

AMPLITUDES ET FONCTION ZETA DE RIEMANN
GRANT N. REMMEN

Résumé : Les propriétés physiques des amplitudes de diffusion sont appliquées à la fonction zeta de Riemann. Plus spécifiquement, une amplitude de forme fermée est construite, décrivant l'échange arborescent d'une tour de masses $m_n^2 = \mu_n^2$, où $\zeta(\frac{1}{2} \pm i\mu_n) = 0$. Le fait de contraindre les masses à être réelles correspond à l'hypothèse de Riemann, la localité de l'amplitude correspond au caractère méromorphe de la fonction zeta, et le couplage universel entre les états avec ou sans masse correspond au caractère simple des zéros de ζ . Les limites unitaires à partir des relations de dispersion pour l'amplitude avant traduisent la positivité des moments impairs de la suite des $1/\mu_n^2$.

Introduction. La fonction zeta de Riemann, un objet d'un intérêt central en théorie des nombres, est définie par

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-z}} \quad (1)$$

pour $\text{Re}(z) > 1$, et par prolongement analytique au reste du plan complexe.

La fonction est partout analytique excepté en un pôle simple en $z = 1$ correspondant à la série harmonique divergente.

Malgré l'importance de la fonction zeta en mathématiques et en physique, de la théorie des nombres aux intégrales de chemin, de nombreuses questions perdurent. La localisation de ses zéros est particulièrement intéressante. Alors que $\zeta(z)$ a des zéros triviaux aux nombres pairs négatifs par l'équation fonctionnelle,

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin(\pi z/2) \Gamma(1-z) \zeta(1-z), \quad (2)$$

elle a aussi infiniment plus de zéros.

Les exemples connus de ces zéros non triviaux, qui se dénombrent en trillions [1], appartiennent tous à la droite critique, $\zeta(\frac{1}{2} \pm i\mu) = 0$ pour μ réel.

(Dans la suite, on prend $\text{Re}(\mu) > 0$: $\mu_1 \simeq 14.135$, $\mu_2 \simeq 21.022$, etc.)

La conjecture que μ est réel pour tous les zéros non triviaux de $\zeta(z)$ s'appelle l'hypothèse de Riemann, un des problèmes les plus célèbres et fondamentaux en mathématiques, avec des conséquences importantes pour la distribution asymptotique des nombres premiers [2].

D'autres questions ouvertes consistent à savoir si tous les zéros non triviaux sont simples [3,4], à connaître les propriétés statistiques des zéros et le comportement asymptotique de ζ sur la droite critique.

Institut Kavli de physique théorique, Département de Physique, Université de Californie, Santa Barbara, CA 93106.

Traduction de l'article <https://arxiv.org/pdf/2108.07820.pdf>.

Dans cette note, on relie les propriétés de la fonction zeta, incluant l'hypothèse de Riemann, aux amplitudes de diffusion.

L'idée de relier les propriétés mathématiques de la fonction zeta à un système physique remonte à la conjecture de Hilbert-Pólya datant du siècle dernier [4,5] qui dit que les μ_n correspondent aux valeurs propres d'un certain hamiltonien en mécanique quantique.

Un gros travail a été effectué pour tenter de trouver un tel opérateur (voir par exemples les références [6-8]) ou pour identifier d'autres connexions à la physique, incluant l'observation par Dyson de la relation entre la fonction de deux points de l'ensemble unitaire gaussien et la conjecture de corrélation des paires de Montgomery [4], aussi bien que les interprétations de la phase de ζ en diffusion quantique chaotique non-relativiste [9,10].

Malgré ce progrès, pourtant, il y a eu relativement peu de travail sur la fonction zeta dans le contexte des amplitudes de diffusion relativistes.

L'idée de réinterpréter un objet mathématique irrésistible comme une amplitude - avant qu'un hamiltonien ne soit trouvé, et comme un guide pour développer une physique nouvelle et intéressante - a un précédent notable.

En considérant la fonction beta d'Euler comme une amplitude de diffusion, l'expression de Veneziano [11], et la recherche d'un système produisant cette amplitude a amené au développement de la théorie des cordes.

En fait, comme cela a été montré par Freund et Witten [12], l'amplitude de Veneziano elle-même peut être écrite en fonction de ratios de fonctions zeta de Riemann, mais de telle façon que les zéros non triviaux disparaissent [13].

Cela laisse la question ouverte d'une amplitude de diffusion dont la structure dépendrait des zéros non triviaux de ζ .

