Traduction de l'intervention de Peter Sarnak au Colloque à Bristol "*Perspectives on the Riemann hypothesis*" en 2018

Commençons par les impasses, et soulignons quelques pistes qui me semblent infructueuses. Pour ma part, j'ai reçu trois propositions ces derniers jours. Nous accueillons régulièrement de nombreuses propositions à l'Institut Riemann.

Certaines sont automatiquement rejetées ; ce sont des cas simples, rédigés dans un langage nouveau. Mais beaucoup d'autres sont en réalité mathématiques. Il s'agit généralement de personnes maîtrisant un peu l'analyse complexe, des ingénieurs.

Et 99 % de ces demandes pourraient être rejetées au motif que la démonstration ne contient que l'équation fonctionnelle. Nous renvoyons dans ces cas une lettre de rejet standard. Je vous l'expliquerai dans un instant.

Et généralement, il y a un petit va-et-vient, mais ce n'est pas tout à fait le cas. L'une des difficultés, comme nous le savons tous, avec l'hypothèse de Riemann (c'est-à-dire l'équation fonctionnelle de Riemann), est que si l'on prend une autre fonction L (qui est une combinaison linéaire), on a trois fonctions L avec le même conducteur et le même epsilon (et il en existe de nombreuses), et si l'on considère un degré plus élevé, il existe de nombreuses multiplicités avec la même équation fonctionnelle. On peut donc créer une combinaison linéaire non triviale, et la nouvelle fonction, rien ne garantit qu'elle satisfasse l'hypothèse de Riemann, et elle ne la satisfait pas.

Je veux dire, les théorèmes de cette époque remontent en grande partie à Horton. Donc, chaque fois qu'on a une idée concernant Riemann, il faut d'abord expliquer comment on y parvient. Je l'appellerai donc ainsi. Impossible.

Ce n'est pas que les combinaisons linéaires soient inutilisables - elles permettent d'éliminer certains zéros - mais elles sont probablement émininées car elles ont un nombre excessif de zéros hors de la droite. Riemann a démontré cela lui-même tard dans sa vie, en reprenant certains de ses travaux antérieurs. L'un de ses premiers théorèmes célèbres établissait qu'une proportion positive de zéros sur la droite correspond à la fonction L de Riemann, et il a montré qu'il existe également une proportion positive pour les combinaisons linéaires. En un sens, il a donc véritablement cerné le problème.

Quoi qu'il en soit, je pense que Riemann aurait beaucoup apprécié l'idée de Montgomery selon laquelle, si l'on prend des combinaisons linéaires et que l'on utilise les statistiques du logarithme zêta avec la racine carrée du logarithme, cette indépendance impliquerait qu'il est fort probable que 100 % des zéros soient sur la droite, mais pas tous. Nous nous intéressons ici à l'hypothèse de Riemann. Montgomery, je suis certain que vous avez tous lu des articles de lui à ce sujet ; Selberg, quant à lui, y a consacré ses dernières conférences, entre 80 et 90 ans, mais il n'a jamais pu mener son projet à terme.

Denise Vella-Chemla, assistée d'outils ia, septembre 2026.

Vidéo consultable à l'adresse https://vimeo.com/539529535/0b096a810b .

Bon, pour remédier à cette difficulté, Selberg a introduit ce que nous avons entendu plus tôt aujourd'hui : la clause de Selberg. En réalité, je pense que la véritable raison pour laquelle il l'a élaborée enfin, il l'avait déjà en 1960, mais s'il l'a formulée à Amalfi, c'est qu'il voulait énoncer des théorèmes sur les combinaisons linéaires et disposer de fonctions L assez générales. Il ne souhaitait pas comprendre les propos de Langlands ; il a donc décidé de les axiomatiser de cette manière afin de pouvoir formuler la suite des opérations.

Mais il y a la clause Selberg, qui comporte des axiomes que nous avons entendus aujourd'hui, et ces axiomes, lorsqu'on les choisit, on se prend pour Dieu.

Ce n'est pas une bonne idée. La valeur des axiomes dépend de leur utilisation. C'est donc une bonne notion, et lorsqu'on démontre quelque chose avec cet ensemble d'axiomes, on sait ce qui a été utilisé dans la démonstration, mais la clause de Selberg n'a rien d'intrinsèque, à mon avis.

Il existe désormais un membre de la clause de Selberg qui n'est pas une fonction L automorphe. Nous savons qu'il existe des fonctions L automorphes, et ce sont celles qui nous intéressent. Concentrons-nous donc sur les éléments principaux, à savoir les fonctions L des formes de classes sur GLM.

Ce sont conjecturalement toutes les fonctions L existantes, je les note donc Lsr. Si vous connaissez les fonctions L grecques, il s'agit de généralisations de celles-ci. Mais il existe une généralisation supplémentaire sur laquelle je ne m'attarderai que brièvement. Je note $L(s, r)$, donc π est une forme de classe sur $\mathrm{GL}(M)$, ou la fonction L qu'on note $L(s, \pi)$.

Il existe des fonctions L plus générales, et cela aura une certaine pertinence par rapport à ce dont je parle ici : Ls p, où p est une représentation du groupe dual, en l'occurrence $\mathrm{GL}(M)$, $\mathrm{GL}(M(\mathbb{C}))$ (voir ce que j'ai écrit à ce sujet), le groupe de Galois absolu. Il est donc possible de construire des fonctions L complexes à partir de représentations du groupe dual, une idée fondamentale de Langlands que je n'ai pas encore abordée. Je fais donc apparemment référence à l'histoire de cette idée, le corps des fonctions, qui est une notion extrêmement importante. Ce sont les fonctions L du monde ; elles sont toutes censées être des fonctions L standard, et nous sommes sur le point de le savoir.

Toutes les fonctions L standard possèdent une équation de prolongement analytique : s tend vers $1 - s$, n vers le gradient conjugué. Ceci a été démontré par Jacquet et Godement, mais il est probable qu'il ait déjà effectué une démonstration de Galois, comme Langlands aime à le souligner. On s'attend à ce qu'elles satisfassent toutes l'hypothèse de Riemann. Or, s'il existait un trop grand nombre de fonctions L (donc une famille à un paramètre), l'hypothèse de Riemann ne serait plus vérifiée. En effet, comme l'expliquait Erika, ces zéros, lorsqu'ils se rencontrent, disparaissent. Ainsi, un continuum de fonctions L poserait problème.

Si vous résolvez le problème de la classe, et que les formes ne sont pas rigides, vous aurez certainement des difficultés, si elles ne sont pas rigides au sens strict. En fait, j'ai montré une fois, lorsque je cherchais à dénombrer les formes automorphes, que s'il y en a trop, l'hypothèse de Riemann implique qu'elles s'éloignent les unes des autres, qu'elles possèdent un espace métrique qu'elles

peuvent utiliser, et que s'il y en a trop, on peut également réfuter l'hypothèse de Riemann.

Il est donc crucial que le nombre de fonctions L soit dénombrable, notamment pour définir une famille de fonctions L. C'est un point important. Cette rigidité m'intéresse beaucoup, et il serait souhaitable qu'elle soit vérifiée dans tout le cours.

La véritable difficulté réside dans la tentative de combiner le produit eulérien et la théorie additive, c'est-à-dire le développement en série, où l'on utilise la modularité ou la sommation de Poisson pour obtenir l'équation fonctionnelle de prolongement analytique. Comment concilier cela avec l'étude simultanée du produit eulérien ?

Même la question de la rigidité semble très complexe. Nous n'avons pas vraiment de méthode, et c'est l'une des raisons pour lesquelles il est si difficile de comprendre les fonctions L de cette manière. Bien, je vais maintenant consacrer au moins trois diapositives à nos connaissances sur l'hypothèse de Riemann.

Je veux dire, nous voulons tous prouver l'hypothèse de Riemann, mais que savons-nous vraiment ? Par où commencer ?

Bien, et dans ces deux ou trois diapositives, je peux vous expliquer qu'il n'existe qu'une seule méthode dominante : la série d'Eisenstein.

Ce n'est peut-être pas l'avis de tout le monde, mais c'est assurément le mien, car je vais vous en convaincre. Elle repose sur une inégalité trigonométrique.

Cela fonctionne pour toute fonction L automorphe π, $L(s, \pi)$, grâce à cet argument de positivité. Ainsi, tous les arguments que nous connaissons dans ce domaine reposent sur la positivité. Ici, cela consiste à construire une fonction L dont les coefficients sont non négatifs, et la manière la plus évidente d'y parvenir est de prendre le tenseur et le contre-gradient de π, qui a automatiquement des coefficients positifs.

