\epsilon < \frac{1}{2}$ est donné, il existe un nombre entier pair $h = h(\epsilon)$ dépendant uniquement de $\epsilon$, de sorte que pour $n > h$, les $\frac{n-h}{2}+2$ intervalles

$$g-\epsilon < s < g+\epsilon \quad (g = 1, 0, -1, -3, -5, \ldots, h+1-n)$$

contiennent chacun exactement un zéro de $Q_n(s)$. Les $\frac{h}{2}-3$ zéros restants, en dehors de ceux déjà connus en $-2, -4, \ldots, -n+2, -n, -n-1$, se trouvent tous dans un cercle de rayon $h$ autour du point $s = -n$. Cela montre en particulier que les zéros de $Q_n(s)$ pour $n \to \infty$ s'accumulent précisément contre les points $1, 0, -1, -2, -3, \ldots$