THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC
Volume 11. Numéro 4. Déc. 1946

La concaténation comme base de l'arithmétique

W. V. Quine

1. Introduction. La syntaxe générale, la partie formelle de la théorie symbolique générale, a comme opération de base l'opération de *concaténation*, représentée par le connecteur "$\frown$" et à comprendre de la façon suivante : si x et y sont deux expressions quelconques, $x\frown y$ est l'expression formée en écrivant l'expression x immédiatement suivie de l'expression y. Par exemple, si "alpha" et "beta" sont les noms les symboles "α" et "β", l'expression syntaxique "alpha$\frown$beta" est le nom de l'expression "$\alpha\beta$".

Tarski [1] et Hermes [2] ont présenté les axiomes pour la concaténation, et les définitions des concepts syntaxiques qui en dérivent. Hermes a également relié la théorie de la concaténation à l'arithmétique des entiers naturels, en construisant un modèle de la seconde dans la première. Inversement, la preuve de Gödel de l'impossibilité d'une axiomatisation complète et consistante de l'arithmétique [3] dépendait de la construction d'un modèle de la théorie de la concaténation dans l'arithmétique.

Comme Tarski et Hermes, j'ai aussi utilisé la concaténation comme base pour différentes constructions [4] ; mais mes constructions diffèrent principalement des leurs par le fait qu'elles ne présupposent aucune machinerie logique auxiliaire au-delà du niveau *élémentaire* : les fonctions de vérité, la quantification, et l'identité. On peut facilement montrer que découle de mes constructions le fait que l'arithmétique élémentaire des entiers naturels (élémentaire dans le sens de "n'utilisant aucun des auxiliaires logiques sus-mentionnés") peut être intégrée dans la théorie élémentaire de la concaténation. La seule réserve est que les composants atomiques qui peuvent être concaténés doivent être au moins au nombre de deux, et distinguables par leur nom ; par exemple, alpha et beta.

Le présent article, entrepris sous la suggestion du Professeur Tarski, établira ce qui vient d'être énoncé plus explicitement et sous une forme renforcée : on montrera non seulement que l'arithmétique élémentaire des entiers naturels peut être intégrée dans la théorie élémentaire de la concaténation, mais qu'elle peut également être intégrée ainsi en comblant la totalité de cette dernière, rendant la théorie élémentaire de la concaténation et l'arithmétique élémentaire des entiers naturels

---

Reçu le 6 avril 1946.

Transcrition en LaTeX et traduction : Denise Vella-Chemla, avril 2025.

1. Alfred Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, Studia philosophica* (Lwów), vol. 1 (1935), p. 261-405, spécialement p. 287 et suiv.

2. Hans Hermes, *Semiotik. Eine Theorie der Zeichengestalten als Grundlage für Untersuchungen von formalisierten Sprachen.* Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, nouvelles séries, n°. 5. Leipzig, 1938, 22 pp.

3. Kurt Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38 (1931), pp. 173-198.

4. W. V. Quine, *Definition of substitution, Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 42 (1936), pp. 561-569 ; On derivability, dans le présent JOURNAL, vol. 2 (1937), pp. 113-119 ; *Mathematical logic* (New York, 1940), Ch. 7.

identiques.

En fait, il sera plus pratique de considérer, plutôt que l'arithmétique des entiers naturels, celle des entiers positifs. Les conclusions atteintes peuvent après coup être transférées à l'arithmétique des entiers naturels, comme on le verra.

L'article ne présuppose pas de connaissance préalable des travaux concernant la concaténation.

Tournons-nous maintenant vers des définitions plus justes de ce que l'on entend par théorie élémentaire de la concaténation et arithmétique élémentaire des entiers positifs, et l'assertion plus précise de ce que l'on doit prouver à leur propos.

On ne doit pas penser à la théorie de la concaténation comme à une théorie syntaxique ; on doit la voir comme traitant de séquences finies de n'importe quelle sorte d'objets. Les objets, appelés *atomes*, sont eux-mêmes considérés comme, par exemple, des séquences de longueur un ; et la concaténation est l'opération consistant à les accoler les unes aux autres pour constituer de nouvelles séquences. Ainsi, si la séquence x est constituée des atomes successifs a, b, b, a, et c, et si y est la séquence constituée de b et a l'un après l'autre, alors la séquence $x \frown y$ sera constituée successivement de a, b, b, a, c, b, a. Les parenthèses seront supprimées lorsqu'on construit "$x \frown y \frown z$" comme "$(x \frown y) \frown z$" ; clairement le regroupement peut se faire indifféremment.

