

Sur les propriétés additives des nombres

L. G. Schnirelmann

Introduction

Le problème général de la théorie additive des nombres est la possibilité de représenter tous les nombres naturels à l'aide d'un nombre limité de termes d'une suite donnée de nombres naturels, par exemple, la suite des nombres premiers ou la suite des puissances p -ièmes. Dans le présent article, cette question, c'est-à-dire la question de savoir quand la représentation de tous les nombres naturels à l'aide des nombres d'une suite arbitraire de nombres naturels est possible, est étudiée d'un point de vue général. L'outil principal est ici la notion de densité et la notion de suite sommatrice. Une suite de nombres naturels a une *densité positive* si le rapport entre le nombre $N(x)$ des termes de la suite ne dépassant pas x et x reste, pour tout x , supérieur ou égal à a où a est un nombre positif fixé. Par suite sommatrice nF' d'une suite donnée F' , nous entendons la suite des nombres $f_1 + f_2 + \dots + f_n$, où les f_i parcourent tous les nombres de F' et 0, tous les f_i n'étant pas simultanément nuls.

Exemples : une progression arithmétique a une densité positive ; en revanche, la suite des nombres premiers n'a pas de densité positive, car le rapport mentionné ci-dessus est de l'ordre de $1/\ln n$; la suite des puissances p -ièmes de tous les nombres naturels (p entier > 1) n'a pas non plus de densité positive, car pour elle, ce rapport est de l'ordre de $x^{1/p}/x = x^{1/p-1}$.

On peut montrer facilement qu'à l'aide des termes d'une suite de densité positive contenant le nombre 1, on peut représenter additivement, en utilisant un nombre limité de termes, tous les nombres naturels. Notre objectif est donc de donner pour des suites arbitraires un critère suffisant pour qu'à un certain n la suite sommatrice nF' ait une densité positive. On y parvient dans deux cas généraux :

1. Si les termes f de la suite F , de même que le nombre $B(z)$ de solutions de l'équation $f + f' = z$, en les nombres f, f' , de la suite F , ne croissent pas trop vite ; plus précisément, si

$$f_n = O(n\varphi(n)) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

et

$$\sum_{z=1}^{\infty} B^2(z) = O\left(\frac{x^3}{\varphi^4(x)}\right),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction positive croissante. Nous montrerons à l'aide de la méthode de Brun-Rademacher que ces conditions sont satisfaites pour la suite des nombres premiers.

2. Si la condition suivante est remplie :

Soit $A_i(x)$ le nombre de représentations du nombre i comme somme de u termes n_ν de la suite F' ne dépassant pas x (u entier naturel fixé), et soit

$$D(x) = \sum_{j=1}^x A_j^2(x).$$

Si pour un u convenablement choisi

$$D(x) = O\left(\frac{N\left(\frac{x}{u}\right)^{2u}}{x}\right), \quad (1)$$

où $N(x)$ est le nombre de termes n_ν de la suite F' ne dépassant pas x , alors nous pouvons montrer que uF' a une densité positive.

Nous pouvons estimer $D(x)$ à l'aide d'une fonction analytiquement plus commode. Posons

$$f(x, y) = \sum_{\nu=1}^k e^{2\pi i n_\nu y},$$

où n_k est le plus grand terme de la suite F' ne dépassant pas x . Alors, évidemment,

$$|f(x, y)|^{2u} = \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2(x) + 2 \sum_{\substack{j, l=1 \\ j \neq l}}^{un_k} A_j(x) A_l(x) \cos 2\pi y(j-l)$$

et, par conséquent,

$$\int_0^1 |f(x, y)|^{2u} dy = \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2(x) \gg \sum_{j=1}^x A_j^2(x) = D(x).$$

En nous basant sur cette formule fondamentale, nous montrerons que pour la suite des puissances p -ièmes, $D(x)$ satisfait l'inégalité (1).

Il est facile de voir qu'au lieu de la représentation intégrale pour $D(x)$, on peut utiliser une représentation analogue sous forme de somme ; alors, à l'aide de l'inégalité de Weyl ou de l'inégalité de van der Corput, qui jouent un rôle décisif dans les démonstrations du théorème de Waring proposées par Hardy-Littlewood et Vinogradov, on peut montrer facilement que pour cette représentation la relation (1) est satisfaite. On obtient ainsi une nouvelle démonstration du théorème de Waring.

Suites de densité positive

La caractéristique la plus simple et la plus naturelle d'une suite considérée comme un tout est sa *densité*. Les suites de grande densité forment la classe la plus simple de suites pour lesquelles les propriétés additives se démontrent encore de manière tout à fait élémentaire.

Établissons pour la suite quelques définitions et notations.

Définition 1. Une suite F de nombres naturels est appelée suite de densité positive $\geq a$ par rapport à la suite naturelle, ou, brièvement, suite dense, s'il existe un nombre positif a , ne dépendant que de F , tel que

$$N_F(x) \geq ax \quad (1)$$

pour tout x (où $N(x) = N_F(x)$ désigne le nombre de termes de la suite F ne dépassant pas x . L'inégalité (1) doit être satisfaite pour tout x . Ainsi la suite doit contenir, en particulier, le nombre 1.)

Nous écrirons $D(F) \geq a$.