Vous remarquerez peut-être qu'il s'agit d'une forme arbitraire, π petit est une forme cuspidale automorphe sur $\mathrm{GL}(M)$, et $L(s, \pi)$ est une fonction L standard. On forme ainsi une grande structure qui, dans le cas d'Hadamard (je vais vous donner un exemple), serait de degré neuf. Ses coefficients sont non négatifs, car il s'agit simplement de πLS, π grand, tenseur $\widetilde{\pi}$.

L'alpha est un quasi-caractère, une sorte de normalisation. Il a donc des coefficients positifs, et le plus important est de connaître les propriétés analytiques de ces fonctions L, notamment la fonction L de Rankin-Selberg, qui apparaît ici. On pourrait donc dire : "Ah, série d'Eisenstein !"

Il ne s'agit pas de la série d'Eisenstein, mais d'une série d'Eisenstein beaucoup plus profonde. Celle-ci définit une région standard sans zéros, et c'est plus ou moins ce que nous savons.

Pour la fonction zêta de Riemann, une légère amélioration est possible. D'après Vinogradov, basée

sur son théorème des accroissements finis [1], c'est très difficile. Je crois que Karatsuba a également obtenu un résultat similaire, mais je ne suis pas certain de la référence exacte ; il utilise l'estimation des accroissements finis de Vinogradov.

Des progrès remarquables ont récemment été réalisés concemant les estimations de la valeur moyenne de Vinogradov, notamment par Wooley, et une solution complète a été proposée par Bourgain, Demeter et Guth. Cependant, ces améliorations ont peu d'impact, si j'ai bien compris, sur la région sans zéro. Voici donc la base que nous connaissons pour zêta.

Mais je tiens à souligner que pour la fonction zêta générale, il existe une méthode bien plus puissante : celle des séries d'Eisenstein. Je l'expliquerai dans un instant, en précisant que toutes les séries sont produits propres. La méthode la plus puissante connue à ce jour sur l'approximation de l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH) provient de la théorie spectrale des séries d'Eisenstein sur un groupe général.

Et la positivité provient d'une source totalement différente. Ainsi, dans cette théorie générale des séries d'Eisenstein, développée par Selberg dans le demi-plan supérieur et par Langlands pour un g général, qui est une théorie spectrale, il n'y a pas d'arithmétique. Mais le plus remarquable, c'est que lorsqu'on applique cette théorie spectrale, ce prolongement arithmétique, dans le cadre arithmétique, et qu'on calcule le terme constant le long de la parabole maximale, ce terme constant, dans le cadre arithmétique, possède un produit eulérien.

Il s'agit d'une décomposition de Breuillard, et c'est donc là que se trouve le produit d'Euler.

Ainsi, le terme constant, et même les coefficients non nuls le long de la parabole maximale, ont des produits d'Euler, et c'est ce que Langlands, après avoir prolongé analytiquement la série d'Eisenstein en général, démontre.

On s'est demandé ce qu'il avait fait, on l'a forcé à définir le groupe dual, il a écrit un petit livre intitulé Produits d'Euler, expliquant toutes les fonctions d'Euler, et il a introduit l'interprétation scalaire locale (LSI) précisément pour cette raison, car il voulait interpréter le terme constant de la série d'Eisenstein. Alors, quel est le rapport avec les processus de Riemann ? Eh bien, il est très important, car le terme constant possède la propriété qu'il existe un produit scalaire appelé relation de Maass-Selberg, c'est-à-dire un énoncé de positivité, qui permet de prouver la non-annulation des termes de la série de Laplace, de tous ces r, et même des lignes de r de la série de Laplace, dans tous les cas où ce n'est pas nul, et c'est plus que ce que fournit la méthode de la relation de Maass-Selberg, c'est pourquoi j'ai dit que c'est plus puissant. Très bien, donc la positivité provient d'un produit scalaire qui n'est pas ceci, vous savez, a priori, bien sûr, en général, c'est-à-dire les coefficients de positivité ici, la positivité est un produit scalaire dans l'espace des séries d'Eisenstein.

Selberg a été le premier à observer ce phénomène, même si je ne sais pas s'il l'a mentionné à qui que ce soit. Cette observation a certainement inspiré l'ouvrage sur les séries d'Eisenstein. J'ai moi-même contribué à ce constat : j'ai demandé à Selberg, dès le début, quelle région sans zéros cette méthode permettait d'obtenir, et il m'a répondu qu'elle était très mauvaise. Or, dans la nouvelle édition

1. théorème de la valeur moyenne.

du livre de Keith Brown, il attend un zéro supplémentaire avant de démontrer cette remarque, mais, dans les démonstrations de toutes les preuves de non-relation à droite, il ajoute l'argument d'Eisenstein, confirmant ainsi l'obtention d'une région sans zéros très mauvaise.

J'ai passé beaucoup de temps à trouver cela : on n'obtient pas une région sans zéros de très mauvaise qualité, c'est-à-dire qu'on peut obtenir une région sans zéros standard, à partir de cet argument, si l'on modifie la série d'Eisenstein d'où provient la positivité. On peut donc définir des régions sans zéros efficaces, voire excellentes dans certains cas particuliers, et obtenir ainsi des régions sans zéros et sans normes pour la fonction zêta. Pour LSI, je suis satisfait de ce résultat. Griffin l'a récemment limité pour certains cas, mais je souhaite simplement expliquer pourquoi il s'agit de la meilleure solution connue à ce jour. Cela ne signifie pas que notre solution est parfaite, mais c'est la meilleure que nous connaissions actuellement.

Voici un exemple. J'avoue que cet exemple n'est idéal que parce que nous n'avons pas la fonctorialité. Il est donc peut-être temporaire, mais il n'est pas certain que la fonctorialité soit plus simple que l'hypothèse de Riemann.

Il faut préciser que lorsque Weil a démontré l'hypothèse de Riemann pour les courbes par deux démonstrations, il s'agissait d'un groupe assez prédominant de vecteurs d'arguments. Il pensait donc que Riemann, une fois convaincu de la validité immédiate de l'argument, a attendu un peu. Il se pourrait donc que la fonctorialité soit plus difficile à établir.

Mais ça devrait l'être, comme on l'a dit. Bref, voici une forme holomorphe sur GL(2). Adieu à tous les amateurs de formes holomorphes.

Prenons une forme cuspide pour laquelle nous ne savons pas si elle satisfait l'hypothèse de Rieman. Considérons donc un chemin non symétrique, qui est un produit eulérien de degré 10, censé être une forme holomorphe cuspidale standard sur GL(10), mais cela reste à confirmer. Si tel était le cas, l'argument de Langlands que j'avais initialement établi ne serait plus valable.

Mais je ne le sais pas. Et je ne connais pas la théorie riemannienne, donc ce produit eulérien ne converge même pas vers 1 dans la partie réelle de SV. Il converge seulement vers une valeur proche de $3L^2$. Absolument.

Maintenant, pouvez-vous imaginer exécuter un argument d'Hadamard ? L'argument d'Hadamard consiste à se placer presque sur la ligne et à se faufiler jusqu'à la ligne.

Cette méthode, qui utilise les groupes exceptionnels (et le théorème d'Eisenstein est un groupe exceptionnel), permet d'obtenir la positivité, c'est-à-dire la non-annulation sur la droite 1 sans savoir que le produit eulérien converge vers la droite de 3/2. J'espère que cet exemple vous aura convaincu qu'il s'agit de la positivité la plus puissante.

Pour vous convaincre davantage, permettez-moi de vous présenter un autre aspect positif des théories d'Eisenstein : le cas où $R = 0$. Or, ce cas englobe tous les cas connus où $R = 0$. Le point central en question sera donc fondamental dans cette conférence. Un autre point important sera

d'envisager que les fonctions L puissent avoir plusieurs zéros. Cela peut se produire au point central pour des raisons arithmétiques profondes ou pour des concepts tels que le fait qu'on souhaite très fort que ça soit le cas, et nous devons en tenir compte ! Et je pense qu'il ne faut jamais l'oublier. On pourrait même en discuter. Donc, si l'on a un r auto-dual avec $\widetilde{r}$, ou la forme automorphe du $\mathrm{GL}(M)$, alors il est réel sur l'axe réel, comme Weil l'a expliqué : l'hypothèse de Riemann généralisée implique donc qu'il est non négatif en 0.

La question est donc peut-on le prouver malgré tout ? La réponse est, comme il l'a expliqué hier, que l'on peut démontrer que la dérivée première est non négative en utilisant la formule de Gross-Zagier dans des cas particuliers où la valeur varie en fonction de la hauteur, et qu'elle est non négative. Il a même expliqué qu'on pouvait remonter dans le sens inverse.