La *théorie élémentaire de la concaténation* comprend ce corps de théorie qui peut être exprimé en fonction de la concaténation, de l'identité, des noms des atomes individuels, des fonctions de vérité, et de la quantification par rapport aux variables "x", "y", "z", dont les valeurs sont des suites de symboles. La théorie varie dans le degré de détail à accorder au nombre supposé des atomes. Ainsi, si l'on suppose que l'on n'a que deux atomes et qu'on les désigne par "a" et "b", les formules de la théorie élémentaire de la concaténation sont les suivantes :

(i) les identités, constituées de "=" flanqué de termes dont chacun est une simple constante "a", ou "b", ou d'une variable "x", "y", "z", ... , ou d'une expression composée de tels symboles simples reliés par un ou plusieurs symbole de concaténation ;

(ii) tous les éléments composés, formés par de telles identités reliées par des connecteurs logiques et des quantifications par rapport aux variables "x", "y", etc.

Par *arithématique élémentaire des entiers positifs*, on entend ce corps de théorie qui peut s'exprimer par des sommes, produits, puissances, identités, noms des différents entiers positifs, valeurs de vérité, et quantifications par rapport aux variables "x", "y", "z", ..., dont les valeurs sont des entiers positifs. Ainsi les formules de l'arithmétique élémentaire des entiers positifs peuvent être des formes suivantes :

(i) les identités, consistant en signes "=" flanqués par des termes dont chacun est soit une simple constante "1", "2", ... , ou une variable "x", "y", "z", ..., ou une expression composée de tels simples symboles obtenus par une ou plusieurs applications des formes notationnelles "$x + y$", "$x \times y$", "x^y" de somme, produit, et élévation à la puissance ;

(ii) toutes les possibilités de compositions fabriquées à partir de telles identités au moyen de connecteurs logiques et de quantification par rapport aux variables "x", "y", etc.

On démontrera qu'un modèle de l'arithmétique peut être construit, en termes de séquences finies, de telle manière que toutes les notations de l'arithmétique élémentaire des entiers positifs puissent être définies dans la notation de la théorie élémentaire de la concaténation de deux atomes ou plus.

L'identification des entiers positifs aux séquences peut être soit *unilatérale*, dans le sens où les entiers sont exhaustivement identifiés à une sous-classe non exhaustive des séquences, ou bien *bilatérale*, au sens où les entiers et les séquences sont ainsi identifiés qu'ils couvrent l'ensemble des entiers et l'ensemble des séquences. La construction de l'arithmétique dans la théorie de la concaténation sera d'abord effectuée de façon unilatérale (§ 3), puisque c'est plus facile. Mais la construction bilatérale (§ 4) est particulièrement intéressante dans la mesure où elle rend la théorie élémentaire de la concaténation et l'arithmétique élémentaire des entiers positifs complètement traduisibles l'une dans l'autre. Et cela montre que la concaténation peut être interprétée comme une opération purement arithmétique, en fonction de laquelle les autres opérations de l'arithmétique sont définissables.

Après avoir démontré ces choses par rapport à l'arithmétique des entiers positifs, on peut déduire la même chose par rapport à l'arithmétique des entiers naturels ; pour elle, on sait (et cela sera réétabli brièvement au § 5) que l'arithmétique des entiers naturels est constructible bilatéralement dans celle des entiers positifs.

Les définitions comprises dans toutes ces constructions seront toutes, dans un certain sens, indirectes ; c'est-à-dire qu'un usage libre sera fait de la notation descriptive "$(\imath x)(...)$", qui n'est éliminable par aucune substitution directe d'expressions fabriquées à partir de termes primitifs. Cette notation n'a pas été citée dans l'inventaire ci-dessus des notations de la théorie considérée, parce qu'on sait bien que la présence d'une machinerie notationnelle de quantification, fonctions à valeurs de vérité, et identité, rend la notation descriptive éliminable, dans tout théorème ou autre formule dans lesquels elle apparaît.