Définition 2. Une suite de nombres naturels est appelée suite de densité presque positive ou suite presque dense si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{x} = a > 0. \quad (2)$$

Définition 3. Une suite de nombres naturels est appelée suite de densité fortement positive si pour chaque couple de nombres $\rho > 0$, $\sigma > 0$ il existe $x_0(\rho, \sigma)$ tel que

$$N(x, (1 + \rho)x) \geq (a - \sigma)\rho x \quad \text{pour } x > x_0(\rho, \sigma), \quad (3)$$

où $N(x, y)$ désigne le nombre de termes de la suite F compris dans l'intervalle $x < n \leq y$, et a ne dépend pas de ρ (du reste, comme il est facile de le voir, il suffit d'exiger que l'inégalité

$$N(x, (1 + \rho)x) \geq (a - \sigma)\rho x$$

ait lieu pour $x > x_0(\rho, \sigma)$); nous écrivons $SD(F) \geq a$.

Définition 4. Une suite F de nombres naturels est appelée une base des nombres naturels s'il existe deux entiers a et m , ne dépendant que de F , possédant la propriété suivante : tout entier $x > 0$ divisible par a est représentable comme somme d'au plus m termes de la suite F . Alors, dans le cas où F contient 1, tout entier $x > 0$ peut être représenté additivement à l'aide d'au plus $m + a - 1$ termes de la suite F .

Définition 5. Une suite F de nombres naturels est appelée une base forte des nombres naturels s'il existe trois nombres a , m et λ , ne dépendant que de F , avec a et m entiers, λ réel, tels que tout nombre $x > 0$ divisible par a soit représentable comme somme d'au plus m termes de la suite F , chacun d'eux étant supérieur à λx .

Définition 6. Une sous-suite F_1 de la suite F est appelée une sous-suite dense par rapport à la densité $> a$ si

$$\frac{N_{F_1}(x)}{N_F(x)} \geq a, \quad (4)$$

où a est un nombre positif fixé.

Définition 7. Une suite de nombres naturels est appelée une base stable des nombres naturels si non seulement elle-même, mais aussi chacune de ses sous-suites denses forme une base des nombres naturels.

Définition 8. Soient données des suites $F_1, F_2, \dots, F_n$, et soit f_k un terme de la suite F_k . La suite des différents nombres, rangés par ordre croissant, de la forme $f_1 + f_2 + \dots + f_n$, où $f_1, f_2, \dots, f_n$ parcourent indépendamment les uns des autres tous les termes des suites $F_1, F_2, \dots, F_n$ et le nombre 0 (tous les f_i n'étant pas nuls), est appelée la somme des suites $F_1, F_2, \dots, F_n$ et est notée $F_1 + F_2 + \dots + F_n$. Si, en particulier, $F_1 = F_2 = \dots = F_n = F$, la somme de ces suites est notée nF .

1. Partie I

§1. Suites de densité positive

Soient $F_1, \dots, F_k$ des suites de densités

$$D(F_1) \geq a_1, \dots, D(F_k) \geq a_k.$$

On a l'inégalité

$$1 - D(F_1 + \dots + F_k) \leq (1 - a_1) \dots (1 - a_k). \quad (5)$$

Démonstration. Désignons par $f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n}$ les termes de la suite F_1 qui ne dépassent pas un nombre arbitrairement fixé x . On a $n \geq a_1 x$.

Entre chaque paire de termes voisins f_{1i} et f_{1i+1} dont la différence dépasse 1, on peut introduire un nombre non nul de nouveaux termes de la forme $f_{1i} + f_{2j}$. Le nombre de termes de la forme $f_{1i} + f_{2j}$ qui peuvent être ainsi introduits entre f_{1i} et f_{1i+1} , $i = 1, \dots, n-1$, respectivement entre f_{1n} et x (y compris x , si $f_{1n} < x$), et qui sont différents de f_{1i} et f_{1i+1} , n'est pas inférieur à $a_2(f_{1i+1} - f_{1i} - 1)$ pour $i = 1, \dots, n-1$, respectivement pas inférieur à $a_2(x - f_{1n})$. Par conséquent, le nombre total de nouveaux termes introduits n'est pas inférieur à

$$a_2 \sum_{i=1}^{n-1} (f_{1i+1} - f_{1i} - 1) + a_2(x - f_{1n}) = a_2(x - n).$$

Donc le nombre de termes de la somme $F_1 + F_2$ ne dépassant pas x ne peut être inférieur à $n + a_2(x - n)$. Comme $n \geq a_1 x$, on a

$$n + a_2(x - n) \geq a_1 x(1 - a_2) + a_2 x = (a_1 + a_2 - a_1 a_2)x,$$

c'est-à-dire

$$D(F_1 + F_2) \geq a_1 + a_2 - a_1 a_2, \quad 1 - D(F_1 + F_2) \leq (1 - a_1)(1 - a_2).$$

Par application répétée de cette inégalité, on obtient en général

$$1 - D(F_1 + \dots + F_k) \leq (1 - a_1) \dots (1 - a_k).$$

□

Théorème 9. Soit $k \geq 3$ et soient données des suites $F_1, \dots, F_k$ de densités $D(F_i) \geq a_i$. Si la moyenne géométrique M des nombres a_i satisfait l'inégalité

$$M = \sqrt[k]{a_1 \dots a_k} \geq \frac{\ln(k-1)}{k-1}, \quad (6)$$

alors la somme $F_1 + \dots + F_k$ coïncide avec toute la suite naturelle $\mathbb{N}$.

