Sur un problème concernant le remplissage aléatoire d'un espace à une dimension

A. Rényi

Résumé

Dans l'article, le problème suivant est résolu : plaçons au hasard un intervalle unité sur l'intervalle $(0, x)$ (par cela, on veut dire que le centre de l'intervalle unité est un point au hasard uniformément distribué dans l'intervalle $(1/2, x - 1/2)$. Plaçons un second intervalle unité au hasard (selon le même sens) indépendamment du premier, sur l'intervalle $(0, x)$. Si le second intervalle intersecte le premier, il est éliminé, et le choix est répété de la même façon, i. e. si k intetvalles unités (disjoints) ont déjà été choisis et placés sur l'intervalle $(0, x)$, on en choisit au hasard un autre, mais on ne le conserve que s'il n'intersecte aucun des intervalles choisis précédemment, sinon, on renouvelle le choix, etc. Le processus s'arrête quand il n'y a plus de possibilité de placer un intervalle unité supplémentaire de telle façon qu'il n'intersecte aucun des intervalles précédemment placés. Le nombre d'intervalles unités qui peuvent ainsi être placés sur l'intervalle $(0, x)$ sera noté ν_x. ν_x est clairement une variable aléatoire. Appelons $M(x)$ la valeur moyenne de ν_x. On montre dans l'article que $M(x)$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$M(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x M(t)dt + 1 \tag{1}$$

et la condition intiale $M(x) = 0$ pour $0 \leq x \leq 1$. Les valeurs de $M(x)$ peuvent être successivement des intervalles déterminés $n \leq x < n+1$ $(n = 1, 2, ...)$ au moyen de (1). Dans le présent article, on étudie le comportement asymptotique de $M(x)$. En introduisant la transformée de Laplace

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} M(x)dx, \tag{2}$$

on montre que $\varphi(s)$ est une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{ds}(se^s\varphi(s)) = \varphi(s)(e^s - 2) - \frac{1}{s}. \tag{3}$$

Il en découle que

$$\varphi(s) = \frac{e^{-s}}{s^2}\int_s^\infty \exp\left(-2\int_s^t \frac{1-e^{-u}}{u}du\right)dt \tag{4}$$

De (4), par un théorème taubérien bien connu, il s'ensuit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M(x)}{x} = C \tag{5}$$

où

Transcription, traduction : Denise Vella-Chemla, novembre 2024.

$$C = \int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\right) dt \sim 0,748. \tag{6}$$

Par une recherche plus complète de la formule d'inversion de la transformée de Laplace, on peut montrer que [1]

$$M(x) = Cx - (1-C) + O\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad \text{pour tout } n. \tag{7}$$

De plus, on montre également que ν_x/x tend stochastiquement vers C lorsque $x \to \infty$. Finalement, des relations récursives sont obtenues qui permettent de déterminer également la distribution de probabilité de ν_x. L'auteur espère revenir à un problème analogue pour un nombre quelconque de dimensions dans un article ultérieur.

[1] N. G De Bruijn a remarqué qu'en utilisant sa méthode, l'estimation du terme reste dans (7) peut être rendue encore plus fine.