C'est à cette question que nous répondrons dans le présent travail. En particulier, on fabriquera une amplitude de diffusion $\mathcal{M}(s, t)$, écrite dans une forme fermée, compacte, pour laquelle il y a une correspondance élégante entre les propriétés physiques et les attributs (connus ou conjecturés) de la fonction zeta de Riemann¹ :

$\mathcal{M}(s, t)$		$\zeta(z)$
Pôles en $s, u = m_n^2$ pour m_n réel	\longleftrightarrow	Hypothèse de Riemann
Localité (pôles simples)	\longleftrightarrow	Caractère méromorphe
Couplage universel	\longleftrightarrow	Conjecture de la simplicité des zéros
Limites dispersives à partir de l'unitarité/analyticité	\longleftrightarrow	Moments positifs impairs de la série μ_n^{-2}
Constructibilité on-shell	\longleftrightarrow	Expansion du produit de Hadamard
Invariance CPT	\longleftrightarrow	Réflexion des zéros à travers la droite critique

L'existence d'une telle amplitude recadre le problème de Hilbert-Pólya et suggère que le fait de chercher une théorie qui reproduise naturellement la forme de notre $\mathcal{M}(s, t)$ pourrait amener à une

¹L'expression on-shell ci-après qualifie les configurations du système satisfaisant les équations classiques du mouvement.

solution de cette conjecture, ainsi qu'à des connaissances physiques intéressantes en elles-mêmes.

Le but de la présente note sera donc de construire une telle amplitude $\mathcal{M}(s, t)$ et - sans prouver l'hypothèse de Riemann - de cartographier les relations entre ses propriétés et les caractéristiques de la fonction zeta résumées ci-dessus.

Cette note suit le plan suivant : d'abord, on construit une amplitude avec les propriétés souhaitées et on étudie sa structure analytique et son unicité.

On examine ensuite la limite en avant de notre amplitude dans le contexte des relations de diffusion analytique, à la fois comme une vérification de sa structure analytique et asymptotique et comme un moyen de déduire physiquement des identités faisant intervenir les zéros non triviaux de zeta.

Après avoir démontré que l'amplitude est constructible on-shell et après avoir relié cette construction à la forme produit de la fonction zeta, on explore les connexions entre la symétrie des zéros à travers la droite critique et la symétrie CPT et on fournit des commentaires sur des directions de travail futures.

Construction de l'amplitude. Définissons une fonction d'une variable complexe s ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(s) = & -\frac{i}{4\sqrt{s}} \left[\psi\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{s}\right) + \frac{2\zeta'\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{s}\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{s}\right)} \right] \\ & + \frac{i \log \pi}{4\sqrt{s}} - \frac{1}{s + \frac{1}{4}}, \end{aligned} \quad (3)$$

où $\zeta'(z) = d\zeta(z)/dz$ et $\psi(z)$ est la fonction digamma ; voir la figure 1. En fonction de la fonction Ξ (en majuscule) de Landau-Riemann $\Xi(z) = \xi\left(\frac{1}{2} + iz\right)$, où $\xi(z)$ est définie comme $\frac{1}{2}z(z-1)\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$, l'application de la relation fonctionnelle (2) nous permet d'écrire $\mathcal{A}(s)$ de façon très compacte :

$$\mathcal{A}(s) = -\frac{d \log \Xi(\sqrt{s})}{ds}. \quad (4)$$

On utilise alors \mathcal{A} pour définir une amplitude en décrivant la diffusion en quatre points des particules sans masse en fonction des variables de Mandelstam, $s = -(p_1 + p_2)^2$, $t = -(p_1 + p_3)^2$, et $u = -s - t$ [14]²:

$$\mathcal{M}(s, t) = \mathcal{A}(s) + \mathcal{A}(u). \quad (5)$$

Comme on le verra, différemment de ce qui se passe pour une fonction complexe arbitraire, $\mathcal{M}(s, t)$ possède toutes les propriétés standard d'une amplitude de diffusion - unitarité, analyticité et localité - et décrit l'échange arborescent des  tats lourds dans les canaux s et u , avec comme spectre $m_n = \mu_n$.

Voyons comment ces propriétés proviennent de notre définition de $\mathcal{A}(s)$.

²Dans la suite, on utilisera les variables de Mandelstam sans masse. Pour restaurer les unités, on peut envoyer $s \rightarrow s/\Lambda^2$, etc., partout avec Λ définissant l'échelle de la complétion ultraviolette. De façon similaire, l'amplitude peut être mise à l'échelle par κ^2 pour la constante réelle de couplage κ .

On peut démontrer que $\Xi(z)$ est partout analytique (i.e., entière), avec des racines correspondant aux zéros de la fonction zeta, $\Xi(\mu_n) = 0$, et que l'équation fonctionnelle (2) devient $\Xi(z) = \Xi(-z)$.

Comme résultat, même si \sqrt{s} a une coupure de branche pour les réels $s < 0$, $\Xi(\sqrt{s})$ est entière [15], et par conséquent $\mathcal{A}(s)$ à partir de Eq. (4) est méromorphe, avec des pôles simples en $s = \mu_n^2$.

Plus explicitement, en partant de Eq. (3), l'évaluation directe de cette limite pour \mathcal{A} amène $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}(s+i\epsilon) - \mathcal{A}(s-i\epsilon) = 0$ pour s réel, en utilisant la réalité de ζ et ψ sur la droite réelle.