Bref, il y a un théorème incroyable de Lapid ici, qui dit que la moitié des fonctions L auto-duales du monde, celles qui sont symplectiques, c'est-à-dire que si je prends le carré extérieur, c'est donc une des raisons pour lesquelles je voulais cette ligne là, si je prends la fonction L standard, je regarde son carré extérieur, et soit elle a un pôle, soit elle n'a pas de pôle, nous comprenons ces choses.

Si une fonction possède un pôle, on dit qu'elle est symplectique ; elle appartient au groupe symplectique. On peut alors utiliser la théorie des groupes symplectiques d'Eisenstein, et la positivité du produit scalaire, qui est, pour ma part, à l'origine de la positivité (du moins dans ce cas) pour prouver sa non-négativité. Ainsi, la moitié des fonctions L, qu'elles soient mesurées ou non, sont non négatives au point central.

L'autre moitié, nous la connaissons maintenant, par exemple, la fonction L de Dirichlet, quadratique, n'est pas symétrique, elle est positive, et cela vaudrait la peine, mais je vais l'oublier, parce que vous savez que vous ne voulez pas lier ces non-négatifs, car cela va lier une borne inférieure au dernier nombre.

Cela englobe donc tous les cas connus de non-négativité. Concernant la dérivée, je ne connais pas de théorèmes généraux ; l'explication de Webb est probablement la meilleure que nous connaissions.

Maintenant, les formules périodiques, ceci contient toutes les formules périodiques. Donc, encore une fois, les séries d'Eisenstein sont extrêmement puissantes pour obtenir des valeurs positives. Nous allons donc essayer d'en tirer davantage. C'est ce que Garrett et Bombieri essayaient d'expliquer par une idée ; il ne faut pas oublier que l'utilisation de la série d'Eisenstein était la première étape de la résolution du problème du nombre de classes. ? ? a supposé que l'hypothèse de Riemann était fausse, puis a utilisé le zéro de la droite pour obtenir une borne inférieure pour le nombre de classes.

Il a donc dit avoir une idée géniale : "Je vais vous montrer qu'il est utile d'avoir un zéro hors de la ligne." O'Brien utilise un zéro et demi d'ordre élevé pour apporter une solution efficace au problème du nombre de classes. Ce zéro et demi d'ordre élevé est donc important ; il constitue presque une violation de l'hypothèse de Riemann.

Voilà donc la série d'Eisenstein qui, il faut bien le dire, ne semble pas permettre d'obtenir l'hypothèse de Riemann, mais elle reste la meilleure source de positivité. Bien, parlons maintenant

d'autres pistes à explorer. Il y a les approches de l'hypothèse de Riemann issues de la théorie des fonctions, une approche antérieure, et une autre à laquelle je suis quelque peu réticent.

Puisque le produit a complètement disparu, on effectue un développement de Taylor, mais cela n'exclut pas d'éventuelles déformations, comme Terry Tao y reviendra. Quoi qu'il en soit, des théorèmes intéressants ont été récemment améliorés, et je tenais à en parler. Cette fonction a été formulée par Terry Tao plus tôt dans la journée.

Il s'agit de la fonction que Riemann décrit, dont la transformée de Fourier sous forme paire est la fonction xi, translatée de sorte que Ξ soit réelle sur l'axe réel, et qui devrait avoir une racine réelle. L'hypothèse de Riemann est équivalente à ce que cette fonction ait une racine réelle. Et comme l'a dit Terry, il découle des travaux de Riemann que $\phi(t)$ décroît très rapidement avec t, donc on peut l'intégrer par rapport à $cos(xt)$, et on peut l'intégrer par rapport à une fonction paire comme e^{tb}, sur laquelle je reviendrai.

Bref, peut-être une image avant. Puisque la fonction est paire (je crois que quelqu'un l'a dit plus tôt), on prend la racine carrée (impossible de résister à la tentation), on prend la racine carrée, on extrait ce Ξ, et on obtient un développement de Taylor. On regarde ce développement et on se demande : "Puis-je maintenant démontrer l'hypothèse de Riemann en observant ces fonctions gamma ?" Ça paraît absurde, mais pourquoi ne pas essayer ? Eh bien, on peut avancer des arguments, et je le répète, le problème, c'est que tout ce qu'on fait ici se résume à une combinaison linéaire, et on arrive au même résultat. Et quelle que soit la question posée, on peut toujours demander : "Qu'est-ce que j'obtiens ?" La même question. Donc, il y a une étude récente, menée il y a quelques années par Diaz-Vargas, qui a démontré que son hypothèse (de Diaz-Vargas) est équivalente à l'hypothèse de Riemann. Le k y serait comme la dérivée de la fonction c, ces polynômes de Jensen, qui sont maintenant des polynômes de degré n provenant des coefficients de Taylor, devraient tous être des nombres réels, et cela est équivalent à l'hypothèse de Riemann. Donc, là où il parlait hier, il disait que cette positivité dont il parlait n'était pas équivalente à l'hypothèse de Riemann ; elle en découle, mais elle est bien antérieure à l'équivalence avec l'hypothèse de Riemann ; elle est équivalente à l'hypothèse de Riemann, pour le principe. Je veux juste faire ça, je n'ai pas expliqué le théorème de Hamburger, vous devriez me crier dessus, peut-être que vous ne pouvez pas prendre de combinaisons linéaires avec la fonction de Taylor elle-même, parce que la fonction est l'équation fonctionnelle de ? ?, et puis elle naît avec un produit inférieur sans que vous le sachiez, parce que c'est très facile.

Je ne veux pas l'expliquer. Je vais autoriser toutes les fonctions L de s. Donc, si quelqu'un a prouvé l'hypothèse de Riemann, comment sait-on que Riemann est une fonction ? Et si ce n'était pas pour cela et les autres, je serais très déçu.

$\zeta(3)$ est-il irrationnel ? oui, cela a été démontré.

Oui, je n'ai rien vu. C'est donc décevant que vous n'ayez rien vu non plus. Je suis déçu.

Très bien. Donc, si vous prenez ces polynômes de Jensen, et que vous ne savez que très peu de choses sur les $yk + j$, vous pouvez les examiner numériquement et essayer de montrer que ces polynômes

n'ont que des racines réelles. Cela ferait partie de l'hypothèse de Riemann.

Il existe un théorème intéressant dont je n'ai pas vu la démonstration, mais dont j'ai entendu parler. J'ai récemment assisté à une conférence d'Ono où il a expliqué ce théorème et son énoncé. Ce théorème stipule que si l'on fixe M et que l'on fait tendre k vers l'infini (en d'autres termes, pour ces polynômes, k revient à calculer la dérivée et à rechercher les racines de cette dérivée), alors si l'on fixe le polynôme, par exemple M à un degré 4, et que l'on fait tendre k vers l'infini, alors les racines deviennent des racines réelles. Je pense donc, sans en connaître les détails, que si j'applique ce théorème à une combinaison linéaire, les racines deviendraient également des racines réelles si k tend vers l'infini.

C'est exactement la même caractéristique que D. W. Farmer a mentionnée hier : lorsqu'on calcule les dérivées, les choses se simplifient, comme nous l'avons déjà évoqué. Il est fort probable que ce soit un fait universel pour les combinaisons linéaires également. Ce théorème pourrait aussi servir à démontrer que, pour k suffisamment grand, la positivité totale est obtenue presque automatiquement en calculant les dérivées. Il suffit de trouver les premières dérivées. Ce que Farmer a dit, et je suis entièrement d'accord.

Bon, une autre piste que nous avons explorée ce matin on pourrait essayer de former zêta de différentes manières, mais on se retrouve alors hors de portée de tous les produits. Or, c'est justement notre objectif principal : déformer les mêmes types d'objets. Tout est vrai. Katz nous a parlé du principe "un pour tous", alors il vaudrait mieux que tout soit bien aligné dans notre famille. Néanmoins, on peut déformer la série d'Eisenstein.

Phillips et moi avons fait ça, et si j'ai le temps à la fin, je vous expliquerai que le théorème des nombres premiers est stable sous perturbation, sous déformation. Mais seulement si j'ai le temps. Il y a une autre déformation, dont nous avons entendu parler ce matin : la déformation de De Bruijn-Neumann. Je crois que mon signe est opposé à celui de Terry.

Vous prenez votre fonction Ξ lorsque b est nul, vous introduisez une gaussienne e^{bt}, qui est un produit chauffé [2], et vous observez le déplacement des zéros. Il y a cette polarité thermique, qui est la valeur critique. Le plus intéressant, c'est que Rogers et Katz ont prouvé que cette nouvelle étoile est inférieure ou égale à zéro. Et cela montre qu'il est impossible, et je pense que nous sommes tous d'accord, de démontrer sérieusement l'hypothèse de Riemann par cette voie. Vous allez donc le démontrer sans utiliser votre autre produit, en vous contentant des développements de Taylor, mais cela ne fonctionnerait peut-être que pour l'autre fonction de Riemann.