Démonstration. D'après le lemme 1,

$$1 - D(F_1 + \dots + F_{k-1}) \leq (1 - a_1) \dots (1 - a_{k-1}) < e^{-(a_1 + \dots + a_{k-1})}.$$

D'où pour $F = F_1 + \dots + F_{k-1}$ on a

$$1 - D(F) < e^{-(a_1 + \dots + a_{k-1})}. \quad (7)$$

De plus, on a $N_F(x) \geq a_k x$, où l'on a posé $N_F(x) = N(x)$. Soit $F_k = (n_1, n_2, \dots)$. Les suites $n_1, n_2, \dots$ et $x - n_1, x - n_2, \dots$ ont évidemment entre 0 et x le même nombre de termes. Donc la suite $x - n_1, x - n_2, \dots$ a entre 0 et x au moins $a_k x$ termes. Si $N_F(x) + N_{x-F_k}(x) > x$, alors au moins un terme de la suite $x - n_1, x - n_2, \dots$ doit être égal à un terme de la suite F ou à zéro, c'est-à-dire que le nombre x doit être un terme de la somme $F + F_k$. Pour que l'inégalité $N_F(x) + N_{x-F_k}(x) > x$ soit satisfaite pour tout x , il suffit, en vertu de (7), que l'inégalité

$$e^{-(a_1 + \dots + a_{k-1})} + (1 - a_k) < 1$$

soit satisfaite, c'est-à-dire

$$a_k > e^{-(a_1 + \dots + a_{k-1})}. \quad (8)$$

En vertu de la symétrie, on peut remplacer k par n'importe lequel des nombres $1, 2, \dots, k$. Ainsi chaque inégalité de la forme

$$a_i > e^{-\sum_{j \neq i} a_j}$$

est une condition suffisante pour que

$$F_1 + \dots + F_k = \mathbb{N}. \quad (8a)$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\ln \frac{1}{a_i} < \sum_{j \neq i} a_j.$$

ou, en sommant sur i ,

$$\sum_{i=1}^k \ln \frac{1}{a_i} < (k-1) \sum_{i=1}^k a_i. \quad (9)$$

Il est facile de voir que (9) représente aussi une condition suffisante pour que $F_1 + \dots + F_k = \mathbb{N}$. En effet, de (9) il découle qu'au moins une des inégalités (8) est satisfaite. De l'inégalité connue entre les moyennes géométrique et arithmétique, il découle que (9) est satisfaite si l'inégalité suivante a lieu :

$$(k-1) \sqrt[k]{\prod_{i=1}^k a_i} \geq \ln \sqrt[k]{\prod_{i=1}^k \frac{1}{a_i}}. \quad (10)$$

En désignant $1/\sqrt[k]{\prod a_i}$ par z , on obtient pour z l'inégalité $z \ln z < k-1$ (z , évidemment, peut être pris supérieur à 1 ; pour $z = 1$ l'assertion du théorème est triviale). Cette inégalité sera certainement satisfaite si

$$1 < z \leq \frac{k-1}{\ln(k-1)}, \quad k > 3.$$

Cette dernière inégalité peut aussi s'écrire comme suit :

$$\sqrt[k]{\prod a_i} \geq \frac{\ln(k-1)}{k-1}.$$

Pour $k = 1, 2, 3$, cette inégalité ne convient pas. Dans le premier cas, pour que la relation $F_1 = \mathbb{N}$ soit satisfaite, il est évidemment nécessaire que $D(F_1) = 1$, et dans le second cas, pour que la relation $F_1 + F_2 = \mathbb{N}$ soit satisfaite, d'après le raisonnement ci-dessus, il suffit que $D(F_1) + D(F_2) > 1$, car alors $N_{F_1}(x) + N_{F_2}(x) > x$. $\square$

Les théorèmes suivants se démontrent de manière analogue :

Théorème 10 (1.1). *Toute suite F de densité positive $> a$ forme une base des nombres naturels, satisfaisant la relation $4[1/a]F = \mathbb{N}$.*

Théorème 11 (1.2). *Toute suite F de densité presque positive forme une base des nombres naturels.*

Démonstration. Par définition de la densité presque positive, il existe un nombre $x_0 = x_0(\varepsilon)$ tel que pour tout $x > x_0$ on ait l'inégalité

$$\frac{N(x)}{x} > a - \varepsilon = \beta$$

(pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit). En adjoignant à F tous les nombres de 1 à $x_0(\varepsilon)$ inclus, on obtient une suite F_1 possédant évidemment une densité positive $> \beta$. Pour $h = 4[1/\beta]$ on a $hF_1 = \mathbb{N}$. En effet, si $\beta > 1/2$, c'est-à-dire $1 < 1/\beta < 2$, $h = 4$, alors $2D(F_1) > 1$, et, par conséquent, $2F_1 = \mathbb{N}$, d'après la remarque finale du théorème 1. Dans le cas contraire, pour démontrer la relation $hF_1 = \mathbb{N}$, il suffit, sur la même base, de montrer que $D(h/2F_1) = b > 1/2$. Comme, d'après le lemme 1,

$$1 - b < (1 - \beta)^2,$$

il suffit de montrer que $-\ln(1 - \beta) > \ln 2$ ou $\beta > \ln 2$. Mais ces inégalités sont bien satisfaites, car $\beta > 2/3$ et $\ln 2 < 2/3$. (On peut d'ailleurs démontrer que déjà $3F_1 = \mathbb{N}$.) Ainsi tout x peut être représenté comme somme d'au plus $4[1/\beta]$ termes de la suite F_1 et donc d'au plus $4[1/\beta]$ termes de F et d'un terme ne dépassant pas $4[1/\beta]x_0$. Désignons ce dernier nombre par $A = A(\varepsilon)$; ainsi la différence entre deux termes quelconques de la suite $4[1/\beta]F$ ne dépasse pas en valeur absolue $2A$,

c'est-à-dire que pour tout nombre x on peut trouver deux termes x_1 et x_2 de la suite $4[1/\beta]F$ tels que $0 < x_2 - x_1 \leq 2A$ et $x_1 < x < x_2$. On a identiquement

$$x = \frac{x_1(x_2 - x) + x_2(x - x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Soit u le plus petit commun multiple des nombres $1, 2, \dots, 2A$. On a

$$ux = \frac{u(x_2 - x)}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{u(x - x_1)}{x_2 - x_1}x_2.$$

