

Interprétation spectrale des zéros de la fonction zêta de Riemann

Ralf Meyer

MATHEMATISCHES INSTITUT

GEORG-AUGUST UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

BUNSENSTRASSE 3-5, 37073 GÖTTINGEN, ALLEMAGNE

Résumé

En nous appuyant sur les travaux d'Alain Connes, nous avons construit une interprétation spectrale des zéros des fonctions L . Ici, nous spécialisons cette construction à la fonction ζ de Riemann. Nous construisons un opérateur sur un espace de Fréchet nucléaire dont le spectre est l'ensemble des zéros non triviaux de ζ . Nous exhibons la formule explicite pour les zéros de la fonction ζ de Riemann comme une formule de caractère.

1. Introduction

Le but de cette note est d'expliquer ce que l'interprétation spectrale des zéros des fonctions L de [4] donne dans le cas particulier simple de la fonction ζ de Riemann. L'article [4] est inspiré par les travaux d'Alain Connes dans [1]. Nous allons construire un espace de Fréchet nucléaire $\mathcal{H}_-^0$ et un opérateur D_- sur $\mathcal{H}_-^0$ dont le spectre est égal à l'ensemble des zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Par définition, les zéros non triviaux de ζ sont les zéros de la fonction ξ complète

$$\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s). \quad (1)$$

De plus, la multiplicité algébrique de s comme valeur propre de D_- est l'ordre du zéro de ξ en s . Ainsi D_- est une interprétation spectrale des zéros de ξ .

Nous construisons D_- comme le générateur d'une représentation lisse ρ_- de $\mathbb{R}_+^\times \cong \mathbb{R}$ sur $\mathcal{H}_-^0$. Bien que l'opérateur unique D_- soit plus concret, il est généralement préférable de raisonner avec la représentation ρ_- à la place. Soit $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^\times)$ l'algèbre de convolution des fonctions lisses à support compact sur $\mathbb{R}_+^\times$. La forme intégrée de ρ_- est un homomorphisme d'algèbres borné $\rho_- : \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^\times) \rightarrow \text{End}(\mathcal{H}_-^0)$. Nous montrons que ρ_- est une représentation sommable au sens de [4]. C'est-à-dire que $\rho_-(f)$ est un opérateur nucléaire pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^\times)$. Le caractère $\chi(\rho_-)$ est la distribution sur $\mathbb{R}_+^\times$ définie par $\chi(\rho_-)(f) = \text{tr } \rho_-(f)$. La représentation ρ_- fait partie d'une représentation virtuelle $\rho = \rho_+ \ominus \rho_-$, où ρ_+ est une interprétation spectrale des pôles de ξ . C'est-à-dire que ρ_+ est de dimension 2 et son générateur D_+ a pour valeurs propres 0 et 1. Nous interprétons ρ comme une différence formelle de ρ_+ et ρ_- et définissons donc $\chi(\rho) := \chi(\rho_+) - \chi(\rho_-)$.

Le spectre de ρ consiste exactement en les pôles et les zéros de ξ , et la multiplicité spectrale (avec les signes appropriés) de $s \in \mathbb{C}$ est l'ordre de ξ en s , qui est positif aux deux pôles 0 et 1 et négatif aux zéros de ξ . Le calcul spectral du caractère donne

$$\chi(\rho)(f) = \sum_{s \in \mathbb{C}} \text{ord}_{\xi}(s) \hat{f}(s), \quad \text{où} \quad \hat{f}(s) := \int_0^{\infty} f(x) x^s \frac{dx}{x}.$$

Si un opérateur a un noyau intégral suffisamment gentil, alors nous pouvons aussi calculer sa trace en intégrant son noyau le long de la diagonale. Cette recette s'applique à $\rho_-(f)$ et donne une autre formule pour $\chi(\rho_-)$. À savoir,

$$\chi(\rho) = W = \sum_{p \in \mathcal{P}} W_p + W_{\infty},$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers,

$$\begin{aligned} W_p(f) &= \sum_{e=1}^{\infty} f(p^{-e}) p^{-e} \ln(p) + \sum_{e=1}^{\infty} f(p^e) \ln(p), \\ W_{\infty}(f) &= \text{pv} \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{|1-x|} + \frac{f(x)}{1+x} dx. \end{aligned} \tag{2}$$

La distribution W_{∞} fait intervenir une valeur principale parce que l'intégrande peut avoir un pôle en 1. En égalant les deux formules pour $\chi(\rho)$, nous obtenons la formule explicite bien connue qui relie les zéros de ξ et les nombres premiers.

Nous n'avons pas besoin des fonctions ζ et ξ pour définir notre interprétation spectrale. Nous utilisons à la place un opérateur Z , appelé opérateur Zêta, qui est étroitement lié à la fonction ζ . Cet opérateur est l'ingrédient clé de notre construction. De plus, nous devons choisir le domaine et l'espace d'arrivée de Z avec soin. Il est possible de démontrer le théorème des nombres premiers en utilisant la représentation ρ au lieu de la fonction ζ . La seule entrée dont nous avons besoin est que la distribution W soit quantifiée, c'est-à-dire de la forme $\sum n(s) \hat{f}(s)$ avec une fonction $n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{Z}$ (voir [4]).

Nos constructions pour la fonction ζ se généralisent aux fonctions L de Dirichlet. Nous indiquons comment cela se fait dans la dernière section. Nous rencontrons cependant des problèmes pour les corps de nombres ayant plus d'une place infinie. Il y a aussi d'autres raisons conceptuelles et esthétiques de préférer les constructions adéliques comme dans [4]. Notre but ici est seulement de rendre ces constructions plus explicites dans un cas particulier simple.

2. Les ingrédients : quelques espaces de fonctions et opérateurs

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz de $\mathbb{R}$. Ainsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses dérivées $f^{(n)}$ sont à décroissance rapide au sens où $f^{(n)}(x) = O(|x|^{-s})$ pour $|x| \rightarrow \infty$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Nous munissons $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de sa topologie usuelle. La convolution fait de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ une algèbre de Fréchet.

Nous remarquons que nous ne gagnons ni ne perdons rien si nous considérons $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ comme un espace vectoriel bornologique comme dans [4]. Tous les espaces de fonctions dont nous aurons besoin sont des espaces de Fréchet, de sorte que l'analyse bornologique et topologique sont équivalentes. Le point de vue bornologique ne devient supérieur que si nous mélangeons $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec des espaces comme $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ qui ne sont pas de Fréchet.

Nous utilisons le logarithme naturel $\ln$ pour identifier le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^\times$ avec $\mathbb{R}$. Ceci induit un isomorphisme entre les algèbres de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. La mesure de Lebesgue standard sur $\mathbb{R}$ correspond à la mesure de Haar $d^\times x = x^{-1}dx$ sur $\mathbb{R}_+^\times$. Nous utilisons toujours cette mesure dans ce qui suit.

Nous posons

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_s = \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times) \cdot x^{-s} = \{f : \mathbb{R}_+^\times \rightarrow \mathbb{C} \mid (x \mapsto f(x)x^s) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)\}$$

pour $s \in \mathbb{R}$ et

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I = \bigcap_{s \in I} \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_s$$

pour un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. Nous utiliserons fréquemment que

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_{[a,b]} = \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_a \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_b.$$

La raison en est que $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)$ est stable par multiplication par $(x^\epsilon + x^{-\delta})^{-1}$ pour $\epsilon, \delta \geq 0$.

Ainsi $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_{[a,b]}$ devient un espace de Fréchet de façon canonique. En épuisant I par une suite croissante d'intervalles compacts, nous pouvons faire de $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ un espace de Fréchet pour I général. Comme $x \mapsto x^s$ est un caractère de $\mathbb{R}_+^\times$, les espaces $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_s$ pour $s \in \mathbb{R}$ sont stables par convolution. Par conséquent $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ est aussi stable par convolution et devient une algèbre de Fréchet. Nous nous intéressons particulièrement à

$$\mathcal{H}_- = \mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times) := \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_{[-\infty, \infty[},$$

$$\mathcal{S}_> := \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_{[1, \infty[},$$

$$\mathcal{S}_< := \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_{[-\infty, 0[}.$$

Nous posons aussi

$$\mathcal{H}_+ := \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}.$$

Les espaces $\mathcal{H}_\pm$ seront cruciaux pour notre interprétation spectrale ; les espaces $\mathcal{S}_>$ et $\mathcal{S}_<$ ne jouent qu'un rôle auxiliaire comme espaces suffisamment grands dans lesquels les autres peuvent être plongés.