2. Relations finies. La circonstance principale qui rend possible la construction de l'arithmétique à partir de la théorie de la concaténation est que les séquences individuelles peuvent être fabriquées pour faire le travail de toutes les relations finies de séquences, par une méthode qui va être présentée maintenant. Je suppose ici que notre théorie de la concaténation contient au moins deux atomes, a et b ; ils peuvent être en nombre plus grand que 2.

On peut penser à une relation finie en premier lieu comme à une collection finie de paires ordonnées, et représentée graphiquement par une liste à deux colonnes. Considérons maintenant une telle relation quelconque ; supposons qu'elle associe u_1 à v_1, et u_2 à v_2, et etc. jusqu'à u_n associé à v_n. (Les éléments u_1, u_2, v_1, etc. sont eux-mêmes des séquences quelconques). Soit z un certain décompte, i.e., une certaine séquence constituée seulement d'occurrences de a. (La raison pour laquelle on a choisi d'appeler une telle séquence un décompte deviendra évidente au § 4). De plus, prenons pour ce décompte z un décompte plus long que tout autre apparaissant dans n'importe laquelle des séquences u_1, u_2, v_1, etc. Maintenant formons n séquences, une correspondant à chacune des n paires de la relation originale, comme suit :

$$w_1 = b^\frown z^\frown b^\frown u_1{}^\frown b^\frown z^\frown b^\frown v_1{}^\frown b^\frown z,$$

$$w_2 = b^\frown z^\frown b^\frown u_2{}^\frown b^\frown z^\frown b^\frown v_2{}^\frown b^\frown z,$$

$$\vdots$$

$$w_n = b^\frown z^\frown b^\frown u_n{}^\frown b^\frown z^\frown b^\frown v_n{}^\frown b^\frown z,$$

et plaçons-les bout à bout les unes à la suite des autres pour former une seule séquence :

$$w = w_1{}^\frown w_2{}^\frown \dots {}^\frown w_n.$$

Maintenant observons certaines particularités de w.

(i) *Les seules occurrences de z dans w sont les $3n$ occurrences de z qui sont montrées explicitement dans les expansions ci-dessus de w_1, $w_2, \dots, w_n$* ; il n'y a pas d'autres occurrences supplémentaires cachées de z. On le voit de la façon suivante. Il ne peut y avoir d'occurrence supplémentaire de z cachée dans l'une quelconque des occurrences de u_1, v_1, u_2, etc., parce que z excède tout décompte qui y figurerait ; il ne peut non plus y avoir d'occurrence supplémentaire du décompte z se chevauchant avec l'une des occurrences explicitement montrées de z ou de u_1, v_1, u_2, etc., parce que chacune de ces occurrences explicitement montrées est isolée au début ou à la fin par l'atome b, qui ne peut pas apparaître dans un décompte. Les possibilités ont ainsi été toutes envisagées.

(ii) Les seuls segments de w qui ont $z^\frown b$ juste avant elles et $b^\frown z$ juste après, et qui ne contiennent pas elles-mêmes une quelconque occurrence de z, sont les occurrences de u_1, v_1, u_2, etc. qui sont montrées explicitement dans les expansions ci-dessus de $w_1, w_2, \dots, w_n$. Cela découle de (i) en inspectant les expansions de $w_1, w_2, \dots w_n$.

(iii) Si x et y sont des séquences dont aucune ne contient une occurrence quelconque de z, et si

$$z^\frown b^\frown x^\frown b^\frown z^\frown b^\frown y^\frown b^\frown z \tag{1}$$

apparaît quelque part dans w, alors x et y doivent être respectivement u_i et v_i pour un certain i. Car, par (ii), x doit être l'un des u_1, v_1, u_2, etc., et y doit apparaître après eux[5]. De nouveau, les occurrences de x et y en question ne peuvent pas être dans des parties différentes des segments $w_1, w_2, \dots, w_n$ de w, parce que si elles l'étaient, elles seraient séparées par au moins $b^\frown z^\frown b^\frown z^\frown b$ au lieu de simplement $b^\frown z^\frown b$. Donc x et y doivent être respectivement les u_i et v_i pour une certaine valeur de i.

En vue de (iii), on a le résultat suivant : *plutôt que de dire que x est à côté de y dans notre relation originale finie, on peut omettre de mentionner cette relation et parler à la place de la séquence w*, en disant que (1) fait partie de w et que x et y ne contiennent pas d'occurrences de z (z étant spécifié en retour comme le décompte le plus long dans w).