Les nombres $\frac{u(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$ et $\frac{u(x - x_1)}{x_2 - x_1}$ sont entiers, ≥ 0 et $< u$. Ainsi tout nombre de la forme ux est représentable comme somme d'au plus $8[1/\beta]u$ termes de la suite F . Les deux théorèmes sont donc démontrés. $\square$

Théorème 12 (1.3). *Soit $k \geq 3$. Si la suite F a une densité $\geq a$ et si pour certains entiers $a_1, \dots, a_k$ l'inégalité*

$$a \sqrt[k]{a_1 \dots a_k} \geq \frac{\ln(k-1)}{k-1} \quad (11)$$

est satisfaite, alors parmi $k+1$ nombres consécutifs $n, n+1, \dots, n+k$, on peut en trouver au moins un x pour lequel l'équation

$$x = a_1 f_1 + \dots + a_k f_k$$

est soluble en nombres f_i de la suite F .

Démonstration. Formons les suites $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ de la forme $1 + a_1 f_1, 1 + a_2 f_2, \dots, 1 + a_k f_k$, où $f_1, f_2, \dots, f_k$ parcourent tous les nombres de la suite F et 0. On a les inégalités

$$D(\Phi_i) \geq a a_i.$$

D'où, d'après (11) et le théorème 1, il s'ensuit que l'équation $x = \varphi_1 + \dots + \varphi_k$, où φ_i désigne un terme de la suite Φ_i ou 0, est toujours soluble. L'assertion 1.3 est donc démontrée. $\square$

§2. Suites de densité fortement positive

Lemme 13. *Soit F' une suite de densité fortement positive $> a$. Pour tous nombres positifs ρ et σ donnés, on peut trouver un nombre x_0 , ne dépendant que de ces nombres et de F , tel que pour $x > x_0$ il existe entre x et $(1 + \rho)x$ (bornes incluses) un nombre y possédant la propriété que pour $z > y$ on ait l'inégalité*

$$N(y, z) \geq (a - \sigma)(z - y), \quad (12)$$

où $N(y, z)$ désigne le nombre de termes f_n de la suite F compris dans l'intervalle $y \leq f_n \leq z$.

Démonstration. Choisissons x si grand que pour $z \geq (1 + \rho)x$ on ait l'inégalité

$$N(x, z) \geq (a - \sigma/2)(z - x). \quad (13)$$

On a

$$N(x, x_1) + N(x_1, x_2) \geq N(x, x_2). \quad (14)$$

Supposons que le lemme 2 soit faux. Il existe donc un nombre $x_1 > x_0$ satisfaisant à $N(x, x_1) \leq (a - \sigma)(x_1 - x)$. Si $x_1 \geq (1 + \rho)x$, on a déjà, en vertu de (13), une contradiction. Si $x_1 < (1 + \rho)x$, on peut à nouveau trouver un nombre x_2 plus grand avec la propriété $N(x_1, x_2) \leq (a - \sigma)(x_2 - x_1)$, et ainsi de suite. Après un nombre fini d'étapes, on arrivera à un nombre x_n qui sera $\geq (1 + \rho)x$ (car on peut prendre les x_i entiers) et pour lequel on aura l'inégalité $N(x, x_n) \leq N(x, x_1) + \dots + N(x_{n-1}, x_n) \leq (a - \sigma)(x_1 - x + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1}) = (a - \sigma)(x_n - x)$, ce qui est impossible en vertu de (13). $\square$

Théorème 14. Soient données des suites $F'_1, \dots, F'_k$, $k \geq 3$, de densités fortement positives

$$SD(F'_i) \geq a_i.$$

Si l'inégalité

$$\sqrt[k]{a_1 \dots a_k} \geq \frac{\ln(k-1)}{k-1} \quad (14a)$$

est satisfaite, alors tout entier $x > 0$ peut être représenté comme somme de k termes tels que 1) ils soient tous $\geq x/(k+1)$ et 2) deux quelconques d'entre eux appartiennent à des suites différentes $F_1, \dots, F_k$. Ainsi $F_1 + \dots + F_k$ est une base forte des nombres naturels.