Étant donné des espaces vectoriels topologiques A et B , nous écrivons $A \prec B$ pour signifier que A est contenu dans B et que l'inclusion est une application linéaire continue. Clairement,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I \prec \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_J \quad \text{si } I \supseteq J.$$

Le groupe $\mathbb{R}_+^\times$ agit sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ et $\mathcal{H}_+$ par la représentation régulière

$$\lambda_t f(x) := f(t^{-1}x) \quad \text{pour } t, x \in \mathbb{R}_+^\times.$$

Sa forme intégrée est donnée par la même formule que la convolution :

$$\beta(\lambda h)f(x) := \int_0^\infty h(t)f(t^{-1}x)d^\times t.$$

Nous notons $\widehat{\otimes}$ le produit tensoriel topologique complet projectif (voir [2]). Si V et W sont des espaces de Fréchet, $V\widehat{\otimes}W$ l'est aussi. Nous voulons connaître $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I\widehat{\otimes}\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_J$ pour deux intervalles I, J . Comme les deux facteurs tensoriels sont des espaces de Fréchet nucléaires, c'est assez facile à calculer. Nous trouvons

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I\widehat{\otimes}\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_J \\ & \cong \{f : (\mathbb{R}_+^\times)^2 \rightarrow \mathbb{C} \mid f(x, y) \cdot x^s y^t \in \mathcal{S}((\mathbb{R}_+^\times)^2) \text{ pour tout } s \in I, t \in J\} \end{aligned} \quad (4)$$

avec la topologie canonique. Ceci découle facilement de $\mathcal{S}(\mathbb{R})\widehat{\otimes}\mathcal{S}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et de la compatibilité de $\widehat{\otimes}$ avec les limites inverses.

Nous aurons besoin de la transformée de Fourier

$$\mathfrak{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \mathfrak{F}f(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(2\pi i xy) dx. \quad (5)$$

Remarquons que $\mathfrak{F}f$ est paire si f l'est. Par conséquent $\mathfrak{F}$ se restreint en un opérateur sur $\mathcal{H}_+ \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dans ce qui suit, nous restreignons généralement $\mathfrak{F}$ à ce sous-espace. Il est bien connu que $\mathfrak{F}^{-1}f(y) = \mathfrak{F}f(-y)$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $y \in \mathbb{R}$. Par conséquent

$$\mathfrak{F}^2 = \text{id} \quad \text{comme opérateurs sur } \mathcal{H}_+. \quad (6)$$

Comme $\mathfrak{F}$ est unitaire sur $L^2(\mathbb{R}, dx)$, elle est aussi unitaire sur le sous-espace des fonctions paires, qui est isomorphe à $L^2(\mathbb{R}_+^\times, x d^\times x)$.

Nous avons aussi besoin de l'involution

$$J : \mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times), \quad Jf(x) := x^{-1}f(x^{-1}). \quad (7)$$

Nous avons $J^2 = \text{id}$. On vérifie facilement que J s'étend en un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}_+^\times, x d^\times x)$ et en un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques

$$J : \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I \xrightarrow{\cong} \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_{1-I} \quad (8)$$

pour tout intervalle I . En particulier, J est un isomorphisme entre $\mathcal{S}_<$ et $\mathcal{S}_>$.

$$\int \lambda(h) \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{F} \circ \int \lambda(Jh), \quad \int \lambda(h) \circ J = J \circ \int \lambda(Jh) \quad (9)$$

pour tout $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^\times)$. Par conséquent les composés $\mathfrak{F}J$ et $J\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}J)^{-1}$, qui sont des opérateurs unitaires sur $L^2(\mathbb{R}_+^\times, x d^\times x)$, commutent avec la représentation régulière λ .

Un multiplicateur de $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ est un opérateur linéaire continu sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ qui commute avec la représentation régulière.

Proposition 2.1. *En considérant $\mathcal{H}_+ \subseteq L^2(\mathbb{R}_+^\times, x d^\times x)$, nous avons*

$$\mathcal{H}_+ = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+^\times, x d^\times x) \mid f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_{[0, \infty[} \text{ et } J\mathfrak{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_{[-\infty, 1[}\}. \quad (10)$$

L'opérateur $\mathfrak{F}J$ est un multiplicateur de $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ pour $I \subseteq]0, \infty[$.

L'opérateur $J\mathfrak{F}$ est un multiplicateur de $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ pour $I \subseteq]-\infty, 1[$.

Par conséquent $\mathfrak{F}J$ et $J\mathfrak{F}$ sont des multiplicateurs inversibles de $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ pour $I \subseteq]0, 1[$.

Démonstration. Nous devons d'abord décrire $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ plus explicitement. Pour simplifier, nous supposons l'intervalle I ouvert. Soit $Df(x) := x \cdot f'(x)$. Cet opérateur différentiel est le générateur de la représentation λ de $\mathbb{R}_+^\times \cong \mathbb{R}$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+^\times, x d^\times x)$. Alors $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ si et seulement si $D^m(f \cdot x^s) \cdot (\ln x)^k \in L^2(\mathbb{R}_+^\times, d^\times x)$ pour tout $m, k \in \mathbb{N}$, $s \in I$. En utilisant la règle de Leibniz, on montre que ceci est équivalent à $D^m(f) \cdot x^s \cdot (\ln x)^k \in L^2(\mathbb{R}_+^\times, d^\times x)$ pour tout $m, k \in \mathbb{N}$, $s \in I$. Comme I est ouvert, nous pouvons remplacer x^s par $x^{s+\epsilon} + x^{s-\epsilon}$ pour un certain $\epsilon > 0$. Ceci domine $x^s (\ln x)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, de sorte qu'il suffit d'exiger $(D^m f) \cdot x^s \in L^2(\mathbb{R}_+^\times, d^\times x)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, $s \in I$.

Cette description de $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ implique facilement $\mathcal{H}_+ \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_{[0, \infty[}$. Comme $\mathfrak{F}$ envoie $\mathcal{H}_+$ sur lui-même et J envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_{[0, \infty[}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_{[-\infty, 1[}$, nous obtenons « $\subseteq$ » dans (10). Réciproquement, $f \in \mathcal{H}_+$ si et seulement si f et $\mathfrak{F}f$ sont tous deux $O(x^{-s})$ pour $|x| \rightarrow \infty$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. Ceci donne « $\supseteq$ » dans (10) et achève la preuve de (10).

Dans le calcul suivant, nous décrivons $\mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ comme en (4). Choisissons un $\psi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times)$ quelconque avec $\int_0^\infty \psi(x) d^\times x = 1$. Alors $\sigma f(x, y) := \psi(x) f(xy)$ définit une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ vers $\mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ par (4). C'est une section pour l'application de convolution

$$\rho : \mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I, \quad (\rho f)(x) = \int_0^\infty f(t, t^{-1}x) d^\times t. \quad (10')$$

Soit $I \subseteq]0, \infty[$. Alors $\mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times) = J\mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times) \subset \mathcal{H}_+ = \mathfrak{F}\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$. Donc nous obtenons un opérateur linéaire continu

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times) \hat{\otimes} \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I \xrightarrow{\mathfrak{F}J \otimes \mathfrak{F}} \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I \hat{\otimes} \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I \xrightarrow{\rho} \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I.$$

La dernière application existe parce que $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ est une algèbre de convolution. Si nous introduisons $f_0 * f_1$ avec $f_0, f_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times)$ dans cet opérateur, nous obtenons $\mathfrak{F}J(f_0 * f_1)$ parce que σ est une section pour $\rho\lambda$ et à cause de (9). Comme les produits $f_0 * f_1$ sont denses dans $\mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times)$, l'opérateur ci-dessus sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ étend $\mathfrak{F}J$ sur $\mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times)$.

Maintenant (8) implique la continuité de $J\mathfrak{F} = J(\mathfrak{F}J)J$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ pour $I \subseteq]-\infty, 1[$. Par conséquent $J\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}J$ sont tous deux des multiplicateurs de $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ pour $I \subseteq]0, 1[$. Ils sont inverses l'un de l'autre sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ parce qu'ils sont inverses l'un de l'autre sur $L^2(\mathbb{R}_+^\times, x d^\times x)$. $\square$

3. L'opérateur Zêta et la formule sommatoire de Poisson

Dans cette section, nous étudions les propriétés de l'opérateur suivant :

Définition 3.1. L'opérateur Zêta est défini par

$$Zf(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} f(x) \quad \text{pour } f \in \mathcal{H}_+, x \in \mathbb{R}_+^\times.$$

Soit $\tilde{\zeta}$ la distribution $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{-1} : \psi \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n^{-1})$. Alors

$$\tilde{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s), \quad Zf = \beta(\tilde{\zeta})(f).$$

Ainsi les données Z , ζ et $\tilde{\zeta}$ sont équivalentes.