Puisque les fonctions digamma et zeta functions sont méromorphes, on a donc que $\mathcal{A}(s)$ est également méromorphe, i.e., $\mathcal{M}(s, t)$ est analytique excepté pour les pôles.

Il reste donc à examiner le comportement de \mathcal{A} près des pôles / zéros de ψ et ζ .

Les arguments des fonctions digamma et zeta dans l'équation Eq. (3) sont choisis de telle façon que les zéros simples de $\zeta(z)$ en $z = -2n$ coïncident avec les pôles simples de $\psi(z)$ en $z = -n$, en $s = -(4n+1)^2/4$ pour les entiers positifs n , avec le résultat que les pôles s'éliminent et que $\mathcal{A}(s)$ est analytique à ces endroits-là.

Le seul autre pôle de digamma, $\psi(0)$, est en $s = -1/4$, qui est également le lieu du pôle dans le terme $1/(s + \frac{1}{4})$; une évaluation explicite montre que $\lim_{s \rightarrow -1/4} \mathcal{A}(s)$ est fini et égal à $(2 + \gamma - \log 4\pi)/2$, où γ est la constante d'Euler-Mascheroni.

Finalement, la limite $s \rightarrow 0$ est finie :

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{2} = \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{A}(s) &= -4 + \frac{\pi^2}{8} + G + \frac{\zeta''(\frac{1}{2})}{2\zeta(\frac{1}{2})} \\ &\quad - \frac{1}{8} \left(\gamma + \frac{\pi}{2} + \log 8\pi \right)^2, \end{aligned} \quad (6)$$

en écrivant G la constante de Catalan $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k / (2k+1)^2$ et en définissant $c_0 = \mathcal{M}(0, 0)$.

En utilisant la forme du produit de Hadamard pour la fonction zeta, ainsi que la différenciation de l'équation fonctionnelle (2) (qui permet le calcul des dérivées impaires de ζ en $1/2$) et en utilisant plusieurs relations de la fonction gamma, on peut trouver une identité pour $\zeta''(1/2)$ en fonction d'une somme sur les zéros non triviaux de ζ , qui amène le beau résultat :

$$c_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} \simeq 4.6210 \times 10^{-2}. \quad (7)$$

Comme on le verra, les sommes de cette forme, contenant des puissances de la série $1/\mu_n^2$, auront d'importantes connexions avec les relations de diffusion analytiques.

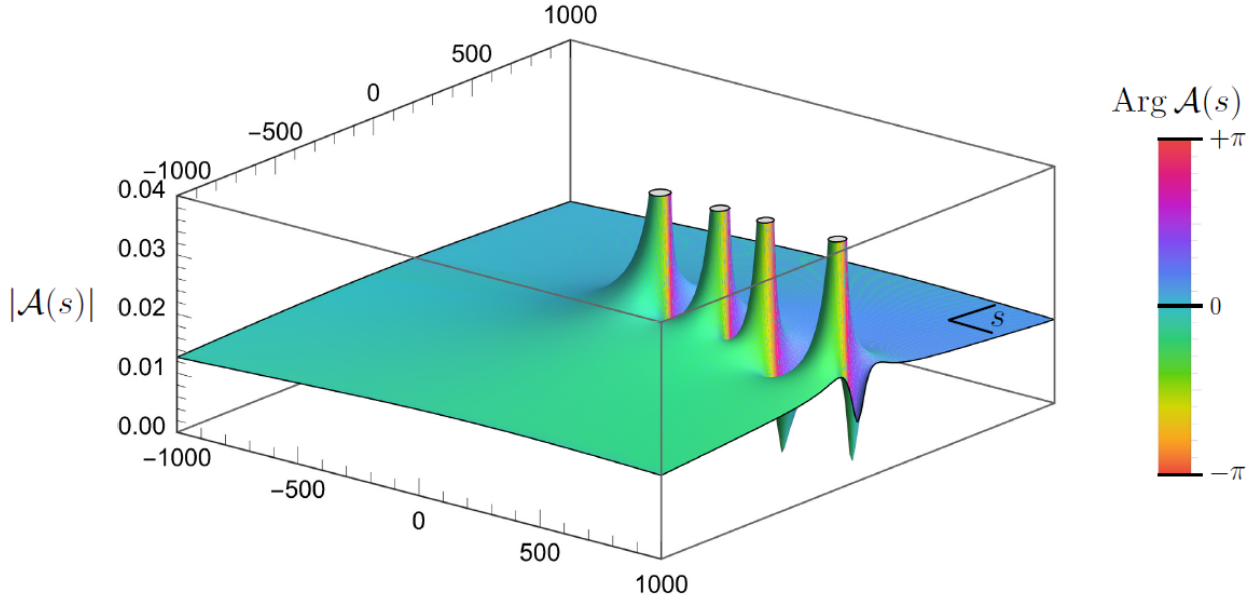


FIGURE 1 : Illustration de $\mathcal{A}(s)$ défini dans Eq. (3). Comme expliqué dans le texte, $\mathcal{A}(s)$ est méromorphe, avec des pôles en $s = \mu_n^2$ correspondant aux zéros non triviaux de la fonction zeta de Riemann, $\zeta(\frac{1}{2} \pm i\mu_n) = 0$.