Démonstration. Choisissons $\sigma > 0$ si petit que l'inégalité

$$\sqrt[k]{(a_1 - \sigma) \dots (a_k - \sigma)} \geq \frac{\ln(k-1)}{k-1} \quad (14b)$$

subsiste. En vertu du lemme 2, on peut trouver un entier x_0 si grand, ne dépendant que de $F_1, \dots, F_k$ et σ , que pour chaque $x > x_0$ on puisse choisir dans chaque suite F_k un terme y_i compris entre $x/(k+1)$ et x , possédant la propriété que pour tout $z > y_i$ on ait

$$N(y_i, z) \geq (a_i - \sigma)(z - y_i).$$

Ainsi pour les suites $F_1 - y_1, \dots, F_k - y_k$ on a les inégalités

$$D(F_i - y_i) \geq a_i - \sigma \quad (i = 1, \dots, k).$$

Comme le nombre $x - y_1 - \dots - y_k$, par le choix des y_i , est positif ou nul, il est, d'après (14b) et le théorème 1, représentable comme somme d'au plus k termes $f_{i_1 j_1} - y_{i_1}, \dots, f_{i_M j_M} - y_{i_M}$, où

$$f_{i_\nu j_\nu} \geq y_{i_\nu} \geq \frac{x}{k+1}.$$

Supposons que la numérotation des suites $F_1, \dots, F_k$ soit choisie de sorte que ces termes soient exactement les M premiers :

$$f_{1j_1} - y_1, \dots, f_{Mj_M} - y_M.$$

On a donc

$$x - y_1 - \dots - y_k = f_{1j_1} + \dots + f_{Mj_M} - y_1 - \dots - y_M.$$

D'où

$$x = f_{1j_1} + \dots + f_{Mj_M} + y_{M+1} + \dots + y_k.$$

Dans cette somme, de chaque suite F_i on n'a emprunté qu'un seul terme, et tous ces termes sont évidemment $> x/(k+1)$. $\square$

§3. Suites à croissance lente

Définition 15. Une suite F' est appelée à croissance lente si la suite sommatrice $2F'$ est une suite dense, c'est-à-dire a une densité positive.

Théorème 16. Soit donnée une suite $F' = (n_1 = 1, n_2, \dots)$ dont le terme général satisfait l'inégalité

$$n_i < Ci\varphi(i), \quad (15)$$

où C est une constante et $\varphi(i)$ une fonction positive croissante. Désignons par $B(z) = B_F(z)$ le nombre de solutions de l'équation $n_i + n_j = z$ et par $R(x)$ la somme

$$R(x) = \sum_{z=1}^x B^2(z). \quad (16)$$

Si pour la suite F l'inégalité

$$R(x) < C_1 \frac{x^3}{\varphi^4(x)} \quad (17)$$

est satisfaite, alors F 1) est une suite à croissance lente et 2) forme une base stable des nombres naturels.

Démonstration. Le nombre $N(z)$ de termes de la suite F ne dépassant pas un nombre fixé z est, pour $z > z_0$, en vertu de (15), supérieur à

$$\frac{z}{2C\varphi(z)}, \quad (18)$$

car alors

$$z < n_{N(z)} + 1 < C(N(z) + 1)\varphi(N(z) + 1) \leq 2CN(z)\varphi(z),$$

puisque nous pouvons supposer que F' ne coïncide pas avec toute la suite naturelle. D'autre part, la somme $\sum_{z=1}^x B(z)$ de tous les nombres de solutions des équations $n_i + n_j = z$, $z = 1, \dots, x$, c'est-à-dire le nombre de solutions de l'inégalité $n_i + n_j \leq x$, n'est pas inférieur au nombre de solutions de cette même inégalité sous les conditions supplémentaires $n_i \leq x/2$, $n_j \leq x/2$. Ce dernier nombre est évidemment égal à $N^2(x/2)$. D'où, en vertu de (18), pour $x > 2z_0$,

$$\sum_{z=1}^x B(z) \gg N^2(x/2) \gg \frac{x^2}{16C^2\varphi^2(x/2)} \gg \frac{x^2}{16C^2\varphi^2(x)}. \quad (19)$$

Désignons par $M(x)$ le nombre de ceux des $B(z)$ pour $z = 1, \dots, x$ qui sont non nuls. De l'inégalité de Schwarz il découle (pour $x > 2z_0$) :

$$M(x) \gg \frac{(\sum_{z=1}^x B(z))^2}{\sum_{z=1}^x B^2(z)} \gg \frac{x^4}{256C^4\varphi^4(x)} : C_1 \frac{x^3}{\varphi^4(x)} = \frac{x}{256C^4C_1}. \quad (20)$$

Cette dernière inégalité montre que le nombre de termes de la suite sommatrice $2F'$ ne dépassant pas x est pour $x > 2z_0$ au moins égal à $x/(256C^4C_1)$. Donc la suite $2F'$ possède une densité positive et, par conséquent, d'après le théorème I,1, est une base des nombres naturels. Pour démontrer la validité de la seconde assertion, remarquons que pour une sous-suite dense F_1 de la suite F' , de densité relative $> a$, on a les inégalités

$$N_{F_1}(x) \gg aN(x), \quad B_{F_1}(z) \ll B(z), \quad (21)$$

de sorte que l'inégalité (19) subsiste en remplaçant $1/(16C^2)$ par $a/(16C^2)$. $\square$

Théorème 17. Soit $\varphi(i)$ pour $i > i_0$ positive, croissante, et $\varphi(i) = O(i)$. Soit F' une suite $(n_1 = 1, n_2, \dots)$ avec

$$n_i = O(i\varphi(i)). \quad (22)$$

Soit $A(y, x)$, pour $0 < y < x$, le nombre de solutions de l'équation $n_i - n_j = y$, $n_i < x$, $n_j < x$. Posons

$$\sum_{y=1}^x A^2(y, x) = O\left(\frac{x^3}{\varphi^4(x)}\right). \quad (23)$$

Alors F' est une suite à croissance lente et une base stable des nombres naturels.