Le développement en produit d'Euler de la fonction ζ prend la forme suivante dans cette image. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers dans $\mathbb{N}^*$. Nous avons

$$Z = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{p^{-n}} = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \lambda_p^{-1})^{-1}.$$

Par conséquent nous obtenons un candidat pour un inverse de Z :

$$Z^{-1}f(x) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \lambda_p^{-1}) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) f(nx).$$

Ici $\mu(n)$ est la fonction de Möbius usuelle; elle s'annule sauf si n est sans facteur carré, et vaut $(-1)^j$ si n est un produit de j nombres premiers distincts.

L'assertion suivante est équivalente à la convergence absolue dans la région $\operatorname{Re} s > 1$ du produit d'Euler définissant $\zeta(s)$.

Proposition 3.2. Z et Z^{-1} sont des opérateurs linéaires continus sur $S_{>}$ qui sont inverses l'un de l'autre.

Démonstration. Soit $Df(x) = xf'(x)$. Nous avons observé ci-dessus que $f \in S_{>}$ si et seulement si $D^m f \in L^2(\mathbb{R}_+^\times, x^{2s} d^\times x)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, $s > 1$. Nous vérifions que Z et Z^{-1} préservent cette estimation. L'opérateur λ_t pour $t \in \mathbb{R}_+^\times$ a pour norme $\|\lambda_t\|^s = t^s$ sur $L^2(\mathbb{R}_+^\times, x^{2s} d^\times x)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Par conséquent les mêmes estimations qui donnent la convergence absolue du produit d'Euler pour $\zeta(s)$ montrent aussi que les produits $\prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \lambda_p^{-1})^{\pm 1}$ convergent absolument par rapport à la norme d'opérateur sur $L^2(\mathbb{R}_+^\times, x^{2s} d^\times x)$ pour $s > 1$. Comme tous les facteurs commutent avec D , ceci reste vrai si nous remplaçons $L^2(\mathbb{R}_+^\times, x^{2s} d^\times x)$ par l'espace de Sobolev défini par la norme

$$\|f\|_n^{2s} := \int_0^\infty |D^m f(x)|^2 x^{2s} d^\times x.$$

Ainsi Z et Z^{-1} sont des opérateurs linéaires continus sur ces espaces de Sobolev pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $s > 1$. Ceci donne l'assertion. $\square$

Ensuite nous rappelons la formule sommatoire de Poisson. Elle affirme que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(xn) = x^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}f(x^{-1}n)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\times$ et tout $f \in S(\mathbb{R})$. Pour $f \in \mathcal{H}_+$, ceci devient

$$\frac{f(0)}{2} + Zf(x) = JZ\mathfrak{F}f(x) + \frac{\mathfrak{F}f(0)}{2x}. \quad (11)$$

Soit

$$\mathcal{H}_\cap := \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mid f \text{ paire}, f(0) = \mathfrak{F}f(0) = 0\}.$$

C'est un sous-espace fermé de $S(\mathbb{R})$, λ -invariant. Si $f \in \mathcal{H}_\cap$, alors (11) se simplifie en $Zf = JZ\mathfrak{F}f$.

Soit $h_0 : \mathbb{R}_+^\times \rightarrow [0, 1]$ une fonction lisse avec $h_0(t) = 1$ pour $t \ll 1$ et $h_0(t) = 0$ pour $t \gg 1$. Soit $\mathcal{H}_\cup$ l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}_+^\times$ engendré par $\mathcal{H}_- = \mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times)$ et les deux fonctions supplémentaires h_0 et $x^{-1} \cdot h_0$. La représentation régulière s'étend à $\mathcal{H}_\cup$. En notant $\mathbb{C}(x^s)$ pour $\mathbb{C}$ muni de la représentation par le caractère x^s , nous obtenons une extension des représentations

$$\mathcal{H}_- \longrightarrow \mathcal{H}_\cup \rightarrow \mathbb{C}(x^0) \oplus \mathbb{C}(x^1). \quad (12)$$

Théorème 3.3. *L'opérateur Zêta est une application linéaire continue $Z : \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_\cup$. De plus, cette application a une image fermée et est un isomorphisme topologique sur son image. Nous avons $Zf \in \mathcal{H}_-$ si et seulement si $f \in \mathcal{H}_\cap$.*

Démonstration. La proposition 2.1 donne $\mathcal{H}_+ \prec \mathcal{S}_>$. Par la proposition 3.2, Z est continu sur $\mathcal{S}_>$. Donc nous obtenons la continuité de $Z : \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{S}_>$. De même, $JZ\mathfrak{F}$ est un opérateur linéaire continu $\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{S}_<$. Par (11), Z se restreint en une application linéaire continue

$$\mathcal{H}_\cap \rightarrow \mathcal{S}_> \cap \mathcal{S}_< = \mathcal{H}_-.$$

L'équation (11) implique aussi que Zf appartient encore à $\mathcal{H}_\cup$ pour $f \in \mathcal{H}_+$ arbitraire et que $Zf \in \mathcal{H}_-$ si et seulement si $f \in \mathcal{H}_\cap$.

Il reste à prouver que Z est un isomorphisme topologique sur son image. Ceci implique que l'image est fermée parce que tous les espaces impliqués sont complets. Il suffit de prouver que la restriction $Z : \mathcal{H}_\cap \rightarrow \mathcal{H}_-$ est un isomorphisme sur son image. De façon équivalente, une suite (f_n) dans $\mathcal{H}_\cap$ converge si et seulement si (Zf_n) converge dans $\mathcal{H}_-$. Une implication est contenue dans la continuité de Z . Supposons que la suite (Zf_n) converge dans $\mathcal{H}_-$. Donc elle converge dans $\mathcal{S}_>$ et $\mathcal{S}_<$. L'équation (11) donne $Zf_n = JZ\mathfrak{F}f_n$. En utilisant (8), nous obtenons que (Zf_n) et $(Z\mathfrak{F}f_n)$ convergent dans $\mathcal{S}_>$. La proposition 3.2 donne que (f_n) et $(\mathfrak{F}f_n)$ convergent dans $\mathcal{S}_>$.

Par conséquent, $(D^m f_n \cdot x^s)$ et $(D^m \mathfrak{F}f_n \cdot x^s)$ convergent dans $L^2(\mathbb{R}, dx)$ pour tout $s > 1/2$, où $Df(x) = xf'(x)$. Donc $x^k(d/dx)^l f_n$ et $(d/dx)^k(x^l f_n)$ convergent si $k, l \in \mathbb{N}$ satisfont $k > l + 1$. La première condition implique la convergence dans $S(\mathbb{R} \setminus [-1, 1])$ parce que $x \geq 1$ dans cette région. La seconde condition contient la convergence de $(d/dx)^k f_n$ dans $L^2([-1, 1], dx)$. Donc les deux conditions ensemble impliquent la convergence dans $S(\mathbb{R})$ comme voulu. $\square$

Nous discutons maintenant la relation étroite entre le théorème ci-dessus et le prolongement méromorphe de la fonction ζ et l'équation fonctionnelle (voir aussi [5]). Rappelons que $\hat{f}(s) := \int_0^\infty f(x)x^s dx$. Ceci définit une fonction entière pour $f \in \mathcal{H}_-$. Nous avons décrit Z comme la convolution avec la distribution ζ sur $\mathbb{R}_+^\times$, qui satisfait $\zeta\zeta(s) = \zeta(s)$. Par conséquent,

$$(Zf)\zeta(s) = \zeta(s) \cdot \hat{f}(s) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}_>, s \in \mathbb{C} \text{ avec } \operatorname{Re} s > 1. \quad (13)$$

La formule sommatoire de Poisson implique $Zf \in \mathcal{H}_-$ pour $f \in \mathcal{H}_\cap$, de sorte que $\zeta(s)\hat{f}(s)$ s'étend en une fonction entière. En particulier, ceci vaut si $f \in \mathcal{H}_-$ satisfait $\hat{f}(1) = 0$. Pour un tel f , la fonction $\hat{f}(s)$ est aussi une fonction entière sur $\mathbb{C}$. Par conséquent, ζ a un prolongement méromorphe à tout $\mathbb{C}$. Pour tout $s \neq 1$, il existe $f \in \mathcal{H}_-$ avec $\hat{f}(1) = 0$ et $\hat{f}(s) \neq 0$. Par conséquent, le seul pôle possible de ζ est en 1.

Il est facile de voir que $(Jf)\hat{\zeta}(s) = \hat{f}(1-s)$. Donc (11) implique

$$\zeta(1-s) \cdot (J\mathfrak{F}f)\hat{\zeta}(s) = \zeta(s) \cdot \hat{f}(s) \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{H}_\cap. \quad (14)$$

Cette équation reste vraie pour $f \in \mathcal{H}_+$ par $\mathbb{R}_+^\times$ -équivariance.

