

Géodésiques réciproques

Peter Sarnak

1. Résumé

Les géodésiques fermées sur la surface modulaire qui sont équivalentes à elles-mêmes lorsque leur orientation est inversée ont surgi récemment dans un certain nombre de contextes différents. Nous examinons leur relation avec les formes quadratiques binaires ambiguës de Gauss et avec les éléments d'ordre quatre dans leurs groupes de composition. Nous donnons une paramétrage de ces géodésiques et les utilisons pour les compter de manière asymptotique et pour étudier leur distribution.

Cette note concerne la paramétrage, le dénombrement et l'équidistribution des classes de conjugaison de sous-groupes diédraux infinis maximaux de $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ et leur lien avec les formes quadratiques ambiguës de Gauss. Ces sous-groupes apparaissent dans les travaux récents de Connolly et Davis sur les invariants pour le problème de la somme connexe des variétés [2]. Ils apparaissent également dans [28] (voir aussi les références s'y trouvant) en liaison avec la stabilité de la dynamique "kicked" des automorphismes du tore ainsi que dans la théorie des quasimorphismes de Γ . Dans [14], ils surgissent lors de la classification des feuilletages de codimension un des fibrés en tores sur le cercle. Apparemment, ils revêtent un intérêt assez large. Comme me l'a fait remarquer Peter Doyle, ces classes de conjugaison et les géodésiques réciproques correspondantes sont déjà discutées à quelques endroits dans les volumes de Fricke et Klein ([12], Vol. I, page 269, Vol. II, page 165). La discussion ci-dessous reproduit essentiellement une (longue) lettre que j'ai écrite à Jim Davis (juin 2005).

Notons $\{\gamma\}_\Gamma$ la classe de conjugaison dans Γ d'un élément $\gamma \in \Gamma$. Les classes elliptiques et paraboliques (c'est-à-dire celles avec $\mathrm{tr}(\gamma) \leq 2$ où $\mathrm{tr}(\gamma) = \text{trace}$) sont bien connues par l'examen du domaine fondamental standard de Γ agissant sur $\mathbb{H}$. Nous restreignons notre attention aux γ hyperboliques et nous appelons un tel γ primitif (ou premier) s'il n'est pas une puissance propre d'un autre élément de Γ . Notons P l'ensemble de ces éléments et Π l'ensemble correspondant des classes de conjugaison. Les éléments primitifs engendrent les sous-groupes cycliques hyperboliques maximaux de Γ . Nous appelons un $p \in P$ réciproque si $p^{-1} = S^{-1}pS$ pour un certain $S \in \Gamma$. Dans ce cas, $S^2 = 1$ (les démonstrations de ceci et des affirmations ultérieures sont données ci-dessous) et S est unique à multiplication à gauche près par $\gamma \in \langle p \rangle$. Soit R l'ensemble de ces éléments réciproques. Pour $r \in R$, le groupe $D_r = \langle r, S \rangle$ ne dépend que de r et c'est un sous-groupe diédral infini maximal de Γ . De plus, tous ces derniers surgissent de cette manière. Ainsi, la détermination des classes de conjugaison de ces sous-groupes diédraux revient à déterminer ρ , le sous-ensemble de Π constitué des classes de conjugaison d'éléments réciproques. Géométriquement, chaque $p \in P$ donne naissance à une géodésique fermée primitive orientée sur $\Gamma \backslash \mathbb{H}$, dont la longueur est $\log N(p)$ où $N(p) = [(\mathrm{tr}(p) + \sqrt{\mathrm{tr}(p)^2 - 4})/2]^2$. Des éléments conjugués donnent naissance à la même géodésique fermée orientée. Une géodésique fermée est équivalente à elle-même avec son orientation inversée si et seulement si elle correspond à un $\{r\} \in \rho$.

La question de savoir si un γ donné est conjugué à γ^{-1} dans Γ se reflète en partie dans la question locale correspondante. Si $p \equiv 3 \pmod{4}$, alors $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas conjugué à c^{-1} dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$; en revanche, si $p \equiv 1 \pmod{4}$, alors tout $c \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$ est conjugué à c^{-1} . Cette difficulté d'être conjugué dans $G(\overline{\mathbb{F}})$ mais pas dans $G(\mathbb{F})$ ne se présente pas si $G = \mathrm{GL}_n$ ($\mathbb{F}$ étant un corps) et elle est la source d'une difficulté générale fondamentale associée aux classes de conjugaison dans G , à la formule des traces (adélique) et à sa stabilisation [23]. Pour le cas qui nous occupe, lorsque l'on travaille sur $\mathbb{Z}$, il y a le problème supplémentaire associé à l'absence de principe local-global et en particulier le groupe des classes entre en jeu. En fait, certains éléments d'ordre divisant quatre dans le groupe de composition de Gauss jouent un rôle critique dans l'analyse des classes réciproques.