5. *Note de la traductrice : selon le sens de lecture habituel.*

Écrivons "$w(x, y)$" pour signifier que (1) est une portion de w et que x et y ne contiennent pas d'occurrences de z (où z est spécifié comme étant le décompte le plus long dans w) ; alors, ce que l'on a trouvé, c'est qu'on peut construire une suite w telle que $(x)(y)$ [$w(x, y) \equiv .x$ est à côté de y dans notre relation originale finie].

Pour préparer l'énoncé de la définition formelle de "$w(x, y)$", on a besoin d'introduire la notation "$\dot{\subset}$", signifiant "apparaît dans", "est une partie de". Ceci peut être défini en théorie de la concaténation de la façon suivante :

D1. $$x \mathbin{\dot{\subset}} y =_{df} (\exists z)(\exists w)(x = y \,.\vee.\, z^\frown x = y \,.\vee.\, x^\frown w = y \,.\vee.\, z^\frown x^\frown w = y).$$

Ainsi "$x \mathbin{\dot{\subset}} y$" signifie que la séquence x est une partie continue (ou la totalité) de la séquence y [6] .

Ensuite, la notation "Tz", signifiant que z est un décompte, i.e., ne contient que des a, est simplement définie par :

D2. $$Tz =_{df} (x)(x \mathbin{\dot{\subset}} z \,.\supset.\, a \mathbin{\dot{\subset}} x).$$

Dire que z est le plus long décompte dans w est équivalent à dire que z est un décompte et que z est une partie de w et que tout décompte apparaissant n'importe où dans w réapparaît comme partie de z. Symboliquement, cela s'écrit :

$$Tz \,.\, z \mathbin{\dot{\subset}} w \,.\, (v)(Tv \,.\, v \mathbin{\dot{\subset}} w \,.\supset.\, \dot{\subset}\, z),$$

ce qui est équivalent à :

(2) $$(v)(Tv \,.\, v \mathbin{\dot{\subset}} w \,.\equiv.\, v \mathbin{\dot{\subset}} z).$$

Donc maintenant, nous sommes en mesure de définir "$w(x, y)$" comme signifiant qu'il existe une suite z qui satisfait (2), et qui ne fait pas partie de x ou de y, et qui est telle en outre que la suite exprimée dans (1) est une partie de w.

D3. $$w(x, y) =_{df} (\exists z)\ [(v)(v \,.\, v \mathbin{\dot{\subset}} w \,.\equiv.\, v \mathbin{\dot{\subset}} z) \\ .\sim (z \mathbin{\dot{\subset}} y).\,.\sim (z \mathbin{\dot{\subset}} y) \,.\, z^\frown b^\frown x^\frown b^\frown z^\frown b^\frown y^\frown b^\frown z \mathbin{\dot{\subset}} w].$$

La raisonnement du présent paragraphe a montré que, pour *toute* relation finie de séquences, *il existe* une séquence w telle que

$$(x)(y)\ [w(x, y) \equiv .\, x \text{ est en relation avec } y].$$

On a vu comment, étant donnée une liste des paires comprenant la relation, une telle séquence w peut effectivement être construite.

6. Le definiens dans **D1** pourrait être simplifié en "$(\exists z)(\exists w)(z^\frown x^\frown w = y)$" si l'on peut supposer la séquence nulle parmi les séquences de nos variables. Pourtant, j'ai plutôt choisi de ne pas considérer la séquence nulle dans le présent article, throughout the present paper, lest it be thought to be an essential assumption, de peur que cela ne soit considéré comme une hypothèse essentielle.

3. Construction unilatérale. Une façon pratique d'obtenir un modèle des entiers positifs dans le modèle des séquences basées sur un ou plusieurs atomes $a, b, \ldots$ est d'identifier chaque entier n avec le décompte qui contient n occurrences de a. Ainsi 1, 2, 3,... deviennent définissables respectivement par $a, a^\frown a, a^\frown a^\frown a, \ldots$; et pour dire que x est un entier positif, il suffit de dire simplement que Tx.

Lorsque x et y sont des entiers positifs, clairement "$x \mathrel{\dot{\subset}} y$" revient à "$x \leq y$" ; et $x^\frown y$ est la *somme* de x et y.