Maintenant nous introduisons la fonction spéciale $f(x) = 2\exp(-\pi x^2)$, qui satisfait $\mathfrak{F}f = f$ et $\hat{f}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$. Ainsi $\zeta(s)\hat{f}(s) = \zeta(s)$ est la fonction ζ complète. L'équation (14) devient l'équation fonctionnelle $\zeta(1-s) = \zeta(s)$.

4. L'interprétation spectrale

Soit $Z\mathcal{H}_+ \subseteq \mathcal{H}_\cup$ l'image de Z . C'est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}_\cup$ et topologiquement isomorphe à $\mathcal{H}_+$ par le théorème 3.3. De plus,

$$Z\mathcal{H}_\cap = Z\mathcal{H}_+ \cap \mathcal{H}_-, \quad \mathcal{H}_\cup = Z\mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_-.$$

$$\mathcal{H}_+^0 := \mathcal{H}_+/\mathcal{H}_\cap \cong \mathcal{H}_\cup/\mathcal{H}_-,$$

$$\mathcal{H}_-^0 := \mathcal{H}_-/Z\mathcal{H}_\cap \cong \mathcal{H}_\cup/Z\mathcal{H}_+.$$

Nous munissons $\mathcal{H}_\pm^0$ de la topologie quotient à partir de $\mathcal{H}_\pm$ ou de $\mathcal{H}_\cup$ (les deux topologies sur $\mathcal{H}_\pm^0$ coïncident) et des représentations $\rho_\pm$ de $\mathbb{R}_+^\times$ induites par λ sur $\mathcal{H}_\pm$ ou $\mathcal{H}_\cup$. Nous considérons le couple de représentations (ρ_+, ρ_-) comme une différence formelle $\rho_+ \ominus \rho_-$, c'est-à-dire comme une représentation virtuelle de $\mathbb{R}_+^\times$.

Une représentation lisse de $\mathbb{R}_+^\times \cong \mathbb{R}$ est déterminée de façon unique par l'action du générateur de l'algèbre de Lie de $\mathbb{R}_+^\times$. Ce générateur correspond au champ de vecteurs invariant par changement d'échelle $Df(x) = xf'(x)$ sur $\mathcal{H}_\cup$. Soit $D_\pm$ les opérateurs sur $\mathcal{H}_\pm^0$ induits par D sur $\mathcal{H}_\cup$. Nous affirmons que les opérateurs $D_\pm$ sont des interprétations spectrales des pôles et des zéros de la fonction ζ complète ξ définie en (1). Ceci est assez trivial pour D_+ . Comme

$$\mathcal{H}_+^0 \cong \mathbb{C}(x^0) \oplus \mathbb{C}(x^1),$$

l'opérateur D_+ est équivalent à la matrice diagonale 2×2 de valeurs propres 0, 1. Donc c'est une interprétation spectrale des deux pôles de ξ . Pour traiter $\mathcal{H}_-^0$, nous identifions les transformées de Fourier-Laplace de $\mathcal{H}_-$ et $Z\mathcal{H}_\cap$. Rappelons que $\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^s dx$.

Théorème 4.1. *L'application $f \mapsto \hat{f}$ identifie $\mathcal{H}_-$ avec l'espace des fonctions entières $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pour lesquelles $t \mapsto h(s+it)$ est une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}$ pour chaque $s \in \mathbb{R}$.*

Le sous-espace $Z\mathcal{H}_\cap$ est envoyé sur l'espace des fonctions entières h pour lesquelles

$$t \mapsto \frac{h(s+it)}{\zeta(s+it)} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{h(s+it)}{\zeta(1-s-it)}$$

sont des fonctions de Schwartz pour $s \geq 1/2$ et $s \leq 1/2$, respectivement. (En particulier, cela signifie que $h(z)/\zeta(z)$ n'a pas de pôles avec $\operatorname{Re} z \geq 1/2$ et $h(z)/\zeta(1-z)$ n'a pas de pôles avec $\operatorname{Re} z \leq 1/2$.)

Démonstration. Il est bien connu que la transformée de Fourier est un isomorphisme (d'espaces vectoriels topologiques) $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times) \cong \mathcal{S}(i\mathbb{R})$. Par conséquent $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times) \cong \mathcal{S}(s+i\mathbb{R})$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Il est clair que $\hat{f}$ est une fonction entière sur $\mathbb{C}$ pour $f \in \mathcal{H}_-$. Comme $\mathcal{H}_- = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_s$, nous obtenons aussi $\hat{f} \in \mathcal{S}(s+i\mathbb{R})$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Réciproquement, si h est entière et $h \in \mathcal{S}(s+i\mathbb{R})$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, alors pour chaque $s \in \mathbb{R}$ il existe $f_s \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_s$ avec $h(s+it) = \hat{f}_s(s+it)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En utilisant l'équation différentielle de Cauchy-Riemann pour la fonction analytique $h(s+it)$, nous concluons que f_s est indépendant de s . Donc nous obtenons une fonction f dans $\mathcal{H}_-$ avec $\hat{f} = h$ sur tout $\mathbb{C}$. Ceci donne la description voulue de $\widehat{\mathcal{H}}_-$.

Le même argument montre que $\widehat{\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I}$ pour un intervalle ouvert I est l'espace de toutes les fonctions holomorphes $h : I + i\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ avec $h \in \mathcal{S}(s+i\mathbb{R})$ pour tout $s \in I$.

La proposition 2.1 affirme que $f \in \mathcal{H}_+$ si et seulement si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_{[0,\infty[}$ et $J\mathfrak{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_{]-\infty,1]}$. Comme $J\mathfrak{F}$ est inversible sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_s$ pour $0 < s < 1$, ceci est équivalent à $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_s$ pour $s \geq 1/2$ et $J\mathfrak{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_s$ pour $s \leq 1/2$. De plus, ces deux conditions sont équivalentes pour $s = 1/2$. Nous obtenons $f \in Z\mathcal{H}_+$ si et seulement si $Z^{-1}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_s$ pour $s \geq 1/2$ et $J\mathfrak{F}Z^{-1}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_s$ pour $s \leq 1/2$.

Soit maintenant $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière avec $h \in \mathcal{S}(s+i\mathbb{R})$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Ainsi $h = \hat{f}$ pour un certain $f \in \mathcal{H}_-$. L'équation (13) implique $f \in Z\mathcal{H}_\cap$ si et seulement si $h/\zeta \in \mathcal{S}(s+i\mathbb{R})$ pour $s \geq 1/2$ et $(\widehat{J\mathfrak{F}f})/\zeta \in \mathcal{S}(s+i\mathbb{R})$ pour $s \leq 1/2$. L'équation fonctionnelle (14) donne $(\widehat{J\mathfrak{F}f})(z)/\zeta(z) = h(z)/\zeta(1-z)$. $\square$

Soit $(\mathcal{H}_-^0)'$ l'espace des fonctionnelles linéaires continues $\mathcal{H}_-^0 \rightarrow \mathbb{C}$ et soit ${}^tD_- \in \operatorname{End}((\mathcal{H}_-^0)')$ la transposée de D_- .

Corollaire 4.2. Les valeurs propres de la transposée ${}^tD_- \in \operatorname{End}((\mathcal{H}_-^0)')$ sont exactement les zéros de la fonction ζ de Riemann complète ξ . La multiplicité algébrique de λ comme valeur propre de ${}^tD_-$ est l'ordre du zéro de ξ en λ . Ici nous définissons la multiplicité algébrique comme la dimension de $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker({}^tD_- - \lambda)^k$.

Démonstration. Nous pouvons identifier $(\mathcal{H}_-^0)'$ avec l'espace des fonctionnelles linéaires continues sur $\mathcal{H}_-$ qui annihilent $Z\mathcal{H}_\cap$. Soit $l : \mathcal{H}_- \rightarrow \mathbb{C}$ une telle fonctionnelle linéaire. Dans l'image transformée de Fourier-Laplace, nous avons $D_-h(s) = s \cdot h(s)$ pour tout $s \in \mathbb{C}$. Donc l est un vecteur propre pour la transposée ${}^tD_-$ si et seulement s'il est de la forme $h \mapsto h(s)$ pour un certain $s \in \mathbb{C}$. De même, $({}^tD_- - s)^k(l) = 0$ si et seulement si $l(h) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j h^{(j)}(s)$ pour certains $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$. Il découle de l'équation fonctionnelle $\xi(s) = \xi(1-s)$ que les ordres des zéros de ξ en s et $1-s$ coïncident pour tout $s \in \mathbb{C}$. De plus, ξ et ζ ont les mêmes zéros et les mêmes ordres de zéros pour

Re $s > 0$. Par conséquent l'assertion découle du théorème 4.1. □

5. Un calcul géométrique du caractère

*Tangermann : Considérer le cas $f = f_0 * Jf_0$!*

Notre prochain but est de prouver que la représentation ρ est sommable et de calculer son caractère géométriquement.