Pour étudier ρ , il est commode d'introduire d'autres involutions ensemblistes de Π . Soit ϕ_R l'involution de Π donnée par $\phi_R(\{\gamma\}) = \{\gamma^{-1}\}$. Soit $\phi_w(\{\gamma\}) = \{w^{-1}\gamma w\}$ où $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z})$ (modulo les automorphismes intérieurs, ϕ_w engendre les automorphismes extérieurs de Γ provenant de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z})$). ϕ_R et ϕ_w commutent et posons $\phi_A = \phi_R \circ \phi_w = \phi_w \circ \phi_R$. Ces trois involutions engendrent le groupe de Klein G d'ordre 4. L'action de G sur Π préserve P et Π . Pour H un sous-groupe de G , soit $\Pi_H = \{\{p\} \in \Pi : \phi(\{p\}) = \{p\} \text{ pour tout } \phi \in H\}$. Ainsi $\Pi_{\{e\}} = \Pi$ et $\Pi_{\langle \phi_R \rangle} = \rho$. Nous appelons les éléments de $\Pi_{\langle \phi_A \rangle}$ classes ambiguës (nous verrons qu'ils sont reliés aux classes ambiguës de formes quadratiques de Gauss) et ceux de $\Pi_{\langle \phi_w \rangle}$, classes inertes. Notons que l'involution $\gamma \rightarrow \gamma^t$ est, à une conjugaison près dans Γ , la même que ϕ_R puisque la contragrédiente satisfait $\mathrm{tr}(g^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $p \in P$ est réciproque si et seulement si p est conjugué à p^t .

Pour donner une paramétrage explicite de ρ , soit

$$C = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : (a, b) = 1, a > 0, d = 4a^2 + b^2 \text{ n'est pas un carré}\} \quad (1)$$

À chaque $(a, b) \in C$, soit (t_0, u_0) la plus petite solution avec $t_0 > 0$ et $u_0 > 0$ de l'équation de Pell

$$t^2 - du^2 = 4 \quad (2)$$

Définissons $\psi : C \rightarrow \rho$ par

$$(a, b) \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} \frac{t_0 - bu_0}{2} & au_0 \\ au_0 & \frac{t_0 + bu_0}{2} \end{pmatrix} \right\}_\Gamma \quad (3)$$

Il est clair que $\psi((a, b))$ est réciproque puisque $A \in \Gamma$ est symétrique si et seulement si $S_0^{-1}AS_0 = A^{-1}$ où

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notre assertion centrale concernant la paramétrage de ρ est :

Proposition : $\psi : C \rightarrow \rho$ est une application deux-à-un et surjective.

Il y a une stratification supplémentaire de la correspondance (3). Soit

$$\mathcal{D} = \{m \mid m > 0, m \equiv 0, 1 \pmod{4}, m \text{ n'est pas un carré}\} \quad (4)$$

Alors

$$C = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} C_d \quad (5)$$

où

$$C_d = \{(a, b) \in C \mid 4a^2 + b^2 = d\}$$

Des considérations élémentaires concernant les représentations propres d'entiers comme somme de deux carrés montrent que C_d est vide à moins que d n'ait que des diviseurs premiers p avec $p \equiv 1 \pmod{4}$ ou le premier 2 qui peut apparaître avec un exposant $\alpha = 0, 2$ ou 3. Notons $\mathcal{D}_R$ ce sous-ensemble de $\mathcal{D}$. De plus, pour $d \in \mathcal{D}_R$,

$$|C_d| = 2\nu(d) \quad (6)$$

où pour tout $d \in \mathcal{D}$, $\nu(d)$ est le nombre de genres de formes quadratiques binaires de discriminant d (la formule (6) n'est pas une coïncidence comme on l'expliquera plus loin). Explicitement, $\nu(d)$ est donné ainsi : si $d = 2^\alpha D$ avec D impair et si t est le nombre de diviseurs premiers distincts de D , alors

$$\nu(d) = \begin{cases} 2^{t-1} & \text{si } \alpha = 0 \\ 2^{t-1} & \text{si } \alpha = 2 \text{ et } D \equiv 1 \pmod{4} \\ 2^t & \text{si } \alpha = 2 \text{ et } D \equiv 3 \pmod{4} \\ 2^t & \text{si } \alpha = 3 \text{ ou } 4 \\ 2^{t+1} & \text{si } \alpha \geq 5 \end{cases} \quad (7)$$