Les seuls pôles candidats restant dans $\mathcal{A}(s)$ correspondent aux zéros non triviaux de la fonction zeta, $\zeta(\frac{1}{2} + i\mu_n) = 0$ en $s = \mu_n^2$.

Si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors tous ces pôles appartiennent à l'axe réel s . De plus, on trouve que chaque résidu pour s positif satisfait $\oint_{s=\mu_n^2} i\mathcal{A}(s)ds > 0$, comme requis par l'unitarité pour un pôle physique dans une amplitude, i.e. si on bouge chaque pôle en $s = \mu_n^2$ vers $s = \mu_n^2 - i\epsilon$ dans le formalisme $i\epsilon$ de Feynman, alors on a $\text{Im } \mathcal{A}(s) > 0$.

Spécifiquement, si le $n^{\text{ième}}$ zéro non trivial de ζ a pour ordre g_n , i.e. $\zeta(z) \sim (z - z_n)^{g_n}$ proche de z_n , alors $\lim_{s \rightarrow \mu_n^2} (\mu_n^2 - s)\mathcal{A}(s) = g_n$, de telle façon que

$$\oint_{s=\mu_n^2} i\mathcal{A}(s)ds = 2\pi g_n. \quad (8)$$

Notre amplitude se comporte comme une tour d'échanges arborescents, avec un spectre de masses m_n en correspondance bijective avec les zéros non triviaux de la fonction zeta de Riemann,

$$m_n = \mu_n. \quad (9)$$

Pour une théorie avec diffusion décrite par $\mathcal{M}(s, t)$, l'hypothèse de Riemann devient alors la contrainte physique des masses réelles pour les états on-shell dans le spectre.

Si tous les zéros de la fonction zeta de Riemann sont simples, comme cela a été conjecturé dans [3, 4], alors $g_n = 1$ pour tout n , auquel cas les états avec masse dans l'amplitude ont un couplage universel avec les états de diffusion ; sinon, alors, les couplages sont contrôlés par l'ordre g_n .

On peut paramétrer les $g_n \neq 1$ en autorisant des μ_n multiples redondants dans toute somme ou produit (e.g., Eq. (7)), ce que nous ferons désormais.

Notre amplitude a une propriété de localité, i.e. près de chaque pôle, $\mathcal{A}(s) \sim 1/(-s + \mu_n^2)$.

Un échec de localité dans $\mathcal{A}(s)$ via un pôle $\sim 1/(-s + \mu_n^2)^k$ pour un certain $k > 1$ nécessiterait que $\zeta(z) \sim \exp[\alpha/(z - z_n)^{k-1}]$ près du zéro correspondant z_n , pour un certain α . Ceci serait une singularité essentielle : dépendant de la direction d'approche, ζ devrait aller vers zéro ou vers l'infini lorsque $z \rightarrow z_n$.

Par conséquent, la localité dans $\mathcal{A}(s)$ est forcée par le fait que la fonction zeta est méromorphe et par conséquent manque de singularités essentielles.

Avant d'explorer d'autres propriétés intéressantes de \mathcal{M} , disons d'abord qu'elle est l'amplitude candidate la plus simple satisfaisant les contraintes souhaitées : *i)* \mathcal{M} est analytique partout excepté aux pôles correspondant aux zéros non triviaux de la fonction zeta de Riemann, et ces pôles sont réels si l'hypothèse de Riemann est vraie ; *ii)* chaque pôle a un résidu positif comme dans Eq. (8) ; et *iii)* l'amplitude avant satisfait $\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{M}(s, 0) \neq 0$ vers la limite $s \rightarrow 0$.

Prendre comme approche que \mathcal{M} est séparable en canaux $\mathcal{A}(s)$ et $\mathcal{A}(u)$ est un choix naturel qui renforce la symétrie de croisement. Pour satisfaire la condition *i)* sur les zéros non triviaux, on pourrait prendre $\mathcal{A}(s) \sim 1/\zeta(\frac{1}{2} + is)$.

Pourtant, ce choix va à l'encontre de la contrainte *ii)*, qui peut être simplement corrigée en multipliant par la dérivée de la fonction zeta, ce qui garantit que chaque pôle en un zéro non trivial a un résidu du même signe.

Éliminer les zéros triviaux dans ζ et le pôle en $z = 1$ nécessite d'ajouter une tour infinie d'autres termes, ce qui résulte en l'obtention du digamma et de termes algébriques comme dans Eq. (3).