Définition 5.1 ([4]). Soit G un groupe de Lie et soit $\mathcal{D}(G)$ l'espace des fonctions lisses à support compact sur G . Une représentation lisse ρ de G sur un espace de Fréchet est dite *sommable* si $\rho(f)$ est nucléaire pour tout $f \in \mathcal{D}(G)$ et si ces opérateurs sont uniformément nucléaires pour f dans un sous-ensemble borné de $\mathcal{D}(G)$.

La théorie des opérateurs nucléaires due à Alexandre Grothendieck [2] est assez profonde. Les opérateurs nucléaires sont des analogues des opérateurs de classe trace sur les espaces de Hilbert. Il découle facilement de la définition que $f \circ g$ est nucléaire si au moins un des opérateurs f et g est nucléaire. C'est-à-dire que les opérateurs nucléaires forment un idéal d'opérateurs. Pour les besoins de cet article, nous n'avons pas à rappeler la définition de la nucléarité en raison du critère simple suivant :

Théorème 5.2. *Un opérateur entre espaces de Fréchet nucléaires est nucléaire si et seulement s'il peut être factorisé à travers un espace de Banach.*

Les espaces $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ et $\mathcal{H}_+$ sont nucléaires parce que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est nucléaire et que la nucléarité est héréditaire pour les sous-espaces et les limites inverses. Par conséquent le théorème 5.2 s'applique à tous les opérateurs entre ces espaces.

Le caractère d'une représentation sommable ρ est la distribution sur G définie par $\chi_\rho(f) := \text{tr } \rho(f)$ pour tout $f \in \mathcal{D}(G)$. La nucléarité uniforme de $\rho(f)$ pour f dans des sous-ensembles bornés de $\mathcal{D}(G)$ assure que χ_ρ est une fonctionnelle linéaire bornée sur $\mathcal{D}(G)$. Ceci est équivalent à la continuité parce que $\mathcal{D}(G)$ est un espace LF. Si ρ est une représentation virtuelle comme dans notre cas, nous posons $\text{tr } \rho(f)$ comme la supertrace $\text{tr } \rho_+(f) - \text{tr } \rho_-(f)$.

Les arguments et définitions ci-dessus montrent que la sommabilité des représentations a vraiment affaire aux sous-ensembles bornés de $\mathcal{D}(G)$ et aux applications bornées, pas aux sous-ensembles ouverts et aux applications continues. Il en va de même pour le concept d'opérateur nucléaire. C'est-à-dire que la théorie des opérateurs nucléaires et des représentations sommables est à son aise dans les espaces vectoriels bornologiques. Nous pouvons encore donner des définitions dans le contexte des espaces vectoriels topologiques si nous les transformons en espaces vectoriels bornologiques en utilisant la bornologie standard des sous-ensembles bornés (au sens de von Neumann). Néanmoins, les espaces vectoriels topologiques sont le mauvais cadre pour étudier la nucléarité. La seule raison pour laquelle je les utilise ici est qu'ils sont plus familiers à la plupart des lecteurs et plus faciles à trouver dans la littérature.

Nous avons besoin de la nucléarité uniforme parce que nous voulons que $\chi_\rho(f)$ soit une fonctionnelle linéaire bornée de f . Dans ce qui suit, nous ne prouverons que la nucléarité de divers opérateurs. Les mêmes preuves donnent aussi la nucléarité uniforme. Nous laissons au lecteur le soin d'ajouter les détails restants. Qu'il suffise de dire qu'il existe des analogues du théorème 5.2 et du théorème 5.5 ci-dessous pour les ensembles uniformément nucléaires d'opérateurs.

Afin de prouver la sommabilité de notre interprétation spectrale ρ , nous définissons plusieurs opérateurs entre $\mathcal{H}_\pm$ et l'espace $\mathcal{S}_> \oplus \mathcal{S}_<$. Comme données auxiliaires, nous utilisons une fonction lisse $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ avec $\phi(t) = 0$ pour $t \ll 1$ et $\phi(t) = 1$ pour $t \gg 1$. Soit M_ϕ l'opérateur de multiplication par ϕ . Nous supposons pour simplifier que $\phi(t) + \phi(t^{-1}) = 1$, de sorte que

$$M_\phi + JM_\phi J = \text{id}.$$

Il est facile de vérifier que M_ϕ est une application continue de $\mathcal{S}_>$ dans $\mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times)$. Nous avertissons le lecteur que notre notation diffère de celle de [4] : là-bas la fonction auxiliaire $1 - \phi$ est utilisée et notée ϕ .

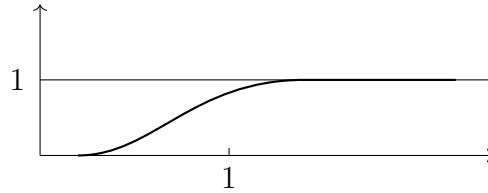


FIGURE 1 – La fonction auxiliaire ϕ

Maintenant nous définissons nos opérateurs :

$$\begin{aligned} \iota_+ : \mathcal{H}_+ &\rightarrow \mathcal{S}_> \oplus \mathcal{S}_<, & \iota_+ f &:= (Zf, JZ\mathfrak{F}f); \\ \iota_- : \mathcal{H}_- &\rightarrow \mathcal{S}_> \oplus \mathcal{S}_<, & \iota_- f &:= (f, f); \\ \pi_+ : \mathcal{S}_> \oplus \mathcal{S}_< &\rightarrow \mathcal{H}_+, & \pi_+(f_1, f_2) &:= (M_\phi Z^{-1}f_1, \mathfrak{F}M_\phi Z^{-1}Jf_2); \\ \pi_- : \mathcal{S}_> \oplus \mathcal{S}_< &\rightarrow \mathcal{H}_-, & \pi_-(f_1, f_2) &:= (M_\phi f_1, JM_\phi Jf_2). \end{aligned}$$

Il découle de l'équation (8) et de la proposition 3.2 que ces opérateurs sont bien définis et continus. Les opérateurs $\iota_\pm$ sont λ -équivalents, les opérateurs $\pi_\pm$ ne le sont pas. Nous calculons

$$\begin{aligned} \pi_- \iota_- &= M_\phi + JM_\phi J = \text{id}_{\mathcal{H}_-}, \\ \pi_+ \iota_+ &= M_\phi + \mathfrak{F}M_\phi \mathfrak{F} = \text{id}_{\mathcal{H}_+} + M_\phi - \mathfrak{F}JM_\phi J\mathfrak{F}, \\ \iota_- \pi_- &= \begin{pmatrix} M_\phi & JM_\phi J \\ M_\phi & JM_\phi J \end{pmatrix}, \\ \iota_+ \pi_+ &= \begin{pmatrix} ZM_\phi Z^{-1} & Z\mathfrak{F}M_\phi Z^{-1}J \\ JZ\mathfrak{F}M_\phi Z^{-1} & JZM_\phi Z^{-1}J \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi π_- est une section pour ι_- et $\iota_- \pi_- \in \text{End}(\mathcal{S}_> \oplus \mathcal{S}_<)$ est une projection sur un sous-espace isomorphe à $\mathcal{H}_-$. La preuve du théorème 3.3 montre que ι_+ a une image fermée et est un isomorphisme

topologique sur son image. Bien que π_+ ne soit pas une section pour ι_+ , c'est une approximation suffisamment bonne pour les arguments de sommabilité suivants. Je ne sais pas s'il existe une véritable section pour ι_+ , c'est-à-dire si l'image de ι_+ est un sous-espace complété de $\mathcal{S}_> \oplus \mathcal{S}_<$.

Lemme 5.3. *L'opérateur $\rho\lambda(f)(M_\phi - ZM_\phi Z^{-1})$ sur $S_>$ est nucléaire pour $f \in S_>$. L'opérateur $\rho\lambda(f)M_\phi : S_> \rightarrow S_<$ est nucléaire pour $f \in S_<$. L'opérateur $\rho\lambda(f)(M_\phi - \mathfrak{F}JM_\phi J\mathfrak{F})$ sur $\mathcal{H}_+$ est nucléaire pour $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times)$.*

Démonstration. Nous avons $\rho\lambda(f)Z(h) = f * \zeta * h = (Zf) * h = \rho\lambda(Zf)(h)$ pour tout $f, h \in S_>$. Donc

$$\begin{aligned} \rho\lambda(f)(M_\phi - ZM_\phi Z^{-1}) &= [\rho\lambda(f), M_\phi] - [\rho\lambda(f)Z, M_\phi]Z^{-1} \\ &= [\rho\lambda(f), M_\phi] - [\rho\lambda(Zf), M_\phi]Z^{-1}. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que $[\rho\lambda(f), M_\phi]$ est un opérateur nucléaire sur $S_>$ pour tout $f \in S_>$. Avec le calcul ci-dessus, ceci implique la première assertion du lemme parce que Z^{-1} est continu sur $S_>$ et $f \in S_>$ implique $Zf \in S_>$.