En correspondance avec (5), nous avons

$$\rho = \bigcup_{d \in \mathcal{D}_R} \rho_d \quad (8)$$

avec $\rho_d = \psi(C_d)$. En particulier, $\psi : C_d \longrightarrow \rho_d$ est deux-à-un et surjective et par conséquent

$$|\rho_d| = \nu(d) \quad \text{pour } d \in \mathcal{D}_R \quad (9)$$

Des considérations locales montrent que pour $d \in \mathcal{D}$, l'équation de Pell

$$t^2 - du^2 = -4 \quad (10)$$

ne peut avoir de solution que si $d \in \mathcal{D}_R$. Lorsque $d \in \mathcal{D}_R$, elle peut ou non avoir de solution. Soit $\mathcal{D}_R^-$ l'ensemble des d pour lesquels (9) a une solution et $\mathcal{D}_R^+$ l'ensemble des $d \in \mathcal{D}_R$ pour lesquels (9) n'a pas de solution entière. Alors :

- (i) Pour $d \in \mathcal{D}_R^+$, aucun des $\{r\} \in \rho_d$ n'est ambigu.
- (ii) Pour $d \in \mathcal{D}_R^-$, tout $\{r\} \in \rho_d$ est ambigu.

Dans ce dernier cas (ii), nous pouvons choisir une section explicite de l'application deux-à-un (3). Pour $d \in \mathcal{D}_R^-$, soit $C_d^- = \{(a, b) : b < 0\}$, alors $\psi : C_d^- \longrightarrow \rho_d$ est une bijection.

En utilisant ces paramétrages ainsi que certaines techniques standard de la théorie spectrale de $\Gamma \backslash \mathbb{H}$, on peut compter le nombre de classes réciproques primitives. Nous ordonnons les premiers $\{p\} \in \Pi$ par leur trace $\text{tr}(p)$ (ce qui équivaut à ordonner les géodésiques premières correspondantes par leurs longueurs). Pour H un sous-groupe de G et $x > 2$, soit

$$\Pi_H(x) := \sum_{\{p\} \in \Pi_H, \text{tr}(p) \leq x} 1. \quad (11)$$

Proposition : Lorsque $x \longrightarrow \infty$, nous avons les asymptotiques suivantes :

$$\Pi_{\{e\}}(x) \sim \frac{x^2}{2 \log x} \quad (12)$$

$$\Pi_{\langle \phi_A \rangle}(x) \sim \frac{97}{8\pi^2} x (\log x)^2 \quad (13)$$

$$\Pi_{\langle \phi_R \rangle}(x) \sim \frac{3}{8} x \quad (14)$$

$$\Pi_{\langle \phi_w \rangle}(x) \sim \frac{x}{2 \log x} \quad (15)$$

et

$$\Pi_G(x) \sim \frac{21}{8\pi} x^{1/2} \log x \quad (16)$$

(Toutes ces relations sont établies avec un gain exponentiel pour le reste).

En particulier, le nombre de classes primitives qui sont réciproques est à peu près la racine carrée du nombre de classes primitives, tandis que le nombre de celles qui sont simultanément réciproques, ambiguës et inertes en est la racine quatrième.

Nous passons aux démonstrations des énoncés ci-dessus ainsi qu'à une discussion plus approfondie les reliant aux éléments d'ordre divisant quatre dans les groupes de composition de Gauss.

Nous commençons par l'implication $S^{-1}pS = p^{-1} \implies S^2 = 1$. Ceci est déjà vrai avec $\lambda > 1$ dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

En effet, dans ce groupe, p est conjugué à $\pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$.

Par conséquent, $Sp^{-1} = pS$ avec $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies a = d = 0$, c'est-à-dire $S = \pm \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, et donc $S^2 = 1$. Si S et S_1 satisfont $x^{-1}px = p^{-1}$, alors $SS_1^{-1} \in \Gamma_p$, le centralisateur de p dans Γ .