Démonstration. Soit $N(s)$ le nombre de $n_i < s$. Alors pour $x > 2$, en vertu de (22),

$$x/2 < n_{N(x/2)} + 1 < C_1(N(x/2) + 1)\varphi(N(x/2) + 1) \leq 2C_1N(x/2)\varphi(x), \quad (24)$$

par conséquent, en désignant par $B(m)$ le nombre de solutions de l'équation $m = n_i + n_j$ et par $M(x)$ le nombre de $B(m) \neq 0$ pour $m < x$, on a

$$\frac{x^4}{C_2\varphi^4(x)} < N^4(x/2) < \left(\sum_{m=1}^x B(m)\right)^2 \leq M(x) \sum_{m=1}^x B^2(m). \quad (25)$$

$B^2(m)$ est le nombre de solutions de l'équation double

$$m = n_i + n_j = n_u + n_v. \quad (26)$$

Pour $i = u$ il y a

$$B(m) \leq \frac{1 + B^2(m)}{2} \quad (27)$$

quadruplets de nombres satisfaisant à cette équation ; la partie de la somme $\sum_{m=1}^x B^2(m)$ fournie par de tels quadruplets pour $i \geq u$ ne dépasse pas

$$2 \sum_{y=1}^x A^2(y, x), \quad (28)$$

car pour $i > u$ on a $y = n_i - n_u = n_v - n_j$, qui sera compris entre 1 et x , puisque tous les $n_w < x$. Ainsi, en vertu de (23), pour $x > x_0$,

$$\sum_{m=1}^x B^2(m) \leq x/2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^x B^2(m) + C_3 \frac{x^3}{\varphi^4(x)}, \quad (29)$$

d'où

$$\frac{x^4}{C_2\varphi^4(x)} < M(x) \left(x + 2C_3 \frac{x^3}{\varphi^4(x)}\right) < C_4 M(x) \frac{x^3}{\varphi^4(x)}, \quad (30)$$

c'est-à-dire

$$M(x) > \frac{x}{C_5}. \quad (31)$$

Que la suite F' forme aussi une base stable des nombres naturels se démontre exactement de la même manière que dans la partie finale de la démonstration du théorème 3. $\square$

2. Appendice à la Partie I

§4. Suites formant des bases stables des nombres naturels

Théorème 18. *Soit donnée une suite de la forme*

$$[r(n)] \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (32)$$

où $r(t)$ est une fonction réelle, trois fois différentiable de la variable réelle t , satisfaisant pour $t > 0$ aux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} r(t) &> 0, \quad r'(t) > 1, \\ 0 &< \frac{c_1}{t \ln t} < r''(t) < \frac{c_2}{t} \quad \text{pour } t > 1, \\ 0 &> r'''(t) > -\frac{c_3}{t^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Alors F forme une base stable des nombres naturels.

Démonstration. 1. *Remarques préliminaires.* De (33), par intégration, on obtient

$$c_1 \ln \ln t < r'(t) < c_4 \ln t \quad \text{pour } t > 1. \quad (33a)$$

Soit $b(t) = r'(t)$. D'après (33), pour $t > 1$,

$$\frac{c_1}{t \ln t} < b'(t) < \frac{c_2}{t}, \quad 0 > b''(t) > -\frac{c_3}{t^2}. \quad (34)$$

D'où

$$b(t + \lambda b(t)) = b(t) + b'(t + \lambda b(t))b(t), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Comme $b'(t + \lambda b(t)) < \frac{c_2}{t + \lambda b(t)} < \frac{c_2}{t}$, on obtient, en vertu de (33a),

$$b(t + \lambda b(t)) - b(t) < \frac{c_2 b(t)}{t} = o(1).$$

Soit $u(x)$ la fonction $b(e^x)$. Alors

$$u'(x) = b'(e^x)e^x < c_2. \quad (35)$$

Par conséquent,

$$u(\ln t - 2 \ln b(t)) = u(\ln t) - 2u'(\ln t - 2 \ln b(t)) \ln b(t) > u(\ln t) - c' \ln b(t). \quad (36a)$$

Donc pour b on obtient, en vertu de (33a), pour $t > t_0$,

$$b\left(\frac{t}{\ln t}\right) > b(t) - c' \ln b(t) > \frac{b(t)}{2}. \quad (36)$$

Soit $\Psi(x)$ la fonction réciproque de $b(x)$. Comme $b(x)$ est strictement croissante, $\Psi(x)$ est aussi strictement croissante. On a

$$\Psi'[b(x)] = 1/b'(x), \quad \Psi'(x) = 1/b'(\Psi(x)).$$

De plus, de $r'(t) = b(t) > 1$ et $b'(t) > 0$, on déduit que pour $x > 1$,

$$0 < \Psi'(x) < c_5 \Psi(x). \quad (37)$$

De (34) et (35) on déduit

$$|\Psi''(x)| < c_6 \Psi(x) \ln \Psi(x) \quad \text{pour } x > 1. \quad (38)$$

2. *Estimation de la somme $\sum_{y=1}^x A^2(y, x)$.* Soit $A(y, x)$ le nombre de solutions de $n_i - n_j = y$, $n_i, n_j \leq x$. Nous allons estimer

$$S(x) = \sum_{y=1}^x A^2(y, x).$$

Soit n un entier fixé, et soit $u = n_i - n_j$. Pour y fixé, le nombre de solutions de $n_i - n_j = y$ est $A(y, x)$. Alors $A^2(y, x)$ est le nombre de quadruplets (i, j, k, l) tels que $n_i - n_j = n_k - n_l = y$. En considérant les cas $i = k$, $i = l$, etc., on obtient une majoration de $S(x)$ en fonction de la fonction Ψ et de ses dérivées. Le résultat est :

$$S(x) = O\left(\frac{x^3}{\ln^4 x}\right). \quad (39)$$

(La démonstration complète de cette estimation est très technique et repose sur des découpages d'intervalles et des estimations de sommes à l'aide des inégalités de van der Corput et de Weyl.)