Nous calculons

$$[\rho\lambda(f), M_\phi](h)(x) = \int_0^\infty f(xy^{-1})(\phi(y) - \phi(x))h(y)d^\times y.$$

Ainsi notre opérateur a pour noyau intégral lisse $f(xy^{-1})(\phi(y) - \phi(x))$. Si f avait un support compact, ce noyau intégral serait aussi à support compact. Si seulement $f \in S_>$, nous pouvons encore estimer que notre noyau appartient à $S_> \otimes S(\mathbb{R}_+^\times)_{-s}$ pour tout $s \in]1, \infty[$. Ainsi $[\rho\lambda(f), M_\phi]$ se factorise à travers le plongement $S_> \subseteq L^2(\mathbb{R}_+^\times, x^{2s}d^\times x)$ pour tout $s > 1$. Ceci implique la nucléarité par le théorème 5.2 et achève la preuve de la première assertion du lemme.

Pour prouver la seconde assertion, nous posons $L_I^2 = \bigcap_{s \in I} L^2(\mathbb{R}_+^\times, x^{2s}d^\times x)$. C'est un espace de Fréchet. Nous affirmons que $\rho\lambda(f)$ est un opérateur linéaire continu $L_I^2 \rightarrow S_I$ pour tout intervalle ouvert I . (En fait, S_I est le sous-espace de Gårding ou, de façon équivalente, le sous-espace des vecteurs lisses dans la représentation λ sur L_I^2 , voir aussi [3].) Ceci découle de la description de S_I dans la preuve de la proposition 2.1 et de $D^m(f * h) = (D^m f) * h$. Par conséquent, nous avons des opérateurs linéaires continus

$$S_> \prec L_s^2 \xrightarrow{M_\phi} L_{]-\infty, 0[}^2 \prec L_{]-\infty, 0[}^2 \xrightarrow{\rho\lambda(f)} S_<$$

pour tout $s > 1$. Ainsi $\rho\lambda(f)M_\phi$ se factorise à travers l'espace de Hilbert L_s^2 . Ceci donne l'assertion par notre critère pour les opérateurs nucléaires, le théorème 5.2.

Nous affirmons que $\rho\lambda(f)(M_\phi - \mathfrak{F}JM_\phi J\mathfrak{F})$ en tant qu'opérateur sur $\mathcal{H}_+$ se factorise continûment à travers $L_{1/2}^2 \cong L^2(\mathbb{R}_+^\times, x d^\times x)$. Ceci implique la troisième assertion. Pour prouver l'affirmation, nous utilisons $\mathcal{H}_+ = S_> \cap \mathfrak{F}J(S_<)$. C'est-à-dire que l'application

$$\mathcal{H}_+ \rightarrow S_> \oplus S_<, \quad f \mapsto (f, J\mathfrak{F}f)$$

est un isomorphisme topologique sur son image. Nous l'avons déjà vu durant la preuve du théorème 3.3. Par conséquent, nous devons seulement vérifier l'existence d'extensions continues

$$\rho\lambda(f)(M_\phi - \mathfrak{F}JM_\phi J\mathfrak{F}) : L_{1/2}^2 \rightarrow S_>, \quad J\mathfrak{F} \circ \rho\lambda(f)(M_\phi - \mathfrak{F}JM_\phi J\mathfrak{F}) : L_{1/2}^2 \rightarrow S_<.$$

Nous écrivons

$$\begin{aligned}\rho\lambda(f)(M_\phi - \mathfrak{F}JM_\phi J\mathfrak{F}) &= -\rho\lambda(f)(M_{1-\phi} - \mathfrak{F}JM_{1-\phi}J\mathfrak{F}) \\ &= -\rho\lambda(f)M_{1-\phi} + \rho\lambda(\mathfrak{F}Jf)M_{1-\phi}J\mathfrak{F}.\end{aligned}$$

La proposition 2.1 donne $\mathfrak{F}Jf \in S_{>}$. De plus, J et $\mathfrak{F}$ sont unitaires sur $L_{1/2}^2$. Donc nous obtenons des extensions bornées $L_{1/2}^2 \rightarrow S_{>}$ des deux sommes par le même argument que pour la seconde assertion du lemme. De même, les deux sommes dans

$$J\mathfrak{F} \circ \rho\lambda(f)(M_\phi - \mathfrak{F}JM_\phi J\mathfrak{F}) = \rho\lambda(J\mathfrak{F}f)M_\phi - \rho\lambda(f)M_\phi J\mathfrak{F}$$

ont des extensions bornées $L_{1/2}^2 \rightarrow S_{<}$ comme voulu. $\square$

Lemme 5.4. *L'opérateur $\hat{\rho}(f) \circ (\iota_- \pi_- - \iota_+ \pi_+)$ sur $\mathcal{S}_{>} \oplus \mathcal{S}_{<}$ est nucléaire pour tout $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times)$.*

L'opérateur $\hat{\rho}(f) \circ (\text{id} - \pi_+ \iota_+)$ sur $\mathcal{H}_+$ est nucléaire pour tout $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times)$.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(f) \circ (\iota_- \pi_- - \iota_+ \pi_+) \\ = \begin{pmatrix} \hat{\rho}(f)(M_\phi - ZM_\phi Z^{-1}) & \hat{\rho}(f)J(M_\phi - JZ\mathfrak{F}M_\phi Z^{-1})J \\ \hat{\rho}(f)(M_\phi - JZ\mathfrak{F}M_\phi Z^{-1}) & \hat{\rho}(f)J(M_\phi - ZM_\phi Z^{-1})J \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{15}$$

Le coin supérieur gauche est nucléaire par la première assertion du lemme 5.3. Comme

$$\hat{\rho}(f)(J(M_\phi - ZM_\phi Z^{-1})J) = J(\hat{\rho}(Jf)(M_\phi - ZM_\phi Z^{-1}))J,$$

nous obtenons aussi la nucléarité du coin inférieur droit. Nous avons $\hat{\rho}(f)JZ\mathfrak{F} = \hat{\rho}(JZ\mathfrak{F}f)$ parce que $JZ\mathfrak{F}$ est λ -invariant. La proposition 2.1 et la proposition 3.2 donnent $JZ\mathfrak{F}(f) \in \mathcal{S}_{<}$. Donc les deux sommes $\hat{\rho}(f)M_\phi$ et $\hat{\rho}(f)JZ\mathfrak{F}M_\phi Z^{-1}$ dans le coin inférieur gauche sont nucléaires par la seconde assertion du lemme 5.3. L'assertion pour le coin supérieur droit découle d'un argument symétrique. La nucléarité de $\hat{\rho}(f) \circ (\text{id} - \pi_+ \iota_+)$ sur $\mathcal{H}_+$ est exactement la troisième assertion du lemme 5.3. $\square$

Afin d'appliquer ceci à la représentation ρ , nous avons besoin d'un fait général sur les opérateurs nucléaires. Soient W_1, W_2 des espaces de Fréchet et soient $V_1 \subseteq W_1$ et $V_2 \subseteq W_2$ des sous-espaces fermés. Si $T : W_1 \rightarrow W_2$ envoie V_1 dans V_2 , nous notons $T|_{V_1, V_2}$ et $T|^{W_1/V_1, W_2/V_2}$ les opérateurs $V_1 \rightarrow V_2$ et $W_1/V_1 \rightarrow W_2/V_2$ induits par T .