Mais $\Gamma_p = \langle p \rangle$ et par conséquent $S = \beta S_1$ avec $\beta \in \langle p \rangle$.

Maintenant, tout élément $S \in \Gamma$ dont l'ordre est deux (c'est-à-dire un élément elliptique d'ordre 2) est conjugué dans Γ à $S_0 = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, tout $r \in R$ est conjugué à un élément $\gamma \in \Gamma$ pour lequel $S_0^{-1}\gamma S_0 = \gamma^{-1}$. La dernière condition équivaut à ce que γ soit symétrique.

Ainsi, chaque $r \in R$ est conjugué à un $\gamma \in R$ avec $\gamma = \gamma^t$.

Nous pouvons être plus précis :

Lemme 1. *Tout $r \in R$ est conjugué à exactement quatre γ qui sont symétriques.*

Pour un $d \in \mathcal{D}_R^+$ général, il semble difficile de déterminer explicitement une section un-à-un de ψ . Pour voir cela, associons à chaque S satisfaisant

$$S^{-1}rS = r^{-1} \quad (17)$$

les deux solutions γ_S et γ'_S (ici $\gamma'_S = S\gamma_S$) de

$$\gamma^{-1}S\gamma = S_0 \quad (18)$$

Alors

$$\gamma_S^{-1}r\gamma_S = ((\gamma'_S)^{-1}r\gamma'_S)^{-1} \quad \text{et ces deux matrices sont symétriques.} \quad (19)$$

Ainsi, chaque S satisfaisant (17) procure une conjugaison de r vers une paire de matrices symétriques inverses. Réciproquement, toute telle conjugaison de r vers une matrice symétrique est induite comme ci-dessus à partir d'un γ_S . En effet, si $\beta^{-1}r\beta$ est symétrique, alors $S_0^{-1}\beta^{-1}r\beta S_0 = \beta^{-1}r^{-1}\beta$ et donc $\beta S_0^{-1}\beta^{-1} = S$ pour un S satisfaisant (17). Ainsi, pour établir (16), il reste à compter le nombre d'images distinctes $\gamma_S^{-1}r\gamma_S$ et son inverse que l'on obtient lorsque l'on fait varier S satisfaisant (17). Supposons donc que

$$\gamma_S^{-1}r\gamma_S = \gamma_{S'}^{-1}r\gamma_{S'} \quad (20)$$

Alors

$$\gamma_{S'}\gamma_S^{-1} = b \in \Gamma_r = \langle r \rangle \quad (21)$$

Aussi, d'après (18) :

$$\gamma_S^{-1}S\gamma_S = \gamma_{S'}^{-1}S'\gamma_{S'} \quad (22)$$

ou

$$\gamma_{S'}\gamma_S^{-1}S\gamma_S\gamma_{S'}^{-1} = S' \quad (23)$$

En utilisant (20) dans (22), on obtient :

$$b^{-1}Sb = S' \quad (24)$$

Mais bS satisfait (17), d'où $bSbS = 1$. En injectant cette relation dans (23), on obtient :

$$S' = b^{-2}S \quad (25)$$

Ces étapes après (22) peuvent toutes être inversées et nous trouvons que (20) a lieu si et seulement si $S = b^2 S'$ pour un certain $b \in \Gamma_r$. Puisque les solutions de (17) sont paramétrées par bS avec $b \in \Gamma_r$ (et S une solution fixée), il s'ensuit que lorsque S parcourt les solutions de (17), $\gamma_S^{-1} r \gamma_S$ et $(\gamma'_S)^{-1} r (\gamma'_S)$ parcourent exactement quatre éléments. Ceci achève la preuve de (16).

Pour continuer, nous utilisons la correspondance explicite entre Π et les classes de formes quadratiques binaires. Une forme quadratique binaire entière $f = [a, b, c]$ est primitive si $(a, b, c) = 1$. Soit F l'ensemble de telles formes dont le discriminant $d = b^2 - 4ac$ est dans $\mathcal{D}$. La représentation carrée symétrique de PGL_2 donne une action $\sigma(\gamma)$ sur F pour chaque $\gamma \in \Gamma$. Elle est donnée par $\sigma(\gamma)f = f'$ où $f'(x, y) = f((x, y)\gamma)$. Suivant Gauss, nous décomposons F en classes d'équivalence sous cette action $\sigma(\Gamma)$. La classe de f est notée $\bar{f}$ ou Φ et l'ensemble des classes $\mathcal{F}$. Des formes équivalentes ont un discriminant commun et donc

$$\mathcal{F} = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \mathcal{F}_d \quad (26)$$