Mais c'est subtil. Les zéros ressemblent bien à GUE, leur comportement est très subtil, ils ne sont pas bien espacés, il est donc impossible de les compter pour prouver leur présence de manière compréhensible. Bon, l'approche suivante est l'analyse fonctionnelle.

Donc, toutes les approches d'utilisation de l'analyse fonctionnelle que je connais sont basées sur le Frobenius, certains le recherchent, Alain Connes, où êtes-vous ? Vous pourrez vous défendre demain. Donc, on parle de dilatation, on peut étudier la dilatation sur les espaces de fonctions ; tout est lié

2. ?

à la dilatation sur l'espace des fonctions. Cette dilatation dans le groupe peut être légèrement plus grande, et la dilatation est simplement $F(X^2)$. L'ensemble des F sur lequel vous allez travailler sera assez subtil. Le premier de ce type est peut-être un travail de Nyman-Beurling par Baez-Duarte, et j'écrirai de beaux articles à ce sujet.

Et c'est une belle affirmation. Cela ne ressemble pas à un cercle, c'est plutôt un demi-cercle, c'est un semi-groupe, ce n'est pas un groupe, et il est très important que ce soit un semi-groupe. On considère la partie fractionnaire, et la raison pour laquelle ce théorème n'est pas si profond est l'idée finale : l'intégrale de la partie fractionnaire est une des formules pour $\zeta(s)$ On prend la partie fractionnaire de $1/X$, qui est une fonction L^2, puis on considère les dilatations par a de cette fonction, et on se demande si l'adhérence de l'espace engendré par ces dilatations est convexe. On obtient alors un ensemble convexe, car on peut prendre des combinaisons linéaires finies dont les sommes sont convexes ; cet ensemble admet donc une adhérence.

Est-il possible d'approximer une fonction qui vaut 1 sur $[0, 1]$, puis 0 ? Cela revient à pouvoir obtenir n'importe quelle fonction de L^3, et c'est suffisant. C'est donc équivalent à l'hypothèse de Riemann.

Il ne s'agit donc pas d'un énoncé sphérique, mais d'un énoncé de semi-groupe analytique fonctionnel, et il est clairement basé sur des dilatations.

Je dois vous dire qu'il existe de très beaux travaux dans ce domaine. Vasyunin a examiné cette erreur et a dit : "Essayons d'approximer une fonction de 0 à 1 par ceci. Je vais restreindre l'ensemble des fonctions utilisables, prendre des lambdas (n'oubliez pas que j'effectue une dilatation par lambda), dilater par un entier, et exiger que la combinaison linéaire obtenue ne prenne que les valeurs 0 et 1. Je ne peux donc pas tenter de séparer des points à l'intérieur des fonctions."

Il a trouvé une liste finie de familles de solutions à ce problème, suffisamment riche pour obtenir la fonction 0, 1, grâce à la démonstration de l'hypothèse de Riemann. Cependant, il a également trouvé quelques solutions sporadiques, sans pouvoir prouver qu'elles étaient toutes complètes, une intuition remarquable. Villegas a ouvert la voie à cette découverte et a démontré un théorème remarquable : la liste de Vasyunin est complète.

C'est donc un résultat négatif, mais comme Sedov me l'a dit un jour, les résultats négatifs ont parfois des démonstrations bien plus élégantes que les résultats positifs. On peut parfois se dire qu'on devrait avoir un théorème bien meilleur. En réalité, c'est un résultat fantastique, mais peu utile.

L'hypothèse de Riemann limite les possibilités. La démonstration, et c'est là son aspect le plus élégant, consiste à extraire une fonction hypergéométrique des coefficients de la combinaison linéaire souhaitée. La condition d'obtenir 0 ou 1 (condition d'intégrité) repose sur l'intégrité des coefficients de cette fonction hypergéométrique. Ensuite, on utilise l'idée suivante de Villegas, le théorème d'Eisenstein, pour contrôler l'intégrité. Ce théorème ramène le problème à la question de savoir si les fonctions hypergéométriques possèdent des fonctions algébriques modernes finies $0, f, n, n-1$. Eisenstein a brillamment résolu ce problème. De plus, Villegas souligne que dans la démonstration élémentaire du théorème des nombres premiers, il ne faut pas passer au quatrième

ordre.

Comme vous le savez, il a choisi n parmi $2n$ et a beaucoup progressé. Il a ensuite cherché à écrire d'autres coefficients combinatoires très divisibles. Autrement dit, si l'on écrit des coefficients combinatoires entiers, des rapports, on peut calculer précisément la puissance de e divisée. Et à partir de là, on peut déterminer quel sera le troisième terme.

Tchebychev a noté une combinaison spécifique qui en découle : l'hypergéométrique dont le groupe algébrique est le groupe $\bar{e}$. C'est magnifique, de superbes mathématiques, mais pour l'hypothèse de Riemann, il semble que ce soit impossible. Voilà donc l'idée d'essayer d'utiliser cet algorithme de Riemann. Voyons maintenant quelques variantes de cette échelle.

On applique $T\lambda$ aux fonctions. Bien, toutes les tentatives naïves suivantes se basent sur ce qui suit. Si vous avez un espace de fonctions, de distributions, peu importe, et que vous êtes une fonction propre des dilatations, nous savons que nous considérons ici toutes les dilatations, et non seulement les semi-groupes (et non les λ), ainsi que tous les λ. Nous savons que les caractères d'un groupe abélien sont de cardinalité n et ne sont pas unitaires. Par conséquent, les fonctions propres d'un tel espace seraient nécessairement de la forme xp, pour une raison quelconque. Par exemple, je vais vous donner une manière simple de visualiser toutes ces constructions : elles se ressemblent toutes. Supposons que je veuille déterminer quand $xp = 0$; je vais créer un espace de fonctions qui prendra immédiatement les zéros.

Je prends une fonction, par exemple la fonction de Schwartz. Par souci de simplicité, je suppose que $f(0) = 0$ et ? ?, ce qui m'évite de me préoccuper des termes dont Riemann doit toujours tenir compte. Je calcule la somme $f(nx)$ et j'obtiens une fonction $h(x)$ définie sur la droite (la droite positive, si l'on préfère). J'ai donc maintenant des fonctions définies sur la droite, et je cherche les valeurs de xp qui sont orthogonales à toutes ces fonctions. Je considère donc l'espace vectoriel engendré par ces fonctions h, et je cherche la distribution qui lui est orthogonale, c'est-à-dire une fonction propre.

La condition est donc que l'intégrale de ceci doit être nulle, mais cela se factorise, c'est-à-dire $\zeta(s)$ multiplié par $f(s)$, où f est arbitraire. Donc, cela signifie que je suis à 0. Les X_p sont les fonctions duales, les distributions, qui annulent toutes ces fonctions, sont de la forme X_p, où p est nul. Bien, il s'agit d'un espace vectoriel, et vous avez les zéros interprétés comme les fonctions propres d'un opérateur linéaire. Vous ne savez pas quel est cet espace. Autrement dit, vous n'avez pas d'autre description de l'espace.

Quoi qu'il en soit, c'est la base de diverses interprétations simples et minimalistes sur le fait de le conserver. Plus récemment, on trouve les théorèmes de Bender, Brody et Müller. Dans les deux derniers cas, il s'agit d'un opérateur du second ordre, et non d'un opérateur du premier ordre ; il ne s'agit pas simplement d'une dilatation, mais bien d'un opérateur du second ordre qui commute avec la dilatation. Il est donc tout à fait possible d'utiliser la dilatation.

Un opérateur du second ordre est très élégant ; c'est le type d'hamiltonien physique, x fois c, et celui de Bender en est une variante. Ce sont des interprétations, car on ne connaît pas l'espace fonctionnel. Ce que l'on sait, c'est que chaque 0 est la seule fonction propre dans un certain espace,

au cœur même du plan, qui n'est ni un espace de Hilbert ni quoi que ce soit de ce genre. Les fonctions propres sont les zéros correspondants. Bien, ce sont donc des processus spectraux, et ils satisfont toujours au problème d'impossibilité. Impossibilité signifie que si je définis une combinaison linéaire, je la configure avec une combinaison linéaire.. Alors, tout échoue. Autrement dit, il y aurait des zéros sur la droite, et aussi des zéros qui ne sont pas du tout sur la droite. Il faut rompre le cycle où est le produit ordonné. Ces éléments élémentaires ne le détectent pas, à ma connaissance.