Finalement, les radicaux dans Eq. (3) sont nécessaires, puisque si on prend l'amplitude avant et qu'on envoie $s \rightarrow s^2$ pour éliminer les racines carrées, on trouve que $\mathcal{M}(s^2, 0) - \mathcal{M}(0, 0) \propto s^4$ près de $s = 0$; ceci est trop léger pour satisfaire la condition *iii)* - qui, comme nous en discuterons dans la prochaine section vient des limites de la relation de diffusion [16] (cf. le Galileon [17] - de telle façon qu'on résoud ce problème en introduisant \sqrt{s} , ce qui résulte en $\mathcal{A}(s)$ comme donné en Eq. (3).

Par conséquent, notre forme pour $\mathcal{M}(s, t)$ est définitivement l'amplitude la plus simple possible pour l'hypothèse de Riemann, à addition ou multiplication par une fonction entière près.

Relations de dispersion analytiques. Les amplitudes avant dans une théorie des champs effective en infrarouge qui proviennent d'une complétion ultraviolette à bon comportement sont connues pour posséder des propriétés de positivité venant des relations de dispersion analytiques.

En particulier, si $\mathcal{M}(s, t)$ est en effet une amplitude, on devrait trouver que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{2k}}{ds^{2k}} \mathcal{M}(s, 0) > 0 \quad (10)$$

pour tout $k > 0$.

Ceci est la conséquence classique de l'analyticité et de l'unitarité [16].

Calculer une intégrale de contour

$$c_{2k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{ds}{s^{2k+1}} \mathcal{M}(s, 0) \quad (11)$$

pour \mathcal{C} un petit contour autour de l'origine, l'analyticité de \mathcal{M} permet à \mathcal{C} d'être déformé en un nouveau contour tournant juste au-dessus et au-dessous de l'axe réel s , plus un cercle à l'infini. On note que les définitions de c_0 concordent avec les équations Eqs. (6) et (11).

Le théorème optique (i.e., unitarité) et la symétrie de croisement impliquent que $c_{2k} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{2k}} \sigma(s) + c_\infty^{(2k)}$, où $\sigma(s)$ est la section de croisement (positive) associée à la diffusion dans l'amplitude et $c_\infty^{(2k)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s|=\infty} \frac{ds}{s^{2k+1}} \mathcal{M}(s, 0)$ est un terme limite.

Un terme limite non nul pour quelques $k \geq 0$ impliquerait que $\Xi(z)$ grandit au moins aussi vite que $\exp(\alpha z^{4k+2})$ pour un certain α (i.e. grandit d'un ordre au moins égal à $4k+2$), ce qui est inconsistant avec le fait que $\Xi(z)$ a un ordre connu de croissance de l'unité [15] ; ainsi, tous les $c_\infty^{(2k)}$ doivent s'évanouir.

Par exemple, puisqu'on a déjà montré que $\mathcal{M}(s, 0)$ est analytique partout dans le plan complexe s excepté pour les pôles en $s = \pm\mu_n^2$, en utilisant la valeur du résidu en chaque pôle dans Eq. (8), on trouve que

$$c_0 = c_\infty^{(0)} + \frac{1}{2\pi i} \sum_n \oint_{s=\mu_n^2} \frac{ds}{s} \mathcal{M}(s, 0) = c_\infty^{(0)} + \sum_n \frac{2}{\mu_n^2}, \quad (12)$$

ainsi Eq. (7) implique que $c_\infty^{(0)} = 0$.

Les coefficients dans Eq. (11) définissent une expansion $\mathcal{M}(s, 0) = \sum_{k=0}^\infty c_{2k} s^{2k}$ près de $s = 0$.

De façon analogue à Eq. (12), on a une prédiction explicite pour la valeur de c_{2k} :

$$c_{2k} = \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{\mu_n^{2(2k+1)}}. \quad (13)$$

L'hypothèse de Riemann devrait impliquer la positivité de la valeur de c_{2k} contrainte par l'unitarité et l'analyticité.

Voir la Figure 2 pour une illustration.

Ceci est une vérification non évidente de la structure analytique et asymptotique de $\mathcal{M}(s, 0)$, confirmant qu'en effet, elle se comporte comme une amplitude avant.

Notre construction d'amplitude permet d'en dériver de remarquables identités supplémentaires semblables à l'approximation de c_0 dans Eq. (7).