Chaque $\mathcal{F}_d$ est finie et sa cardinalité est notée $h(d)$, le nombre de classes. Définissons une application n de P vers $\mathcal{F}$ par

$$p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{n} f(p) = \frac{1}{\delta} \text{sgn}(a+d)[b, d-a, -c] \quad (27)$$

où $\delta = \gcd(a, d-a, c) \geq 1$ et n satisfait les propriétés suivantes :

- (i) n est une bijection de Π sur $\mathcal{F}$.
- (ii) $n(\gamma p \gamma^{-1}) = (\det \gamma) \sigma(\gamma) n(p)$ pour $\gamma \in \text{PGL}(2, \mathbb{Z})$.
- (iii) $n(p^{-1}) = -n(p)$.
- (iv) $n(w^{-1} p w) = n(p)^*$
- (v) $n(w^{-1} p^{-1} w) = n(p)'$

où

$$[a, b, c]^* = [-a, b, -c] \quad \text{et} \quad [a, b, c]' = [a, -b, c] \quad (28)$$

La démonstration est une vérification directe, sauf pour le fait que n est surjective, qui repose sur la théorie de l'équation de Pell (2). Si $f = [a, b, c] \in \mathcal{F}$ a pour discriminant d , et si (t_d, u_d) est la solution positive fondamentale de (2), et si

$$p = \begin{pmatrix} \frac{t_d - u_d b}{2} & a u_d \\ -c u_d & \frac{t_d + u_d b}{2} \end{pmatrix} \quad (29)$$

alors $p \in P$ et $n(p) = f$. Le fait que p soit primitive découle du fait bien connu que le groupe des automorphes de f , $\text{Aut}_\Gamma(f)$, satisfait

$$\text{Aut}_\Gamma(f) := \{\gamma \in \Gamma : \sigma(\gamma)f = f\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{t - bu}{2} & au \\ -cu & \frac{t + bu}{2} \end{pmatrix} : t^2 - du^2 = 4 \right\} / \pm 1 \quad (30)$$

Plus généralement,

$$Z(f) := \{\gamma \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}) \mid \sigma(\gamma)f = (\det \gamma)f\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{t-bu}{2} & au \\ -cu & \frac{t+bu}{2} \end{pmatrix} : t^2 - du^2 = \pm 4 \right\} / \pm 1 \quad (31)$$

$Z(f)$ est cyclique avec un générateur η_f correspondant à la solution fondamentale $\eta_d = (t_1 + \sqrt{d}u_1)/2$, $t_1 > 0$, $u_1 > 0$ de

$$t^2 - du^2 = \pm 4 \quad (32)$$

Si (9) a une solution, c'est- dire $d \in \mathcal{D}_R^-$, alors η_d correspond à une solution de (9) et $\epsilon_d = \eta_d^2$. Si (9) n'a pas de solution, alors $\eta_d = \epsilon_d$. Notons que $Z(f)$ possède des éléments avec $\det \gamma = -1$ si et seulement si $d_f \in \mathcal{D}_R^-$.

D'après la propriété (ii) de la correspondance n , nous voyons que $Z(f)$ est le centralisateur de p dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z})$, où $n(p) = f$. Gauss a déterminé le nombre de points fixes de $*$ dans $\mathcal{F}_d$. Il a découvert que $\mathcal{F}_d$ forme un groupe abélien sous sa loi de composition. Dans les termes de la loi de groupe, $\Phi' = \Phi^{-1}$ pour $\Phi \in \mathcal{F}_d$. Ainsi, le nombre de points fixes de $'$ (qu'il appelle formes ambiguës) dans $\mathcal{F}_d$ est le nombre d'éléments d'ordre (divisant) 2. De plus, $\mathcal{F}_d/\mathcal{F}_d^2$ est isomorphe au groupe des genres. Ainsi, le nombre de points fixes de $'$ dans $\mathcal{F}_d$ est égal au nombre de genres, qui à son tour est égal au nombre $\nu(d)$ défini plus tôt.