3. *Construction d'une sous-suite dense.* On montre qu'il existe une sous-suite Φ de la suite F' contenant $A = [ab(x)]$ termes dans l'intervalle (a, b) , où

$$a = \ln^3 x b^3(x), \quad b = \ln^3 x b^4(x). \quad (40)$$

On considère alors les sommes $\varphi_i + f_j$ avec $\varphi_i \in \Phi$, $f_j \in F'$, $f_j \leq x - \varphi_i$. On montre que le nombre de représentations distinctes est $\gg x$, ce qui prouve que $2F'$ a une densité presque positive. Enfin, on utilise le théorème 1.2 pour conclure que $2F'$ est une base, et donc que F' est une base stable. La démonstration de la stabilité repose sur le fait que toute sous-suite dense de F' hérite des mêmes propriétés de répartition. $\square$

Tout nombre entier peut être décomposé en 25 termes de la forme $[n \ln n]$ et un terme ne dépassant pas un certain nombre fixé. Dans ce cas, on trouve que pour $x \geq x_0$ le nombre de solutions de l'équation

$$[n \ln n] = [m \ln m] = u, \quad n \ln n < x$$

pour

$$b^3(x) \ln^3 x < u < b^4(x) \ln^3 x \quad (b(x) = \ln x + 1)$$

ne dépasse pas $3,1 \ln^2 x$. Il en résulte que la suite sommatrice $[n \ln n] + [m \ln m]$ possède une densité presque positive supérieure à $1/6$. De là, en vertu des théorèmes I,1 et I,2, découle l'assertion.

De même, on peut démontrer la possibilité de décomposer les nombres entiers en un nombre limité de termes de la forme $[\ln^r(n)]$, $[n \ln \ln n]$ ($n \geq n_0$), etc.

3. Partie II

§1. La suite des nombres premiers

Théorème 19. *La suite $p_1 = 1, p_2, p_3, \dots$, où les p_i pour $i > 1$ parcourent les nombres premiers dans l'ordre croissant, forme une base stable des nombres naturels.*

Lemme 20 (de Brun-Rademacher). *Soit $P(D, x)$ le nombre de nombres $z \leq x$ congrus à $a \pmod{D}$, où $(a, D) = 1$. Soient $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers, et soit $P(D, x; p_1, \dots, p_r)$ le nombre de $z \leq x$ tels que*

$$z \equiv a_i \pmod{p_i} \quad \text{ou} \quad z \equiv b_i \pmod{p_i}, \quad (i = 1, \dots, r), \quad z \equiv a \pmod{D}.$$

Alors, pour D fixé et p_i premiers ne divisant pas D , on a

$$P(D, x; p_1, \dots, p_r) \leq k_0 x \left(\frac{1}{D} \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{2}{p_i} \right) + \frac{1}{\ln^2 x} \right). \quad (101)$$

Démonstration. (La démonstration est très technique ; elle fait intervenir un crible et des estimations de sommes.) $\square$

Lemme 21. *Soit $A(u, x)$ le nombre de solutions de l'équation*

$$p_i - p_j = u, \quad p_i, p_j \leq x.$$

Alors

$$\sum_{u=1}^x A^2(u, x) = O\left(\frac{x^3}{\ln^4 x}\right). \quad (102)$$

Démonstration. La démonstration utilise le lemme de Brun-Rademacher. $\square$

Démonstration du théorème. En vertu des lemmes 1 et 2 et de (102), on a pour $x > x_2$

$$\sum_{u=1}^x A^2(u, x) \ll \frac{x^3}{\ln^4 x}.$$

Comme, d'après Tchebychev, $\pi(x) \asymp x/\ln x$, les hypothèses du théorème ci-dessus sont satisfaites. Il en découle l'assertion du théorème ci-dessus. $\square$

Corollaire 22. *Les nombres premiers d'une progression arithmétique $at + b$, $t = 1, 2, \dots$, forment une base stable des nombres naturels. En effet, comme on le sait, la densité relative des nombres premiers dans la progression $at + b$ par rapport à l'ensemble des nombres premiers est égale à $1/\varphi(a)$. Ils forment donc une sous-suite dense de la suite des nombres premiers.*

§2. Critère général pour une base stable

Soit donnée une suite arbitraire $F' = (n_1, n_2, \dots)$ de nombres naturels. Soit $x > 0$ et n_k le plus grand terme de la suite F' ne dépassant pas x ; soit

$$f(x, y) = \sum_{\nu=1}^k e^{2\pi i n_\nu y}. \quad (108)$$

Théorème 23. *Si pour la suite F' on peut trouver un nombre $u > 0$, ne dépendant que de F' , tel que pour tout x on ait l'inégalité*

$$\int_0^1 |f(x, y)|^{2u} dy < C \left(\frac{N(x/u)^u}{x} \right)^{2u} = C \frac{N(x/u)^{2u}}{x^{2u}}, \quad (109)$$

où $C = C(u)$ est une constante indépendante de x et $N(x)$ est, comme précédemment, le nombre de termes de la suite F' ne dépassant pas x , alors F' est une base stable des nombres naturels.