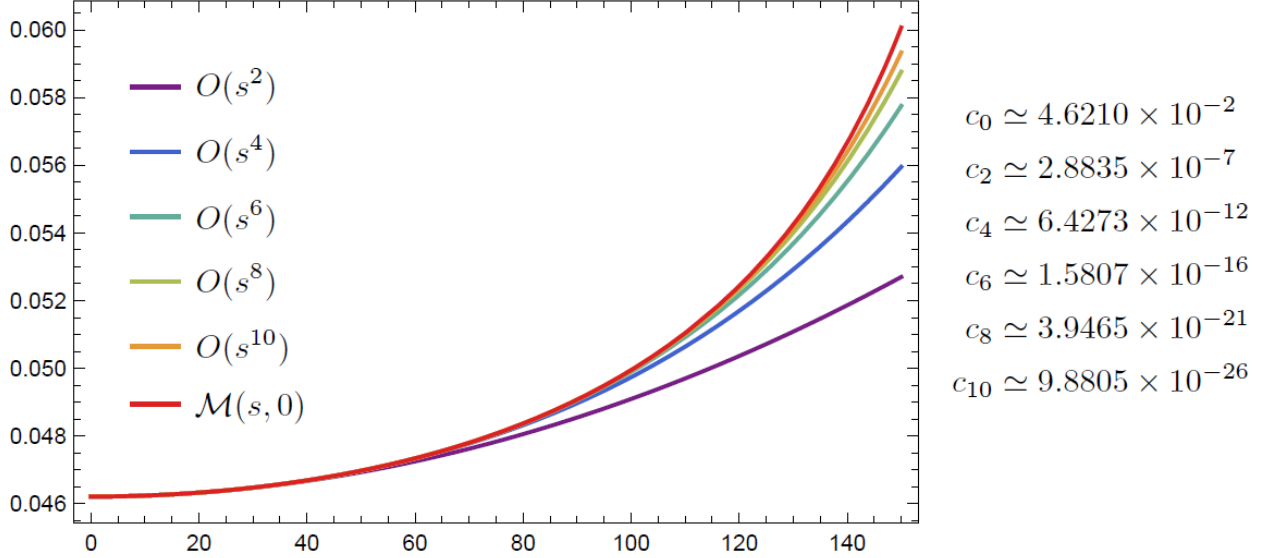


FIGURE 2 : Série de Taylor de $\mathcal{M}(\hat{s}, 0)$ près de $s = 0$. Toutes les dérivées paires de $\mathcal{M}(s, 0)$ en $s = 0$ sont positives, comme requis par l'unitarité / analyticité pour une amplitude avant ou alternativement par l'hypothèse de Riemann.

En définissant la $n^{\text{ième}}$ dérivée normalisée $\zeta_n(z) = \zeta^{(n)}(z)/\zeta(z)$ et $\zeta_n^k(z) = [\zeta_n(z)]^k$, on a

$$\begin{aligned}
c_2 &= \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{M}(s, 0) \\
&= -128 + \frac{1}{7680} \psi^{(5)}\left(\frac{1}{4}\right) - \zeta_1^6\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\quad + 3\zeta_1^4\left(\frac{1}{2}\right) \zeta_2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{9}{4} \zeta_1^2\left(\frac{1}{2}\right) \zeta_2^2\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \zeta_2^3\left(\frac{1}{2}\right) - \zeta_1^3\left(\frac{1}{2}\right) \zeta_3\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\quad + \zeta_1\left(\frac{1}{2}\right) \zeta_2\left(\frac{1}{2}\right) \zeta_3\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{12} \zeta_3^2\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \zeta_1^2\left(\frac{1}{2}\right) \zeta_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} \zeta_2\left(\frac{1}{2}\right) \zeta_4\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{20} \zeta_1\left(\frac{1}{2}\right) \zeta_5\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{120} \zeta_6\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^6}.
\end{aligned}$$

On peut prouver que l'équation ci-dessus, comme Eq. (7), fait le travail, sans modifier notre amplitude, en utilisant des différentiations répétées de l'équation fonctionnelle et la forme de produit de

Hadamard de la fonction zeta, ainsi que plusieurs identités polygamma ; la même chose est vérifiée par tous les autres c_{2k} .

Comme vérification, la prédiction dans Eq. (13) peut être confirmée à une relative précision d'un pour environ 10^{30} pour $k = 2, 3, 4, 5$ en sommant sur toutes les valeurs numériques des zéros μ_n données dans la référence [18].

Alors que chaque ordre dans Eq. (13) peut être vérifié mathématiquement, ce qui est remarquable, c'est que la construction de notre amplitude permet des dérivations physiques plus simples de ces identités.

Constructibilité on-shell. Étant données les propriétés que nous avons trouvées pour $\mathcal{A}(s)$, notre amplitude $\mathcal{M}(s, t)$ décrit des scalaires sans masse échangeant une tour d'états massifs dans les canaux s et u avec un couplage constant, indépendant du moment.

Par exemple, nous pourrions avoir deux espèces de scalaires, ϕ_1 et ϕ_2 , diffusant via $\phi_1\phi_2 \rightarrow \phi_1\phi_2$.

Alternativement, nous pourrions avoir défini à la place \mathcal{M} dans Eq. (5) avec une symétrie de Bose complète comme $\mathcal{A}(s) + \mathcal{A}(t) + \mathcal{A}(u)$ pour décrire la diffusion quatre points d'un scalaire unique.

S'il y a un couplage $\propto \phi_1\phi_2 X$, où X est une tour d'états avec masses $m_n^2 = \mu_n^2$, alors l'amplitude arborescente pour cette théorie sera en accord avec Eq. (5).