Je tiens à souligner un point ici, dans le cas numéro 2, et qui est important pour moi : je veux prendre en compte la présence de plusieurs zéros.

Pourquoi considérer la présence de plusieurs zéros ? Parce que j'ai dit que A existe, et B, dans n'importe quelle interprétation de ce type, où xp est la fonction propre, s'il y a plusieurs zéros (comme c'est le cas, chacun sait), alors non seulement X_p est une fonction propre, mais aussi X_p et $X_p \log X$, qui est également une fonction propre, et non une dilatation. Cette expression n'est déjà pas diagonalisable. Donc, comment interpréter cela ? C'est une valeur propre s'il y a plusieurs zéros, et l'expression n'est plus diagonalisable ; elle possède une composante uniforme dans la forme de Jordan de cette action.

Ces actions impliquent donc naturellement que, si elles sont multiples de zéro, la diagonalisabilité n'est pas assurée. C'est un point important à mes yeux. Pourquoi s'intéresser à l'interprétation spectrale ? Eh bien, c'est en raison du corps de fonctions que je vais tenter d'expliquer.

Cela linéarise notre problème, et tant que l'espace linéaire et l'opérateur linéaire ont quelque chose que l'on peut étudier, cela ne sert à rien si ce n'est que c'est un rien avec lequel on ne peut pas travailler ; alors cela pourrait être utile. Bon, permettez-moi de dire quelques mots sur cette idée de Hilbert-Pólya. Je ne me souviens plus exactement de ce que disait Patterson, mais je me rappelle qu'il disait à peu près que c'était impossible. L'idée de Riemann-Hilbert-Pólya est, à mon avis, tout à fait valable.

L'idée qu'un simple produit scalaire puisse rendre un opérateur auto-adjoint ou unitaire serait une erreur monumentale. Cela signifie que les zéros multiples sont un phénomène très rare, et même dans le cas d'un corps de fonctions, on ne démontre jamais qu'un produit scalaire miraculeux puisse rendre une fonction unitaire ou auto-adjointe. Autrement dit, aucune démonstration ne fonctionne ainsi.

En réalité, les ensembles ne sont pas toujours diagonalisables. Ainsi, le fait de considérer plusieurs zéros, ce qui est nécessaire pour une réflexion générale, implique que ce type d'opérateurs, dont la complexité varie de cette manière, pose problème. Permettez-moi de dire quelques mots sur l'approche de de Branges.

De Branges a donc plusieurs approches. Je n'ai lu que deux de ses articles. Le tout premier, il l'a publié juste après avoir démontré la conjecture de Bieberbach.

Ce fut l'une de ses plus grandes réussites. Il prit ensuite le temps de démontrer l'hypothèse de Riemann. Je ne donnerai pas tous les détails.

J'ai passé une semaine à le lire. Ce n'était pas une erreur, c'était une grave erreur. Mais au fil des ans, les choses ont évolué.

Et finalement, il était toujours en train de formuler. Quoi qu'il fasse, il y mettait tout son cœur.

Ce langage de l'espace de Hilbert des fonctions entières. C'est là qu'il se sentait vraiment à l'aise.

Je suis sûre que ce n'est pas exact, là où il se sent très à l'aise. D'ailleurs, tout est enregistré, mais je n'ai rien signé.

[Rires].

Dans l'un de ses travaux, chaque fois que de Branges prétend démontrer l'hypothèse de Riemann, il affirme également que zéro est un symbole. Vous vous demandez sans doute d'où cela sort ? Il s'avère que dans l'espace de Hilbert des fonctions, le théorème qu'il démontre en réalité implique la simplicité. C'est donc une affirmation beaucoup plus catégorique, qui ne tient pas compte des aspects logistiques.

Et je pense que c'est un problème très sérieux. En fait, dans une étude plus récente, il y a probablement huit ou dix ans, si vous regardez attentivement (Bombieri [3] l'a examinée très attentivement, et moi aussi), nous avons constaté qu'il prétend démontrer que les nombres sont simples s'il y a des intervalles entre eux, ces intervalles se situant juste entre D et E, et que le type de preuve qu'il souhaite se trouve dans cette implication particulière. Donc, je ne sais pas s'il existe un énoncé auto-adjoint, mais il existe un énoncé plus fort qui attribue un symbole aux zéros.

Et je pense que c'est un problème très sérieux si quelqu'un possède une telle démonstration. Bien sûr, concernant la fonction zêta de Riemann elle-même, je ne doute pas que ses zéros soient simples. Je ne pense pas que quiconque puisse le démontrer.

Sa démonstration aurait fonctionné dans plusieurs cas différents. Du moins, c'est ce qu'il affirmait. Mais nous savons qu'il existe un théorème multiple.

Je vais vous montrer un échange entre D et E. Bien, alors voyons pourquoi nous tenons tant à l'interprétation spectrale, car, encore une fois, elle a donné des résultats spectaculaires dans le cas des corps de fonctions. Commençons par parler des courbes sur les corps finis. Chacune de ces démonstrations comporte deux étapes.

La première est l'interprétation spectrale, qui provient toujours du Frobenius, et c'est là que l'on trouve des interprétations utiles du Frobenius. Voilà donc l'interprétation spectrale. La seconde est que l'interprétation spectrale ne permet pas d'établir l'auto-adjonction pour trois.

Il y a donc d'une part l'interprétation linéaire, et d'autre part comment utiliser cette algèbre linéaire, issue de la cohomologie dans le cas le plus sophistiqué, pour obtenir la positivité et démontrer l'hypo-

3. ?

thèse de Riemann, ce qui autorise la non-diagonalisabilité. Ils ont donc fourni deux démonstrations.

On généralise la preuve de Hasse au genre un, en utilisant l'anneau d'endomorphisme du jacobien de la courbe et en aboutissant à l'évolution et en prouvant que la trace de Frobenius induite sur l'action de $\phi' \to \phi'\phi$ est non négatif, et c'est la positivité qui le permet.

Une preuve bien plus belle, que nous apprécions tous, c'est sa preuve de correspondance sur la courbe croisée avec elle-même. Weil en a donné une bonne description.

Bombieri en a donné une très belle description en 1996, que j'ai lue dans la colonne de droite et que je peux partager avec n'importe quel groupe. Elle explique également le lien entre cette démonstration et une partie de la formule explicite, dont je parlerai dans un instant. Une autre démonstration, peu après celle de Weil, il s'agit d'utiliser le théorème de Riemann-Roch sur la surface $C \times C$. Cela est dû à Kunneth.

Bref, cette preuve de correspondance est celle qui, je crois, enthousiasme le plus tout le monde, y compris ? ? et ? ?, je pense. C'est bien ça ? Vous saurez cela demain. Je tiens à mettre en avant la démonstration de Stefanov.

La démonstration de Stefanov est élémentaire et utilise ce que beaucoup en combinatoire appellent aujourd'hui la méthode polynomiale. Elle consiste à majorer le nombre de points du corps contenant $\mathbb{Q}$ à n éléments, n tendant vers l'infini, en étendant le pouvoir polynomial à un degré supérieur, puis en majorant le degré du polynôme auxiliaire ainsi construit. C'est une démonstration élégante, qui a été décrite de manière très claire et soulignée.

Cela donne un peu plus d'informations. Schmitt en a parlé. Enrico Bombieri en a fait une bonne analyse, en précisant simplement qu'il suffit d'utiliser le théorème de Riemann-Roch.

Il y a une caractéristique de cette démonstration que je tiens à souligner, car elle a été très importante dans les travaux récents de Gray [4] et les miens, par exemple : elle fournit des informations dans des situations où la démonstration de Riemann est inopérante. En effet, la démonstration de Riemann ne fournit d'informations que si le genre est inférieur à $\sqrt{b}$, car alors le terme principal est $(b+b)/\sqrt{b}$ multiplié par le genre. Ainsi, si le genre est supérieur à $\sqrt{b}$, la démonstration de Riemann ne fournit aucune information.

Il y a une vie après Riemann. Il y a une vie au-delà de Riemann. Et la démonstration élémentaire le prouve, et dans notre problème, qui concerne les équations cubiques et les surfaces cubiques, c'est absolument crucial lorsque g est beaucoup plus grand que $\sqrt{b}$ et qu'on peut obtenir une borne supérieure non triviale avec un certain nombre de points.

La démonstration élémentaire contient donc plus d'informations et une démonstration, mais elle ne prouve pas les conjectures d'Artin. La structure reste donc la même, comme je l'ai mentionné. Il est assez surprenant que la conjecture d'Artin soit plus difficile que celle de Riemann.

4. ?