Théorème 5.5 ([2]). *Si T est nucléaire, alors $T|_{V_1, V_2}$ et $T|^{W_1/V_1, W_2/V_2}$ le sont aussi. Si $V_1 = V_2 = V$ et $W_1 = W_2 = W$, alors $\text{tr } T = \text{tr } T|_V + \text{tr } T|^{W/V}$.*

Proposition 5.6. *La représentation $\rho : \mathbb{R}_+^\times \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{H}^0)$ est sommable et*

$$\chi(\rho)(f) = \text{tr } \hat{\rho}(f)(\text{id}_{\mathcal{H}_+} - \pi_+ \iota_+) - \text{tr } \hat{\rho}(f)(\iota_- \pi_- - \iota_+ \pi_+) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^\times).$$

Démonstration. Les plongements de $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$ dans $\mathcal{S}_{>} \oplus \mathcal{S}_{<}$ coïncident sur le sous-espace commun $\mathcal{H}_\cap \cong Z\mathcal{H}_\cap$ et se combinent donc en un plongement de $\mathcal{H}_\cup$. Ainsi nous identifions $\mathcal{H}_\cup$ au sous-espace

$\iota_+ \mathcal{H}_+ + \iota_- \mathcal{H}_-$ de $\mathcal{S}_> \oplus \mathcal{S}_<$. Soit $T := \hat{\rho}(f)(\iota_- \pi_- - \iota_+ \pi_+)$. L'image de T est contenue dans $\mathcal{H}_\cup$. Par conséquent, sa trace comme opérateur sur $\mathcal{S}_> \oplus \mathcal{S}_<$ coïncide avec sa trace comme opérateur sur $\mathcal{H}_\cup$ par le théorème 5.5. Écrivons

$$T|_{\mathcal{H}_\cup} = \hat{\rho}(f)(\text{id}_{\mathcal{H}_\cup} - \iota_+ \pi_+|_{\mathcal{H}_\cup}) - \hat{\rho}(f)(\text{id}_{\mathcal{H}_\cup} - \iota_- \pi_-|_{\mathcal{H}_\cup}).$$

Comme $\iota_- \pi_-$ est une projection sur $\mathcal{H}_- \subset \mathcal{H}_\cup$, le théorème 5.5 donne

$$\text{tr } \hat{\rho}(f)(\text{id}_{\mathcal{H}_\cup} - \iota_- \pi_-|_{\mathcal{H}_\cup}) = \text{tr } \hat{\rho}(f)|^{\mathcal{H}_\cup/\mathcal{H}_-} = \chi(\rho_+)(f).$$

De même, comme $\iota_+ \pi_+$ envoie $\mathcal{H}_\cup$ dans $\mathcal{H}_+$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{tr } \hat{\rho}(f)(\text{id}_{\mathcal{H}_\cup} - \iota_+ \pi_+|_{\mathcal{H}_\cup}) &= \text{tr } \hat{\rho}(f)|^{\mathcal{H}_\cup/\mathcal{H}_+} + \text{tr } \hat{\rho}(f)(\text{id}_{\mathcal{H}_+} - \iota_+ \pi_+|_{\mathcal{H}_+}) \\ &= \chi(\rho_-)(f) + \text{tr } \hat{\rho}(f)(\text{id}_{\mathcal{H}_+} - \pi_+ \iota_+). \end{aligned}$$

Donc

$$\text{tr } \hat{\rho}(f)(\iota_- \pi_- - \iota_+ \pi_+) = \chi(\rho_-)(f) + \text{tr } \hat{\rho}(f)(\text{id}_{\mathcal{H}_+} - \pi_+ \iota_+) - \chi(\rho_+)(f).$$

Chemin faisant, nous voyons que les opérateurs dont nous prenons la trace sont nucléaires. C'est-à-dire que ρ_+ et ρ_- sont des représentations sommables. $\square$

Il reste à calculer explicitement les traces dans la proposition 5.6. Nous avons besoin des définitions suivantes. Pour une fonction continue $f : \mathbb{R}_+^\times \rightarrow \mathbb{C}$, soit $\tau(f) := f(1)$ et $\partial f(x) = f(x) \ln x$. Ceci définit une dérivation bornée ∂ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_I$ pour tout intervalle I , c'est-à-dire $\partial(f_1 * f_2) = \partial(f_1) * f_2 + f_1 * \partial(f_2)$. Cette dérivation est le générateur de l'action duale $t \cdot f(x) := x^{it} f$ de $\mathbb{R}$. Remarquons que $\tau(\partial f) = 0$. L'extension évidente de ∂ aux distributions est encore une dérivation.

Lemme 5.7. *Soient $f_0, f_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_s$ pour un certain $s \in \mathbb{R}$. Alors $\beta(f_0)[M_\phi, \beta(f_1)]$ est un opérateur nucléaire sur $L^2(\mathbb{R}_+^\times, x^{2s} d^\times x)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)_s$ et*

$$\text{tr } \beta(f_0)[M_\phi, \beta(f_1)] = \tau(f_0 * \partial f_1).$$

Démonstration. Les opérateurs de multiplication par $x^{\pm s}$ sont des opérateurs unitaires entre L_s^2 et L_0^2 . Nous pouvons les utiliser pour réduire le cas général au cas particulier $s = 0$. Nous supposons cela dans ce qui suit. Nous avons vérifié ci-dessus que $[M_\phi, \beta(f_1)]$ a un noyau intégral dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times) \hat{\otimes} \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)$. Par conséquent, il en va de même de $\beta(f_0)[M_\phi, \beta(f_1)]$. Ceci implique la nucléarité comme opérateur de $L^2(\mathbb{R}_+^\times, d^\times x)$ vers $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^\times)$ par le théorème 5.2. De plus, l'opérateur a la même trace sur les deux espaces. Explicitement, le noyau intégral est

$$(x, y) \mapsto \int_0^\infty f_0(xz^{-1}) f_1(zy^{-1}) (\phi(z) - \phi(y)) d^\times z.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{tr } \beta(f_0)[M_\phi, \beta(f_1)] &= \int_0^\infty \int_0^\infty f_0(xz^{-1}) f_1(zx^{-1}) (\phi(z) - \phi(x)) d^\times z d^\times x \\ &= \int_0^\infty f_0(x) f_1(x^{-1}) \int_0^\infty \phi(z) - \phi(xz) d^\times z d^\times x. \end{aligned}$$

Nous calculons $\int_0^\infty \phi(z) - \phi(xz) d^\times z$. Si ϕ avait un support compact, l'invariance de $d^\times z$ par λ forcerait l'intégrale à s'annuler. Par conséquent, nous pouvons remplacer ϕ par n'importe quelle fonction ϕ' ayant le même comportement en 0 et à l'infini. Nous choisissons ϕ' comme la fonction caractéristique de $[1, \infty[$. Si $x \leq 1$, alors $\phi'(z) - \phi'(xz)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[1, x^{-1}[$, de sorte que l'intégrale vaut $\ln(x^{-1})$. Nous obtenons la même valeur pour $x \geq 1$ aussi. Donc $\text{tr } \beta(f_0)[M_\phi, \beta(f_1)] = \int_0^\infty f_0(x) f_1(x^{-1}) \ln(x^{-1}) d^\times x = \tau(f_0 * \partial f_1)$. $\square$

Théorème 5.8. *Définissons les distributions W_p pour $p \in \mathcal{P}$ et $p = \infty$ comme en (2) et (3). Alors*

$$\sum_{z \in \mathbb{C}} \text{ord}_\xi(z) \hat{f}(z) = \chi(\rho)(f) = \sum_{p \in \mathcal{P}} W_p(f) + W_\infty(f)$$

pour tout $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times)$. Ici $\text{ord}_\xi(z)$ désigne l'ordre en z de la fonction ζ complète ξ , qui est positif aux pôles et négatif aux zéros de ξ .

Démonstration. La trace d'un opérateur nucléaire sur un espace de Fréchet nucléaire est égale à la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité algébrique (voir [2]). Comme $\text{tr}(A) = \text{tr}(A)$ pour tout opérateur nucléaire A , la première égalité découle du corollaire 4.2. Il reste à montrer $\chi(\rho)(f) = \sum_{p \in \mathcal{P}} W_p(f) + W_\infty(f)$. La proposition 5.6 donne

$$\begin{aligned} \chi(\rho)(f) &= -\text{tr } \beta(\lambda(f))(\iota_- \pi_- - \iota_+ \pi_+) + \text{tr } \beta(\lambda(f))(\text{id}_{\mathcal{H}_+} - \pi_+ \iota_+) \\ &= -\text{tr } \beta(\lambda(f))(M_\phi - Z M_\phi Z^{-1})|_{S_>} - \text{tr } \beta(\lambda(f))J(M_\phi - Z M_\phi Z^{-1})J|_{S_<} \\ &\quad - \text{tr } \beta(\lambda(f))(M_\phi - \mathfrak{F} J M_\phi J \mathfrak{F})|_{\mathcal{H}_+}. \end{aligned}$$