C'est à dire que notre amplitude $\mathcal{M}(s, t)$ est constructible on-shell [19] à partir des amplitudes des trois points $\phi_1\phi_2 X$, qui sont toutes une constante (et universelle pour tous les X si la conjecture de simplicité des zéros est vérifiée).

La fonction définie en Eq. (3) est équivalente à

$$\mathcal{A}(s) = \sum_n \frac{1}{-s + \mu_n^2}, \quad (14)$$

et par conséquent

$$\mathcal{M}(s, t) = \sum_n \left(\frac{1}{-s + \mu_n^2 - i\epsilon} + \frac{1}{-u + \mu_n^2 - i\epsilon} \right). \quad (15)$$

Cette égalité peut être vue comme suit. Définissons $\Delta(s)$ comme la différence entre les côtés droit et gauche des Eqs. (3) et (14).

Comme on l'a montré, puisque $\mathcal{A}(s)$ comme défini en Eq. (3) a des pôles seulement en $s = \mu_n^2$ avec un résidu unité (en écrivant toute instance des zéros multiples comme des μ_n distincts), il découle que Δ est entière.

En développant en série de Laurent autour de $s = \infty$, la forme de Eq. (14) pour des grandes valeurs de s et notre résultat précédent que Eq. (3) ne possède pas de pôle à l'infini pris ensemble impliquent que Δ est bornée, et donc par le théorème de Liouville que Δ est constant.

Par l'évaluation directe de $\mathcal{A}(0)$ dans Eq. (7), $\Delta(0) = 0$, amenant Eq. (14).

Comme résultat de la forme dans Eq. (15), \mathcal{M} satisfera automatiquement les contraintes de EFT-hedron [20], au-delà des bornes de la relation de diffusion discutée ci-dessus, dont on s'attend à ce que cela amène à des dérivations rationalisées de davantage d'identités de la fonction zeta analogues à l'équation 14.

En comparant Eq. (14) avec la forme de \mathcal{A} en fonction de Ξ dans Eq. (4), on voit que l'expression constructible on-shell pour l'amplitude donne $\Xi(z) = \Xi(0) \prod_n [1 - (z^2/\mu_n^2)]$, l'expansion du produit de Hadamard de la fonction xi.

Discussion. La fonction zeta de Riemann possède de nombreuses autres propriétés qui peuvent être mises en correspondance avec des propriétés physiques de l'amplitude de diffusion.

Par exemple, ses zéros sont symétriques à la fois par rapport à l'axe des réels et par rapport à la droite critique $\text{Re}(z)=1/2$, ceci est une conséquence du principe de réflexion de Schwarz $\zeta(\bar{z}) = \overline{\zeta(z)}$ et de Eq. (2).

Par conséquent, $\text{Im } \mathcal{M}(s, 0)$ est non nul seulement du fait des termes $i\epsilon$, qui viennent comme une somme de $\pi\delta(\pm s - \mu_n^2)$.

Cela permet que le théorème optique $\text{Im } \mathcal{M}(s, 0) = s \sigma(s)$ respecte la conservation du moment, avec σ non nul seulement quand les moments externes produisent un état massif intermédiaire on-shell.

Une conséquence de cela est que l'on peut écrire la fonction de comptage des zéros de zeta $N(T)$ - le nombre de z pour lesquels $\zeta(z) = 0$ et $0 < \text{Im}(z) \leq T$ - en fonction de la section croisée pour laquelle $N(s_0^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} \sigma(s) ds$.

Les $\mu_n = M - iW$ complexes, qui violent l'hypothèse de Riemann, devraient contribuer à une partie imaginaire supplémentaire de l'amplitude avant $\propto W$ pour $W \ll M$.

La symétrie des zéros autour de la droite critique assure que de tels termes devraient se présenter par paires avec $\pm W$, éliminant cette contribution supplémentaire à $\text{Im } \mathcal{M}(s, 0)$.

Comme une résonance, ces zéros représentent une paire de modes décroissant/croissant, et la réflexion des zéros autour de la droite critique assure que \mathcal{M} obéit au théorème CPT.

Notre construction de $\mathcal{M}(s, t)$ suggère de nombreuses généralisations intéressantes.

La construction de points plus élevés ou d'amplitudes boucles en collant ensemble des copies de \mathcal{M} mérite de plus amples recherches.

De plus, alors que le couplage indépendant du moment de façon évidente au niveau des pôles dans Eq. (14) implique que les états échangés dans \mathcal{M} sont scalaires, nous pourrions généraliser \mathcal{A} en

introduisant une dépendance des moments dans les numérateurs des propagateurs, codant ainsi le spin pour les états massifs.

Another compelling direction would be to construct the analogue of \mathcal{A} from an arbitrary Dirichlet L -function, of which ζ is a special case.

Faire cela devrait modifier le spectre, et l'hypothèse généralisée de Riemann devrait relier la réalité des masses et les zéros sur la droite critique.