Bon, on a entendu parler de la démonstration de Deligne, qui utilise des familles (c'est une méthode différente), et de sa deuxième démonstration. Toutes ces démonstrations utilisent la monodromie comme liant. À ma connaissance, c'est pour l'instant la seule façon de traiter le cas général, et c'est un cas qui nous semble important. Bien, voici une carte postale de 1977.

Vous ne pourrez probablement pas bien la voir. On y lit Bob Vaughan, ainsi que Jean-Pierre Serre et Henrik Ibanez. C'est une carte destinée à Paul Cohen.

Nous n'avons pas encore prouvé l'hypothèse de Riemann. Elle a été envoyée à Paul Cohen, qui, je crois, était à une conférence, ou peut-être à un dîner, je ne me souviens plus. Vous étiez tous allés à une conférence en Allemagne, une de celles appelées Bofa, et tous étaient probablement très nerveux à l'idée de se réunir pour prouver l'hypothèse de Riemann..

On a trouvé ça dans ses papiers quand Hedgehog et moi avons fouillé ses affaires. Une de ses idées, c'est une tasse. Bon, je vais vous rappeler ce que sont les adèles.

Donc, les adèles sont $\mathbb{A}^\infty$, A^2... Ceci est pour Barry, Michael, les autres adèles.

Il s'agit simplement d'un produit infini assorti de quelques conditions particulières. $\mathbb{A}^\infty$ fournit un nombre réel. $\mathbb{A}^2$ fournit un nombre 2-adique, etc. $\mathbb{A}^3$ fournit un nombre 3-adique, $\mathbb{A}^6$ est un nombre 6-adique (Non, c'est une blague). Et $\mathbb{A}^p$ est un entier pour presque tout p, et la topologie est appelée topologie produit restreinte.

Il s'agit d'un anneau d'adèles, appelé vecteurs de valuation dans la thèse de Tate. Les adèles sont identiques, mais ici ce sont des nombres non nuls, et ils sont inversibles pour presque tout p. Ensuite, lorsqu'on utilise la sommation de Poisson, ou les travaux de Hecke, ou la version de Tate des travaux de Hecke, on exploite l'analyse de l'anneau $\mathbb{A}$ sur $\mathbb{Q}$, qui est assimilable à un tore, de manière additive, ou alors vous utilisez $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$, qui est une équation multiplicative, et vous faites l'un ou l'autre.

Il ne faut pas mélanger les deux. C'est juste un des produits du département de mathématiques où travaillait Paul Cohen. Quand j'étais étudiant, étudiant de troisième cycle en 1977, à peu près au moment où il a obtenu sa médaille Fields, je lui ai dit : "Je suis venu ici pour travailler sur la logique", et il a répondu "La logique ne m'intéresse pas."

Et il a dit : "Nous voulons un système complexe qui contienne $\mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$.". J'ai demandé : "Quoi ?". Il a répondu : "Alors vous avez $\mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$, et considérez l'action de $\mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$ sur $\mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$. $\mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$ est un espace très singulier."

Mais il avait constaté formellement que si l'on effectue cette multiplication-addition sur cette fonction, et que cela ne semble pas poser de problème au départ, alors il reconnaît que l'on obtient le second membre de ce que j'appellerai ici la formule explicite de Riemann-Guinand-Weil. La formule explicite de Riemann est bien sûr celle de Riemann. Guinand fut le premier à la reconnaître comme une dualité de Fourier, et Weil, en cherchant à élaborer une démonstration similaire à celle qu'il avait réalisée dans le corps des fonctions, a écrit le second membre de cette formule de différentes

manières. De nombreux chercheurs l'ont perfectionnée, et l'on peut ainsi s'inspirer de cette approche.

Voici ce que représente le membre de droite, du moins dans la version récente d'Alain Connes. Il s'agit d'une somme sur tous les positions. On obtient ainsi toutes les fonctions de Hecke.

Ceci s'applique à un corps de nombres. Il s'agit de la somme des log p pour p un nombre premier, mais avec un nombre fini de fonctions L considérées simultanément. C'est ainsi que fonctionne la topologie.

Ce sont des côtés extrêmement droits. Alors, comment est-ce que j'essaie de faire fonctionner tout ça ? Je ne comprends pas vraiment ce que vous dites. On a beaucoup parlé.

Vous pouvez simplement me dire "J'ai cette idée, j'ai cette autre idée, mais maintenant que j'ai parcouru certains de ses journaux intimes, qui sont variés, à ma connaissance, mais je me souviens surtout de ce qu'il me disait au fil des années : il recherchait toujours le positif. Il a rapidement abandonné le formalisme de cette approche car il était trop formel, et il essayait de décomposer l'espace d'une manière combinatoire.

Il s'est certainement beaucoup inspiré de la démonstration de correspondance sur $C \times C$. Ils ont, bien sûr, introduit cette fonctionnelle afin d'écrire un énoncé de positivité, une fonctionnelle quadratique.

Enrico a beaucoup écrit sur ses efforts pour comprendre l'analyse fonctionnelle de cette équation fonctionnelle. Quoi qu'il en soit, cela était certainement présent à l'esprit de Paul Cohen, je n'en ai aucun doute, lorsqu'il cherchait à comprendre $\mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$. Évidemment, il n'a pas pu donner son accord sur ces pistes, sinon nous le saurions aussi, mais ce dont je me souviens, et qui était très beau, c'est que ses calculs, sa recherche de la positivité, aboutissaient à une simplicité remarquable.

Il avait à l'époque des penchants un peu ridicules pour utiliser toutes ces lignes. Ce n'est peut-être pas surprenant, car si l'on considère $\mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$, et qu'on tente de la formaliser, on aboutit rapidement à ce genre de choses. Comme nous le savons, Alain Connes en a proposé une interprétation précise.

En fait, pas en 1999, lorsque j'ai rencontré Ludwig Schaefer. Ce n'était pas assez précis, car il forçait artificiellement les zéros sur la droite critique, cherchant simplement à les identifier. Il a donc introduit plusieurs espaces F qui captaient ces zéros, puis a déclaré : "Je dois juste prouver cette trace." Il rencontrait également un problème avec les multiplicités élevées, pour la même raison : il devait limiter la somme des espaces F, ce qui n'était possible que dans certaines limites. Ainsi, Connes n'a pas donné d'interprétation directe des zéros.

Il essayait de brûler les étapes pour prouver l'hypothèse de Riemann du même coup. Meyer a corrigé cela en 2005 : on n'impose pas aux zéros d'être sur la droite, on autorise des espaces très sophistiqués, que je n'aurais pas choisis ; je n'aurais pas choisi certaines fonctions spatiales, que je ne qualifierais pas d'espaces nucléaires. Bref, il faut des espaces vectoriels topologiques d'un certain type ; je suis sûr que Meyer en aurait trouvé.

Meyer le fait dans un article remarquable où il formalise ce résultat. Il s'agit d'un théorème qui,

sur l'espace $\mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$, définit précisément cet espace, les fonctions qui y sont définies, et calcule la trace de la multiplication sur cet espace. La multiplication s'effectue en multipliant X par Y, où Y est l'intégrale de la multiplication sur l'addition sur $\mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$. Sa trace, sans qu'il soit nécessaire de diagonaliser cette expression, correspond au membre de droite de la formule explicite.

C'est une interprétation simple. C'est beau, mais on verra demain si c'est utile. Je crois que la famille est la seule voie à suivre, ou du moins la seule qui me semble prometteuse, mais c'est aussi un obstacle de taille.

Pourquoi la famille ? Il est très difficile de se concentrer sur un seul objet en mathématiques. Comment peut-on considérer un seul individu et croire que ses fonctions existent ? D'ailleurs, je connaissais très bien Paul Cohen, et son style était totalement différent de celui de ces deux autres personnes pourtant très brillantes, Cohen était complètement peu professionnel.

Je sais juste qui il était. Jour après jour, il se heurtait au mur. L'absence de progression mathématique incrémentale n'existe pas.

Tu dois faire ce que tu as à faire. Mais il était vraiment mauvais dans ce domaine ; Cohen était plus raisonnable. À mon avis, si tu veux te pencher sur la question, il faut trouver une solution.

Alors, pourquoi sommes-nous à cette conférence ? Parce que nous voulons inciter les jeunes à résoudre ce problème. Alors, soit vous vous heurtez à un mur, soit vous trouvez une solution de contournement. Je pense que la meilleure approche consiste à trouver une solution de contournement, à découvrir de nouvelles choses, et comme un requin, si vous voyez du sang, c'est que vous êtes le premier.

Vous êtes inspiré par une idée. Et c'est là que vous risquez de tout miser sur une seule chose si vous voulez vous lancer aujourd'hui. Bien sûr, Cohen avait des atouts sur lesquels s'appuyer.

