

Traduction d'un extrait du livre *Unsolved Problems in Number Theory*, de Richard K. Guy (Springer, 1981) : bibliographie concernant la conjecture de Goldbach

Chapitre C. Théorie additive des nombres

C1. L'un des problèmes les plus célèbres est la conjecture de Goldbach selon laquelle tout nombre pair supérieur à 4 peut s'exprimer comme la somme de deux nombres premiers impairs. Vinogradov a démontré que tout nombre impair supérieur à $3^{3^{15}}$ est la somme de trois nombres premiers, et Chen Jing-Run a montré que tout nombre pair suffisamment grand est la somme d'un nombre premier et du produit d'au plus deux nombres premiers.

La "conjecture A" de Hardy et Littlewood (cf. A1, A8) stipule que le nombre $N_2(n)$ de représentations d'un nombre pair n comme somme de deux nombres premiers impairs est asymptotiquement donné par

$$N_2(n) \sim \frac{2cn}{(\ln n)^2} \prod \left(\frac{p-1}{p-2} \right),$$

où, comme dans A8, $2c \approx 1.3203$ et où le produit est pris sur tous les nombres premiers impairs divisant n .

Stein et Stein ont calculé $N_2(n)$ pour $n < 10^5$ et ont trouvé des valeurs de n pour lesquelles $N_2(n) = k$ pour tout $k < 1911$. On conjecture que $N_2(n)$ prend toutes les valeurs entières positives.

Soit $\varphi(n)$ la fonction indicatrice d'Euler (B36) telle que si p est premier, $\varphi(p) = p - 1$. Si la conjecture de Goldbach est vraie, alors il existe, pour tout nombre m , des nombres (premiers) p, q tels que

$$\varphi(p) + \varphi(q) = 2m.$$

Si l'on relâche la condition de primalité de p et q , il devrait être plus facile de démontrer qu'il existe toujours des nombres p et q satisfaisant cette équation. Erdős et Leo Moser se demandent si cela peut être fait.

- [-] Chen Jing-Run, On the representation of a large even number as the sum of a prime and the product of at most two primes, *Sci. Sinica* 16 (1973) 157–176 ; MR 55 7959 ; II 21 (1978) 421-430 ; MR 80e : 10037.
- [-] J. G. van der Corput, Sur l'hypothèse de Goldbach pour presque tous les nombres pairs, *Acta Arith.* 2 (1937) 266–290.
- [-] N. G. Čudakov, On the density of the set of even numbers which are not representable as the sum of two odd primes, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 2 (1938) 25-40.
- [-] N. G. Čudakov, On Goldbach-Vinogradov's theorem, *Ann. of Math.* (2) 48 (1947) 515-545 ; MR 9, 11.

- [-] T. Estermann, On Goldbach's problem : proof that almost all even positive integers are sums of two primes, *Proc. London Math. Soc.* (2) 44 (1938) 307-314.
- [-] T. Estermann, Introduction to modern prime number theory, *Cambridge Tracts in Mathematics* 41, 1952.
- [-] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, The exceptional set in Goldbach's problem, *Acta Arith.* 27 (1975) 353–370.
- [-] Pan Cheng Dong, Ding Xia Xi and Wang Yuan, On the representation of every large even integer as the sum of a prime and an almost prime, *Sci. Sinica* 18(1975) 599-610 ; MR 57 5897.
- [-] P. M. Ross, On Chen's theorem that each large even number has the form $p_1 + p_2$ or $p_1 + p_2 p_3$, *J. London Math. Soc.* (2) 10 (1975) 500-506.
- [-] M. L. Stein and P. R. Stein, New experimental results on the Goldbach conjecture, *Math. Mag.* 38 (1965) 72-80 ; MR 32 4109.
- [-] Robert C. Vaughan, On Goldbach's problem, *Acta Arith.* 22 (1972) 21-48.
- [-] Robert C. Vaughan, A new estimate for the exceptional set in Goldbach's problem, *Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc.* 24 (Analytic Number Theory, St Louis, 1972) 315-319.
- [-] I. M. Vinogradov, Representation of an odd number as the sum of three primes, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 15 (1937) 169–172.
- [-] I. M. Vinogradov, Some theorems concerning the theory of primes, *Mat. Sb. N.S.* 2 (44) (1937) 179–195.
- [-] Dan Zwillinger, A Goldbach conjecture using twin primes, *Math. Comput.* 33 (1979) 1071 ; MR 80b :10071.