Plus généralement, en remplaçant $\Xi(\sqrt{s})$ par une fonction entière possédant des zéros réels, positifs, et les conditions requises aux bornes, pourrait généraliser la construction de l'amplitude à d'autres fonctions présentant un intérêt mathématique.

Finalement, la propriété d'universalité de la fonction zeta [21] et ses conséquences pour l'amplitude nécessitent d'être étudiées.

Nous laissons de telles questions pour des recherches ultérieures.

Remerciements : Je remercie Cliff Cheung, Yu-tin Huang, Pratik Rath, Nick Rodd, et Mark Srednicki pour nos discussions et leurs commentaires.

Ce travail a été financé par l'Institut Kavli de physique théorique de la Fondation Simons (subvention n°216179) et par la NSF (subvention n° NSF PHY-1748958) *et par l'Université Santa Barbara de Californie*

Références

- [1] D. Platt, T. Trudgian, “The Riemann hypothesis is true up to $3 \cdot 10^{12}$,” *Bull. London Math. Soc.* **53**(2021)792, *arXiv* : 2004.09765[*math.NT*].
- [2] L. J. Goldstein, “A History of the Prime Number Theorem,” *Am. Math. Mon.* **80** (1973) 599.
- [3] J. Conrey, A. Ghosh, S. Gonek, “Simple Zeros of the Riemann Zeta-Function,” *Proc. London Math. Soc.* **76** (1998) 497.
- [4] H. Montgomery, “The pair correlation of zeros of the zeta function,” Analytic number theory, *Proc. Sympos. Pure Math.* **24** (1973) 181.
- [5] G. Pólya, c. 1913. Unpublished. See A. Odlyzko, *Correspondence about the origins of the Hilbert-Pólya Conjecture*, Univ. Minnesota.
- [6] M. V. Berry, J. P. Keating, “ $H = xp$ and the Riemann Zeros,” in *Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder*, I. V. Lerner, J. P. Keating, D. E. Khmelnitskii, eds., vol. 370 of *NATO ASI Series (Series B: Physics)*. Springer, Boston, 1999.
- [7] M. Srednicki, “Nonclassical Degrees of Freedom in the Riemann Hamiltonian,” *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 100201, *arXiv*:1105.2342 [math-ph].
- [8] C. M. Bender, D. C. Brody, M. P. Müller, “Hamiltonian for the zeros of the Riemann zeta function,” *Phys. Rev. Lett.* **118** (2017) 130201, *arXiv*:1608.03679 [quantph].
- [9] M. C. Gutzwiller, “Stochastic behavior in quantum scattering,” *Physica D: Nonlinear Phenomena* **7** (1983) 341.

- [10] R. K. Bhaduri, A. Khare, J. Law, “The phase of the Riemann zeta function and the inverted harmonic oscillator,” *Phys. Rev. E* **52** (1995) 486, arXiv:chaodyn/9406006.
- [11] G. Veneziano, “Construction of a crossing-symmetric, Regge-behaved amplitude for linearly rising trajectories,” *Nuovo Cim. A* **57** (1968) 190.
- [12] P. G. O. Freund, E. Witten, “Adelic string amplitudes,” *Phys. Lett. B* **199** (1987) 191.
- [13] Y.-H. He, V. Jejjala, D. Minic, “From Veneziano to Riemann: A String Theory Statement of the Riemann Hypothesis,” *Int. J. Mod. Phys. A* **31** (2016) 1650201, arXiv:1501.01975 [hep-th].
- [14] Throughout, we will use unitless Mandelstam variables. To restore units, one can send $s \rightarrow s/\Lambda^2$, etc., everywhere, with Λ defining the scale of the ultraviolet completion. Similarly, the amplitude can be rescaled by κ^2 for real coupling constant κ .
- [15] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*. Oxford, Clarendon Press, 1951.
- [16] A. Adams, N. Arkani-Hamed, S. Dubovsky, A. Nicolis, R. Rattazzi, “Causality, analyticity and an IR obstruction to UV completion,” *JHEP* **10** (2006) 014, arXiv:hep-th/0602178.
- [17] A. Nicolis, R. Rattazzi, E. Trincherini, “Energy’s and amplitudes’ positivity,” *JHEP* **05** (2010) 095, arXiv:0912.4258 [hep-th]. [Erratum: *JHEP* **11** (2011) 128].
- [18] The LMFDB Collaboration, “The L -functions and modular forms database,” 2021. Online.
- [19] T. Cohen, H. Elvang, M. Kiermaier, “On-shell constructibility of tree amplitudes in general field theories,” *JHEP* **04** (2011) 053, arXiv:1010.0257 [hep-th].
- [20] N. Arkani-Hamed, T.-C. Huang, Y.-t. Huang, “The EFT-Hedron,” *JHEP* **05** (2021) 259, arXiv:2012.15849 [hep-th].
- [21] S. M. Voronin, “Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function,” *Math. USSR Izv.* **9** (1975) 443.