Il avait déjà fait quelque chose. Les débuts sont plutôt difficiles. Bon.

Nous voulions donc former ces objets, et nous pouvions les déformer comme la saumure, c'est-à-dire en sortant de ces formes pour passer à un espace complètement différent. Nous voulons rester dans le même espace, et c'est pourquoi je vous ai dit que l'ensemble des formes automorphes et c'est un fait fondamental - est dénombrable, car il provient d'un état spectral discret. Les formes cuspidales sont dénombrables, car le spectre est discret.

Et c'était très important, car cela m'évite immédiatement de faire des déformations absurdes, des déformations continues. Dans le corps des fonctions, on peut déformer au sens algébrique de manière élégante. C'est ce qui nous manque.

En tout cas, vous cherchez à déformer les objets en objets de même genre, et c'est ce qui a conduit Katz et moi-même à tenter de définir ces familles de fonctions L. Nous avons élaboré une définition utile dans certains cas, notamment pour étudier les symétries, les zéros de basse énergie et les théorèmes de densité nulle. Cependant, je ne la trouve pas satisfaisante car nous n'avons pas la

notion adéquate de famille pour attaquer l'hypothèse de Riemann.

C'est là que nous avons bloqué, et je vais vous donner un point de départ, une sorte d'obstacle majeur au début de cet exemple. Je tiens simplement à préciser que ces théorèmes, démontrés pour les familles, sont très naturels car on ne connaît pas les coefficients d'une forme multiple. En revanche, si l'on a une famille, on peut calculer la trace d'une famille multiple, et cette trace, grâce à la forme de trace cellulaire, peut ensuite être examinée et analysée. On ne peut pas analyser les coefficients si l'on ne connaît pas la trace.

Donc, on ne dispose que d'une seule approche et il est très difficile de travailler avec cette approche. Une fois la trace calculée, on peut répondre à de nombreuses questions. C'est le genre de théorème où l'on démontre une affirmation statistique, dont la plupart sont des substituts complets de l'hypothèse de Riemann. Ce n'est donc pas le sujet qui est dynamique simplement parce qu'il existe des substituts permettant de démontrer des théorèmes complets.

Un excellent exemple en est le théorème de Bombieri-Vinogradov, qui remplace avantageusement l'hypothèse de Riemann dans les problèmes impliquant de nombreuses L-conjonctions, et où il n'est pas nécessaire de connaître chaque individu, mais seulement la moyenne, ce qui permet d'atteindre l'objectif sans perte d'information. Ces théorèmes sont rares, mais ils existent. Autrement dit, on n'atteint pas le sommet de l'Everest...

On fait le tour du problème et on arrive au résultat qu'on aurait obtenu avec l'hypothèse de Riemann.

Ces théorèmes, qui concernent les familles, ne sont donc pas convaincants ; ils ne semblent pas permettre de démontrer l'hypothèse de Riemann. Je voudrais donc terminer en expliquant deux petits points. Quant aux autres approches, nous attendrons jeudi, car je ne les ai pas encore comprises.

Mais je tiens à souligner qu'avec les familles, il y a une avancée majeure, je pense, grâce à Saito, et c'est ce sujet que je souhaite aborder. Supposons donc que vous ayez un système de classement et d'argent. Parfait.

Donc, le rang et l'argent sont très bons ; si vous prenez par exemple le $i(n)$, vous prenez $i(n^s)$ et vous pouvez effectivement le quantifier. Et bien sûr, je pense que la plupart des gens feraient les moments, ils calculeraient tous les moments, et diraient : "Très bien, ça a très bien fonctionné, prenons $i(n^4)$ sur n^s.". Pourquoi ne pas examiner cela et le quantifier ? C'est une erreur. Quelqu'un a compris que si vous prenez la représentation du groupe dual de Lagrange ou celle du groupe géométrique, qui est celle des puissances symétriques, des puissances tensorielles de l'algèbre linéaire avec les racines, alors c'est correct.

Et c'est une question qui nous échappe totalement dans le domaine de l'analyse des familles. Quel est cet objet censé unifier les différentes fonctions de la famille ? Du moins, je ne le sais pas. C'est en quelque sorte notre point de départ.

Je crois que cette idée de puissances symétriques est due à Saito. Pourquoi ? On la trouve cer-

tainement dans Langlands en 1967, mais si vous consultez l'ouvrage de Serre, il explique déjà la démonstration de Saito-Tate avec les puissances symétriques pour une courbe elliptique. Il aborde donc certainement la notion de puissances symétriques.

Je crois que Tate l'a expliqué, mais on ne rend pas assez hommage à Saito. Saito n'a pas fait les calculs pour Saito-Tate. Il les avait en fait compris, si j'en crois certains écrits de ? ? ?.

À mon avis, il est le premier à l'avoir compris. L'argument des puissances symétriques et de la positivité est un atout précieux qu'il nous faut exploiter avec brio, comme Nick l'a si bien expliqué. C'est donc là, pour moi, que se situe le premier obstacle.

J'ai trois minutes. Je vais vous expliquer comment déformer le théorème des nombres premiers. C'est à ce moment-là que je résolvais la série d'Einstein.

Il a dit : "Eh bien, laissez-moi vous montrer quelque chose d'intéressant." Et il m'a montré ceci. Vous pouvez le trouver.

Il a donné des conférences à ce sujet. Et si vous allez à l'Institut [5], vous pourrez en trouver des traces. Il s'agit d'une conférence sur la déformation. Et la conférence traite d'une déformation qui concerne un terme constant, lequel possède un produit eulérien lorsqu'on considère le point de vue arithmétique, mais pas lorsqu'on ne considère pas ce point-de-vue-là. Voici comment cela se présente. Supposons donc que j'aie un sous-groupe de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Nous expliquerons $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ dans un instant. Mais j'ai un groupe plus général. Il possède une cuspide, donc il a un sous-groupe qui est $M(0,1) \times M(n,\mathbb{Z})$.

Une seule cuspide, donc le groupe modulaire, comme vous le savez tous, ressemble à cela, mais il pourrait s'agir d'une déformation. Peut-être dois-je me référer à un indice fini, et j'ai alors une seule pointe et un seul paramètre. Il existe un espace eulérien strict, et un espace modulaire de tels groupes.

On peut déformer des groupes discrets dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. C'est ce que je vais faire. Bien, nous avons donc un tel groupe, et nous en formons la somme suivante.

Je l'appellerai la somme associée à y de la somme de toutes les matrices a, b, c, d du groupe dans les classes doubles du groupe E. Vous verrez que cette somme ne dépend pas de la classe. Je prends $ea, a/d, e^2a/d$. Il s'agit d'une somme sur les classes doubles, et c'est une fonction de c uniquement, car $ad - bc = 1$. Voilà donc la somme sur les classes doubles, et c'est une fonction de c. Le groupe étant discret, on peut calculer la somme $c \leq x$ de $\mu y(c)$. On peut le démontrer en utilisant la théorie spectrale des séries d'Eisenstein. Je reviens à la démonstration des séries d'Eisenstein, que j'apprécie beaucoup, comme vous pouvez le constater. Vous pouvez prouver que si le spectre de ce groupe, un H mod γ et un spectre plus, a maintenant des valeurs propres comprises entre 0 et un quart, ce qui sera vrai si vous êtes dans une topologie basse pour des raisons simples, il n'y aura donc pas une telle chose dans cet espace modulé.

5. à l'IAS.

Et cela se démontre pour tout γ avec un $O(x)$ très petit. Il n'a pas obtenu de taux car on ne lui avait pas demandé ce qu'était une région sans zéros. Il n'y a pas de taux. Donc, c'est vrai dans tout l'espace dichromique.

J'ai déformé cette affirmation ; c'est vrai, c'est une affirmation purement de théorie des groupes. Elle implique la multiplication et l'addition, car on multiplie deux matrices par deux ; ces deux opérations sont intrinsèques. Si l'on restreint, et c'est le point important, le fait que PSL à $\mathbb{Z}$ plutôt qu'à $\mathbb{C}$ soit la fonction module, c'est ce qu'a dit Ramanujan, et donc ceci est élémentairement équivalent au théorème des nombres premiers, comme on le savait bien avant la démonstration de ce théorème.

Il existe donc un théorème des nombres premiers que l'on peut déformer dans une famille et qui est vrai dans tout cet espace dichrome. Ce n'est pas une approche de Riemann, mais on pourrait se demander : "Ne peut-on pas donner une démonstration élémentaire du théorème des nombres premiers ?" Car il ne s'agit pas d'un problème elliptique ; si l'on se contente d'un sous-groupe discret, cela ne constitue même pas une démonstration du théorème des nombres premiers.