Il suffit de vérifier que ceci coïncide avec $W(f)$ si $f = f_0 * f_1$ pour $f_0, f_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^\times)$ parce que de tels éléments sont denses dans $\mathcal{O}(\mathbb{R}_+^\times)$. Nous calculons

$$\begin{aligned} &-\text{tr } \beta(f_0 * f_1)(M_\phi - Z M_\phi Z^{-1})|_{S_>} \\ &= \text{tr } \beta(f_0)[M_\phi, \beta(f_1)] - \text{tr } \beta(f_0)[M_\phi, \beta(Z f_1)] Z^{-1} \\ &= \text{tr } \beta(f_0)[M_\phi, \beta(f_1)] - \text{tr } \beta(Z^{-1} f_0)[M_\phi, \beta(Z f_1)] \end{aligned}$$

parce que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ si A est nucléaire. C'est un opérateur nucléaire $L_s^2 \rightarrow S_>$ pour tout $s > 1$. Donc il a la même trace comme opérateur sur $S_>$ et L_s^2 . Le lemme 5.7 donne

$$\begin{aligned} -\text{tr } \beta(f_0 * f_1)(M_\phi - Z M_\phi Z^{-1})|_{S_>} &= \tau(f_0 * \partial f_1) - \tau(Z^{-1} f_0 * \partial(Z f_1)) \\ &= -\tau(f_0 * f_1 * Z^{-1} \partial(Z)) = \tau(f_0 * f_1 * Z \partial(Z^{-1})) \end{aligned}$$

où $\partial(Z)$ est défini de façon évidente. Nous utilisons aussi $\partial(Z^{-1}) = -Z^{-2} \partial(Z)$, qui découle de la propriété de dérivation. Maintenant nous utilisons le produit d'Euler pour l'opérateur Zêta et la règle de dérivation :

$$\begin{aligned} Z * \partial(Z^{-1}) &= Z * \partial \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \lambda_p^{-1}) \right) = \sum_{p \in \mathcal{P}} (1 - \lambda_p^{-1})^{-1} \partial(1 - \lambda_p^{-1}) \\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \ln(p) \lambda_p^{-1} (1 - \lambda_p^{-1})^{-1} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{e=1}^{\infty} \ln(p) \lambda_p^{-e}. \end{aligned}$$

Donc

$$-\operatorname{tr} \beta(\lambda(f))(M_\phi - ZM_\phi Z^{-1})|_{S_>} = \tau \left(f * \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{e=1}^{\infty} \ln(p) \lambda_p^{-e} \right) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{e=1}^{\infty} \ln(p) f(p^e).$$

La seconde somme dans (15) se réduit à celle-ci par

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \beta(\lambda(f))J(M_\phi - ZM_\phi Z^{-1})J|_{S_<} &= \operatorname{tr} J\beta(\lambda(f))J(M_\phi - ZM_\phi Z^{-1})|_{S_>} \\ &= \operatorname{tr} \beta(\lambda(f))J(M_\phi - ZM_\phi Z^{-1})|_{S_>}. \end{aligned}$$

Donc

$$-\operatorname{tr} \beta(\lambda(f))J(M_\phi - ZM_\phi Z^{-1})J|_{S_<} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{e=1}^{\infty} \ln(p) p^{-e} f(p^{-e}).$$

Ces deux sommes ensemble égalent $\sum_{p \in \mathcal{P}} W_p$.

*Tangermann : L'expression : $-\tau(f_0 * f_1 * J\mathfrak{F}\partial(\mathfrak{F}J))$ n'a pas de sens exact et semble être une coquille. Que signifie-t-elle si $f_0 = f_1 = \exp(-\pi x^2)p(x)$, où $p(x)$ est un polynôme satisfaisant certaines conditions d'annulation ?*

Maintenant nous traitons la troisième somme dans (15). Les mêmes arguments que ci-dessus donnent

$$\begin{aligned} &-\operatorname{tr} \beta(\lambda(f_0 * f_1))(M_\phi - \mathfrak{F}JM_\phi J\mathfrak{F})|_{\mathcal{H}_+} \\ &= \operatorname{tr} \beta(\lambda(f_0))[M_\phi, \beta(\lambda(f_1))] - \operatorname{tr} \beta(\lambda(f_0))[M_\phi, \beta(\mathfrak{F}Jf_1)]J\mathfrak{F} \\ &= \tau(f_0 * \partial f_1) - \tau(J\mathfrak{F}(f_0) * \partial(\mathfrak{F}Jf_1)) = -\tau(f_0 * f_1 * J\mathfrak{F}\partial(\mathfrak{F}J)) = \tau(\mathfrak{F}J\partial(J\mathfrak{F}(f_0 * f_1))). \end{aligned}$$

Ici nous utilisons $\tau(\partial f) = 0$. Explicitement,

$$\tau(\mathfrak{F}J\partial(J\mathfrak{F}f)) = \mathfrak{F}M_{\ln(x^{-1})}\mathfrak{F}^{-1}f(1) = -\mathfrak{F}(\ln x) \dagger f(1) = -\langle \mathfrak{F}(\ln x), y \mapsto f(1 - y) \rangle.$$

Ici $M_{\ln(x^{-1})}$ désigne l'opérateur de multiplication par $\ln(x^{-1}) = -\ln x$ et $\dagger$ désigne la convolution par rapport à la structure additive sur $\mathbb{R}$. Ainsi il reste à calculer la transformée de Fourier de $\ln x$. Comme $\psi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \ln x dx$ définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$, $\mathfrak{F}(\ln x)$ est une distribution tempérée bien définie sur $\mathbb{R}$. La propriété de covariance $\ln(tx) = \ln(t) + \ln(x)$ pour $t, x \in \mathbb{R}_+^\times$ implique

$$\langle \mathfrak{F}(\ln x), \lambda_t \psi \rangle = \langle \mathfrak{F}(\ln x), \psi \rangle - \ln(t) \psi(0). \quad (16)$$

En particulier, $\mathfrak{F}(\ln x)$ est λ -invariante sur l'espace des $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $\psi(0) = 0$. Ainsi

$$\langle \mathfrak{F}(\ln x), \psi \rangle = c \int_{\mathbb{R}^\times} \psi(x) d^\times x$$

pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$ pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $\psi(0) = 0$.

6. Généralisations aux fonctions L de Dirichlet

Les résultats de la section 4 se transportent de manière évidente. Maintenant $\mathcal{H}_+^0 = \{0\}$ parce que L_χ n'a pas de pôles, et les valeurs propres de ${}^tD_-$ sont les zéros non triviaux de L_χ avec la multiplicité algébrique correcte.

Quelques modifications sont nécessaires dans la section 5. Nous définissons ι_- et π_- comme ci-dessus. Comme nous voulons que les plongements $\iota_\pm$ coïncident sur $\mathcal{H}_\cap \cong \mathcal{L}_\chi \mathcal{H}_\cap$, nous devons poser

$$\iota_+(f) := (\mathcal{L}_\chi(f), \kappa \cdot d^{1/2} \lambda_d^{-1} J \mathcal{L}_\chi \mathfrak{F} f)$$

et modifier π_+ en conséquence de sorte que $\pi_+ \iota_+ = M_\phi + \mathfrak{F}^* M_\phi \mathfrak{F}$. Avec ces changements, les calculs restants se transportent facilement. Bien sûr, nous obtenons différentes sommes locales W_p dans la formule explicite pour $\mathcal{L}_\chi$. Vous voudrez peut-être les calculer vous-même comme exercice pour tester votre compréhension des arguments ci-dessus.

Plus généralement encore, nous pouvons remplacer les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ par une extension quadratique imaginaire comme $\mathbb{Q}[i]$ et étudier les fonctions L attachées aux caractères du groupe des classes d'idèles de cette extension de corps. De tels corps n'ont qu'une seule place infinie, qui est complexe. Un caractère du groupe des classes d'idèles se restreint en un caractère du groupe cercle à l'intérieur de $\mathbb{C}^\times$. L'espace $\mathcal{H}_+$ est maintenant remplacé par le sous-espace homogène de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ défini par ce caractère.

Une fois qu'il y a plus d'une place infinie, nous avons besoin du cadre plus général de [4]. De plus, les constructions adéliques de [4] fournissent une meilleure compréhension même pour $\mathbb{Q}$ parce qu'elles montrent la similarité de l'analyse aux places finies et infinies. La formule explicite prend une forme bien plus agréable si nous rassemblons tous les caractères du groupe des classes d'idèles. Les sommes locales résultantes qui composent la distribution de Weil sont de la même forme générale

$$W_\iota(f) = \text{pv} \int_{\mathbb{Q}_\iota^\times} \frac{f(x)}{|1 - x^{-1}|} d^\times x$$

à toutes les places ι (avec $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$) et peuvent aussi être interprétées géométriquement comme une formule de trace de Lefschetz généralisée (voir [1]).

Références

- [1] Alain Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), no. 1, 29–106, doi : 10.1007/s00029005004R 1694895
- [2] Alexandre Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 16, 1955., doi : 10.1090/memo/0016 MR 0075539
- [3] Ralf Meyer, *Smooth group representations on bornological vector spaces*, Bull. Sci. Math. **128** (2004), no. 2, 127–166, doi : 10.1016/j.bulsci.2003.12.002. MR 2039113
- [4] Ralf Meyer, *On a representation of the idele class group related to primes and zeros of L -functions*, Duke Math. J. **127** (2005), no. 3, 519–595, doi : 10.1215/S0012-7094-04-12734-4. MR 2132868
- [5] John T. Tate, *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions*, Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965), Thompson, Washington, D.C., 1967, pp. 305–347. MR 0217026