Considérons ensuite l'involution $*$ sur $\mathcal{F}_d$. Si $b \in \mathbb{Z}$ et $b \equiv d \pmod{2}$, alors les formes $[-1, b, \frac{d-b^2}{4}]$ sont toutes équivalentes et cela définit une classe $J \in \mathcal{F}_d$. En utilisant la composition, on voit immédiatement que $J^2 = 1$, c'est- dire que J est ambiguë. De plus, l'action de $*$ sur $\mathcal{F}_d$ est donnée par la translation dans le groupe de composition : $\Phi \rightarrow \Phi J$. Ainsi, $*$ a un point fixe dans $\mathcal{F}_d$ si et seulement si $J = 1$. J est dans le genre principal si et seulement si $d \in \mathcal{D}_R$. Pour achever l'analyse de quand $J = 1$, cela se produit si et seulement si $d \in \mathcal{D}_R^-$. Ainsi, $*$ fixe $\mathcal{F}_d$ si et seulement si $d \in \mathcal{D}_R^-$, et sinon n'a aucun point fixe dans $\mathcal{F}_d$.

Passons aux points fixes de ϕ_A sur $\mathcal{F}_d$. L'action $\Phi \rightarrow -\Phi$ sur $\mathcal{F}_d$ lorsqu'elle est exprimée en termes de la composition (de Gauss) est donnée par

$$\Phi \rightarrow J\Phi^{-1} \quad (33)$$

Ainsi, les formes réciproques dans $\mathcal{F}_d$ sont les Φ satisfaisant

$$\Phi^2 = J \quad (34)$$

Puisque $J^2 = 1$, ces Φ ont un ordre divisant 4. Pour $d \in \mathcal{D}_R$, (41) a exactement $\nu(d)$ solutions. Cela complète notre preuve de (3) et (8). Les affirmations (i) et (ii) découlent de (41) et de l'analyse précédente.

Pour résumer, nous avons : les classes de conjugaison hyperboliques primitives sont en correspondance biunivoquente avec les classes de formes de discriminants $d \in \mathcal{D}$. Pour chaque tel d , il y a $h(d) = |\mathcal{F}_d|$ telles classes, qui ont toutes une trace commune t_d et une norme ϵ_d^2 . Le nombre de classes ambiguës pour tout $d \in \mathcal{D}$ est $\nu(d)$.   moins que $d \in \mathcal{D}_R$, il n'y a pas de classes réciproques

dans $\mathcal{F}_d$, tandis que si $d \in \mathcal{D}_R$, il y a $\nu(d)$ telles classes paramétrées par C_d de manière deux-à-un. Si $d \notin \mathcal{D}_R^-$, il n'y a pas de classes inertes. Si $d \in \mathcal{D}_R^-$, chaque classe est inerte et chaque classe ambiguë est réciproque et vice-versa.

Nous terminons par quelques commentaires sur la question de l'équidistribution des géodésiques fermées. Pour chaque $p \in \Pi$ fermé primitif, nous associons la mesure μ_p sur $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ portée par la géodésique fermée. Pour presque toutes les géodésiques, $\bar{\mu}_p$ s'équidistribue par rapport à $\bar{dA} = \frac{3}{\pi} \frac{dx dy}{y^2}$ lorsque $l(p) \rightarrow \infty$. Cependant, il y a de nombreuses géodésiques fermées qui ne s'équidistribuent pas par rapport à $\bar{dA}$. L'équidistribution est souvent rétablie lorsque l'on fait la moyenne sur des ensembles de géodésiques naturellement définis. Un théorème fondamental de Duke [7] affirme que les mesures $\mu_{\mathcal{F}_d}$ pour $d \in \mathcal{D}$ s'équidistribuent par rapport à $\bar{dA}$ lorsque $d \rightarrow \infty$. Nous nous attendons à ce que les géodésiques réciproques s'équidistribuent par rapport à la mesure de Haar dans $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ lorsqu'elles sont ordonnées par longueur.