Il n'y a pas d'arrangement. Bon, c'est vrai dans tout l'espace pythagoricien. J'ai déformé cette affirmation, c'est vrai, c'est une affirmation purement de théorie des groupes.

Cela implique la multiplication et l'addition, car la multiplication de deux matrices par deux inclut ces deux opérations. Si l'on restreint, et c'est important, le fait que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ de $\mathbb{C}$ soit la fonction module, alors il s'agit d'un tenseur riemannien. Ainsi, cela est fondamentalement équivalent au théorème des nombres premiers, comme on le savait bien avant la démonstration de ce théorème.

Il y a donc le théorème des nombres premiers, qui est uniformément affirmatif, c'est-à-dire vrai dans tout l'espace pythagoricien. Ce n'est pas une approche de Riemann, mais on pourrait se demander : "Ne pourrait-on pas en donner une démonstration élémentaire, ou une démonstration éclectique ?" Car ce n'est pas le cas ici.

Elle était elliptique, mais elle le serait toujours, et on ne peut pas donner de preuve du théorème des nombres premiers. Merci.

Savions-nous que Riemann n'était pas forcément complexe ? Absolument pas. Je pense que Riemann serait doué, et il complexifierait le sujet. Mais pas sous la forme que vous lui donnez, personnellement.

Je ne crois pas que ce soit la bonne question. Enfin, j'ai eu quelques questions. C'est probablement vrai qu'elles sont simples.

Il n'y a aucune raison qu'il y ait une base, mais cela ne signifie pas pour autant que... Vous allez lui donner... Non, c'est une conjecture, n'est-ce pas ? En fait, il existe une conjecture de... Donc, au fait, concernant les fonctions de données dédiées, on me rétorque souvent que j'utilise trop de fonctions L. Je considère toutes les fonctions L automorphes.

La solution pourrait tout simplement résider dans l'utilisation de fonctions de données dédiées. C'est d'ailleurs ce que Paul Cohen a toujours affirmé. Il démontrera l'utilité de ces fonctions, et nous laisserons le soin à chacun de se pencher sur le reste.

Il est un bon candidat pour cette discussion. Il est vrai que pour les fonctions de données dédiées, plusieurs zéros peuvent exister au cœur d'une fonction. C'est une sorte de course amicale autour des compilations de racines numériques.

Mais si vous factorisez, si vous supposez un grand nombre de conjectures, en fait, bien sûr, ce qui est plus difficile, mais supposons que vous factorisiez la fonction de données dédiée en ses facteurs irréductibles, alors chaque morceau... La présence de zéros multiples s'explique uniquement par la présence d'un terme à la dimension de l'irréductible. Par conséquent, les fonctions L de garde, issues des représentations de Galois, ne devraient jamais s'annuler au centre. Il s'agit d'une généralisation de Chowla, qui est fausse en théorie des fonctions, mais elle met en évidence une différence fondamentale.

Rubinstein et moi-même conjecturons même que ces fonctions L sont linéairement indépendantes des rapports. Mais j'insiste pour considérer les probabilités. C'est indispensable.

Voilà où j'en suis. Ah oui ? Alors, pensez-vous qu'il soit très facile de prouver que la classe de Riemann est équivalente pour toutes les formes de la fonction L, et de le prouver pour une forme particulière ? Je faisais référence à leurs ? ? J'aime bien cette idée que l'une est valable pour toutes.

Vous pensez donc que c'est facile à prouver ? Non, non. Ce qui m'inquiète, c'est que ce soit peut-être vrai pour les fonctions motiviques. Celles qui proviennent des représentations de Galois et de la géométrie algébrique... Ce serait donc une bonne preuve génétique.

Mais devraient-elles être optimales ? Non, elles ne le sont pas. Ce sont des monstres continentaux. Et ce sont les plus répandus.

Et c'est précisément pour cela que je décide, à un moment donné, que vous devrez vous en occuper. Vous devriez peut-être savoir que de nombreuses fonctions L ont tous leurs zéros dans leur partie inférieure. Et c'est un calcul très élégant.

On obtient un échantillon néerlandais ? et Riemann gagne. Autrement dit, on ne peut pas contredire ce résultat si je me contente de les compter.

En fait, on pourrait adopter le point de vue, partagé par certains de mes amis spécialistes en géométrie arithmétique, selon lequel une représentation de Galois paire poserait problème pour déterminer quelle proportion de la valeur que vous lui attribuez serait identique. Ainsi, de mon point de vue, et de celui de Langlands, on ne peut pas se permettre de rejeter ces belles représentations. Elles font partie intégrante du problème.

Et il essaie de les récupérer. Mais il est concevable, pour répondre à votre question, que si le monde était vrai en algèbre, et qu'il existait ces étranges jalons, pour lesquels il est faux, je suppose que

je répondrais à la question. Mais je ne me baserais pas uniquement sur la lecture de cela.

Il doit être possible de faire ça. J'ai une question. Vous disiez tout à l'heure que c'était devenu des zéros multiples.

Certaines de ces multiplications spectrales sont indétectables. C'est exact. J'ai une petite lettre de Rico qui l'explique.

Et il explique cela de manière très convaincante en s'appuyant sur une base de symétrie complète. Mais vous semblez dire que c'était une bonne chose. Et cela me perturbe un peu, car bien sûr, l'interprétation spectrale bayésienne est toujours diagnostiquable.

Pas en général. Mais c'est vrai. C'est vrai.

La convergence est réelle. On la croit, mais on ne la connaît pas. Uniquement dans une interprétation chronologique.

Je comprends. Mais cela n'a pas été prouvé. Sauf dans l'histoire récente.

Non, non. Ce n'est pas prouvé par un problème auto-adjoint. Oui, je suis d'accord.

Ce n'est pas par auto-adjoint. Je suis d'accord. Donc, j'expliquais, mon but était d'expliquer, pas que la lecture... Non, non.

Je ne comprends plus mon propos. J'expliquais le principe de Huppert-Poindert. Autrement dit, ce principe impliquerait que les choses sont analysables, pour une autre raison.

Bon, d'accord. Il faut que j'y réfléchisse. Je ne m'en étais pas rendu compte.

Je croyais que oui. Et ça arrive. Non, ça n'arrive pas.

Je ne le savais pas. Et c'est ce que l'on croit. Oui, ça arrive.

Bon, pour toute donnée projective lisse de type HI, ce problème de Bayes est diagnostiquable. Très bien. Il me faut les deux points.

Il faut que je ponctue un peu. Très bien. Autrement dit, peut-être pouvez-vous envisager plusieurs options.

Et peut-être que vous pouvez... Alors, vous pouvez peut-être envisager la validité du schéma de Hilbert-Poincaré, si tout est diagonalisable, car ce que je disais, c'est que personne ne l'utilise jamais. Mais je n'avais jamais réfléchi à sa validité géométrique....

Si vous vous réveilliez un matin avec la bonne idée pour démontrer l'hypothèse de Riemann ou la fonction zêta de Riemann, l'abandonneriez-vous ? Je vous l'ai dit. Je serais ravi de le faire, mais ce

serait extrêmement décevant si cela ne fonctionnait qu'avec de petits vecteurs temporels à cause du théorème de Hamilton. Autrement dit, si c'était le cas... Bon.

La réponse à cette question est que si vous demandez quel est l'angle de la fonction zêta de Riemann en $\mathbb{F}_q(t)$, il s'agit de la droite projetée, et dans ce cas, elle ne comporte aucun zéro. Oui, ce serait donc plutôt décevant. Mais ensuite, dans certains cas... Il y a un plus petit individu, et nous avons aussi le plus petit individu de la fonction zêta elle-même.

À mon avis, nous avons déjà un peu perdu. D'ailleurs, l'hypothèse de Riemann ne sert à rien. Vous me dites que c'est un théorème fascinant d'Eisenstein, mais cela ne semble pas poser de problème.

Oui. D'accord. En fait, je m'intéressais directement à l'application car toutes ces petits intégrales posent problème, notamment en raison d'un théorème.

Je n'avais pas l'intention de conclure, mais j'allais en quelque sorte le faire avec cette remarque que vous avez faite à propos de.... Il y aurait eu un très grand nombre de fonctions zêta. Stelfer m'a également fait remarquer que le niveau logique de la fonction zêta de Riemann, des caractères de Dirichlet, etc., est extrêmement différent d'un caractère à l'autre. On pourrait concevoir des démonstrations où, par exemple, chaque fonction L de Dirichlet nécessite une démonstration individuelle.

Vous pouvez imaginer que vous avez une preuve pour chaque neurone.