Démonstration. Soit $A_i(x)$ le nombre de représentations du nombre i comme somme de u termes n_ν de la suite F' avec $n_\nu < x$.

On a

$$(f(x, y))^u = \sum_{j=1}^{un_k} A_j(x) e^{2\pi i j y}. \quad (110)$$

De plus,

$$|f(x, y)|^{2u} = \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2(x) + 2 \sum_{j,l=1}^{un_k} A_j(x) A_l(x) \cos 2\pi y(j-l). \quad (111)$$

D'où

$$\int_0^1 |f(x, y)|^{2u} dy = \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2(x). \quad (112)$$

Comme $A_j(x) = 0$ pour $j > un_k$, on a, en vertu de (109) et (112),

$$\sum_{j=1}^x A_j^2(x) \leq \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2(x) < C \frac{N(x/u)^{2u}}{x^{2u}}. \quad (113)$$

De plus,

$$\sum_{j=1}^x A_j(x) \geq \sum_{j=1}^x A_j(x/u). \quad (114)$$

Comme cette dernière somme est évidemment égale à $(N(x/u))^u$, on a l'inégalité

$$\sum_{j=1}^x A_j(x) \geq (N(x/u))^u. \quad (115)$$

Soit $M(x)$ le nombre de $A_j(x)$, $j < x$, non nuls ; alors (par l'inégalité de Schwarz)

$$M(x) \geq \frac{\left(\sum_{j=1}^x A_j(x) \right)^2}{\sum_{j=1}^x A_j^2(x)} \geq \frac{(N(x/u))^{2u}}{C N(x/u)^{2u} / x^{2u}} = \frac{x}{C}. \quad (116)$$

Cette dernière inégalité montre que la suite uF' possède une densité positive $> 1/C$, car $N_{uF'}(x) \geq M(x)$. Il en résulte que F forme une base. Pour démontrer que F' forme aussi une base stable, il suffit de remarquer que pour chaque sous-suite dense de la suite F' , de densité relative $\geq \alpha$, le membre de gauche de (109), comme il ressort de (112), ne peut que diminuer, de sorte que la condition (109) reste satisfaite en remplaçant la constante C par C/α^2 . $\square$

Remarque 24. La condition (109) dans l'énoncé du théorème 7 peut être remplacée par la suivante :

$$\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{x-1} \left| f\left(x, \frac{n}{x}\right) \right|^{2u} < C \frac{N(x/u)^{2u}}{x^{2u}}. \quad (117)$$

En effet, en posant $\alpha = 1/x$, on a

$$\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{x-1} \left| f\left(x, \frac{n}{x}\right) \right|^{2u} \geq \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2(x).$$

Si la condition (117) est satisfaite, alors la condition (109) l'est aussi. La condition (117) peut aussi s'écrire sous la forme

$$\sum_{n=0}^{x-1} \left| f\left(x, \frac{n}{x}\right) \right|^{2u} < CN(x/u)^{2u}. \quad (120)$$

§3. Application à une généralisation du théorème de Waring

Théorème 25. La suite des puissances $F' = (1^p, 2^p, \dots)$ (p entier positif arbitraire) forme une base stable des nombres naturels.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, nous allons montrer que pour les suites de puissances p -ièmes, la condition (117) est satisfaite. Nous utiliserons pour cela les méthodes d'estimation connues, développées dans les démonstrations du théorème de Waring mentionnées ci-dessus (par exemple, dans la démonstration de Vinogradov). $\square$

Énoncé des lemmes

Lemme 26 (Inégalité de Landau-van der Corput). Soit $g(v)$ une fonction réelle différentiable de la variable v , satisfaisant pour $m \geq v \geq n$ (m, n entiers, $m > n$) aux conditions

$$0 < \lambda \leq g'(v), \quad |g'(v)| \leq \lambda,$$

où λ est un nombre fixé. Alors on a l'inégalité

$$\left| \sum_{v=n}^m e^{2\pi i g(v)} \right| \leq \frac{1}{\sin(\pi \lambda)} + \frac{1}{\sin(\pi \lambda)} \int_n^m |g'(v)| dv.$$

Lemme 27 (Inégalité de Weyl). Soit $f(h)$ un polynôme de degré p en h avec coefficient dominant α . On a l'inégalité

$$\left| \sum_{h=1}^n e^{2\pi i f(h)} \right|^{2^{p-1}} \leq n^{2^{p-1}} + \sum_{h_1, \dots, h_{p-1}} \min \left(n, \frac{1}{\|p! \alpha h_1 \dots h_{p-1}\|} \right),$$

où $\|\cdot\|$ désigne la distance à l'entier le plus proche.

Lemme 28. Le nombre $A = A(x, y)$ de solutions des relations

$$y \mid p! h_1 \dots h_{p-1}, \quad 0 < h_i \leq x^{1/p}, \quad (i = 1, \dots, p-1),$$

où $y, x, p \geq 1$ sont des entiers positifs fixés, pour tout $\varepsilon > 0$ ne dépasse pas

$$A(x, y) \leq c(\varepsilon, p) \frac{x^{(p-1)/p}}{y} y^{\varepsilon p}.$$

Lemme 29 (Estimation de somme). *Pour chaque $a < x$, on a*

$$\left| \sum_{n \leq x^{1/p}} e^{2\pi i n^p a/x} \right| \leq cx^{1/p} \min \left(\frac{1}{y^{1/p}}, \frac{1}{|a'|^{1/p}} \right),$$

où a' est défini par $a = qy + a'$, $0 < |a'| \leq y/2$, et y est un entier positif.