Références

- [1] J. W. S. Cassels, *Rational quadratic forms*, North-Holland, 1982.
- [2] F. X. Connolly, J. F. Davis, *L-theory of $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ and connected sums of manifolds*, en préparation.
- [3] T. W. Cusick, M. E. Flahive, *The Markoff and Lagrange spectra*, AMS, 1989.
- [4] P. B. Cohen, *Hyperbolic equidistribution problems on Siegel 3-folds and Hilbert modular varieties*, Duke Math. J. 129 (2005), no. 1, 87-127.
- [5] W. Duke, J. B. Friedlander, H. Iwaniec, *Bounds for automorphic L-functions. II*, Invent. Math. 115 (1994), no. 2, 219-239.
- [6] W. Duke, Z. Rudnick, P. Sarnak, *Density of integer points on affine homogeneous varieties*, Duke Math. J. 71 (1993), no. 1, 143-179.
- [7] W. Duke, *Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms*, Invent. Math. 92 (1988), no. 1, 73-90.
- [8] I. Efrat, *Dynamics of the continued fraction map and the spectral theory of $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$* , Invent. Math. 114 (1993), no. 1, 207-218.
- [9] M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, P. Michel, A. Venkatesh, *Distribution properties of periodic torus orbits on homogeneous spaces*, en préparation.
- [10] A. Eskin, C. McMullen, *Mixing, counting, and equidistribution in Lie groups*, Duke Math. J. 71 (1993), no. 1, 181-209.
- [11] A. Eskin, H. Oh, *Representations of integers by an invariant polynomial and unipotent flows*, prépublication.
- [12] R. Fricke, F. Klein, *Theorie der Elliptischen Modulfunctionen*, Vol. I and II, Leipzig, 1890 and 1892.
- [13] C. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*.
- [14] E. Ghys, V. Sergiescu, *Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages*, Topology 19 (1980), no. 2, 179-197.
- [15] D. A. Hejhal, *The Selberg trace formula for $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$* , Vol. 2, Springer-Verlag, 1983.
- [16] G. Harcos, P. Michel, *The subconvexity problem for Rankin-Selberg L-functions and equidistribution of Heegner points*, prépublication (2005).
- [17] C. Hooley, *On the Pellian equation and the class number of indefinite binary quadratic forms*, J. Reine Angew. Math. 353 (1984), 98-131.
- [18] A. Ingham, *Some asymptotic formulae in the theory of numbers*, J. London Math. Soc. 2 (1927), 202-208.
- [19] H. Iwaniec, *Introduction to the spectral theory of automorphic forms*, Revista Matemática Iberoamericana, 1995.

- [20] D. G. James, C. MacLachlan, *Fuchsian subgroups of Bianchi groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), no. 5, 1989-2002.
- [21] S. Kwon, *On the average of class numbers*, Princeton University undergraduate thesis, (2006).
- [22] J. C. Lagarias, *On the computational complexity of determining the solvability or unsolvability of the equation $X^2 - DY^2 = -1$* , Trans. Amer. Math. Soc. 260 (1980), no. 2, 485-508.
- [23] R. P. Langlands, *Stable conjugacy : definitions and lemmas*, Canad. J. Math. 31 (1979), no. 4, 700-725.
- [24] W. Z. Luo, P. Sarnak, *Quantum ergodicity of eigenfunctions on $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash H^2$* , Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1995), no. 81, 207-237.
- [25] P. Morton, *On the nonexistence of abelian conditions governing solvability of the -1 Pell equation*, J. Reine Angew. Math. 405 (1990), 147-155.
- [26] C. MacLachlan, A. W. Reid, *Parametrizing Fuchsian subgroups of the Bianchi groups*, Canad. J. Math. 43 (1991), no. 1, 158-181.
- [27] A. Popa, *Central values of Rankin L-series over real quadratic fields*, prépublication (2005).
- [28] L. Polterovich, Z. Rudnick, *Stable mixing for cat maps and quasi-morphisms of the modular group*, Ergodic Theory Dynam. Systems 24 (2004), no. 2, 609-619.
- [29] L. Rédei, *Über einige Mittelwertfragen im quadratischen Zahlkörper*, Jnl. Reine Angew. Math. 174 (1936), 15-55.
- [30] P. Sarnak, *Prime Geodesic Theorems*, thèse, Stanford (1980).
- [31] P. C. Sarnak, *Class numbers of indefinite binary quadratic forms. II*, J. Number Theory 21 (1985), no. 3, 333-346.
- [32] C. L. Siegel, *On the theory of indefinite quadratic forms*, Ann. of Math. (2) 45 (1944), 577-622.
- [33] P. Stevenhagen, *The number of real quadratic fields having units of negative norm*, Experiment. Math. 2 (1993), no. 2, 121-136.
- [34] A. B. Venkov, *Spectral theory of automorphic functions*, Proc. Steklov Inst. Math. (1982).
- [35] D. Zagier, *On the number of Markoff numbers below a given bound*, Math. Comp. 39 (1982), no. 160, 709-723.