Le *produit* $x \times y$ est la suite que l'on obtiendrait en écrivant x de façon répétée, bout à bout, y fois, c'est-à-dire autant de fois que a apparaît dans y. (Cette explication est pertinente même lorsque x n'est pas un entier ; mais il s'agit d'une extension incidente qui ne nous intéresse pas.) Abordons maintenant le problème de la construction d'une définition concrète à cet effet.

On montrera d'abord que, pour toute suite z, la condition suivante implique que z est le produit $x \times y$ au sens souhaité :

(3) $(\exists w)\{w(y,z) \,.\, (s)(t)\ [w(s,t) \supset: s = a \,.\, t = x \,.\!\vee\ (\exists u)(\exists v)(w(u,v) \,.\, s = a^\frown u \,.\, t = x^\frown v)]\}.$

Ceci se voit comme suit. (3) dit qu'il y a une séquence w telle que

(4) $w(y,z),$

(5) $(s)(t)\{w(s,t) \supset: s = a \,.\, t = x \,.\!\vee\ (\exists u)(\exists v)\ [w(u,v) \,.\, s = a^\frown u \,.\, t = x^\frown y]\}.$

Par (4) et (5),

(6) $y = a \,.\, z = x \,.\!\vee\ (\exists u)(\exists v)\ [w(u,v) \,.\, y = a^\frown u \,.\, z = x^\frown v].$

Or, si la suite y est un atome, et donc sans concaténation, la seconde possibilité de l'alternative (6) doit échouer ; et alors la première alternative de (6) nous dit que y est a et z est x. Si, en revanche, y est plus long qu'un atome, alors la seconde alternative de (6) nous dit que y et z commencent respectivement par a et x, et aussi que les restes y' et z' de y et z sont tels que

(7) $w(y', z').$

Par (7) et (5),

(8) $y' = a \,.\, z' = x \,.\!\vee\ (\exists u)(\exists v)\ [w(u,v) \,.\, y' = a^\frown u \,.\, z' = x^\frown v].$

En continuant ainsi, par autant d'étapes qu'il y a de places dans la séquence originale y, nous voyons finalement que y doit être entièrement constitué de a et que z doit être constitué d'une concaténation d'un même nombre de x ; en bref, y est un entier positif et

(9) $z = x \times y.$

On va maintenant montrer, à l'inverse, que pour tous les entiers x et y, (9) implique (3). Considérons la liste de paires suivante :

$$\begin{array}{ll} a & x \\ a^\frown a & x^\frown x \\ a^\frown a^\frown a & x^\frown x^\frown x \\ \vdots & \vdots \\ y & x \times y \end{array}$$

(Nous savons, d'après le sens voulu de "$x \times y$", que la séquence atteinte dans la colonne de droite en face de y sera en fait $x \times y$.) Or, le principe énoncé à la fin de § 2 nous assure qu'il existe une séquence w telle que, pour toutes séquences s et t, "$w(s,t)$" est vraie si et seulement si s et t sont appariés dans la liste ci-dessus. De l'inspection de la liste, il est donc évident que (5) est vraie, et aussi que

(10) $\qquad w(y, x \times y).$

De (10) et (9) on obtient (4), et de (5) et (4) on obtient (3).

Le produit $x \times y$ est donc définissable comme la seule et unique suite z vérifiant (3).

D4.
$$\begin{aligned} x \times y =_{df} (\imath z)(\exists w)\{w(y,z) \mathbin{.} (s)(t)\ [w(s,t) \supset: s = a \mathbin{.} t \\ = x \mathbin{.}\!\vee (\exists u)(\exists v)(w(u,v) \mathbin{.} s = a^\frown u \mathbin{.} t = x^\frown v)]\}. \end{aligned}$$

La puissance x^y peut être définie de manière assez analogue. La seule différence est que, tandis que le produit $x \times y$ était une concaténation continue $x^\frown x^\frown \ldots {}^\frown x$ avec y occurrences de x, la puissance x^y est un produit continu $x \times x \times \ldots \times x$ avec y occurrences de x. La définition de x^y diffère donc de **D4** uniquement par l'utilisation de "$x \times v$" au lieu de "$x^\frown v$" à la fin.

D5.
$$\begin{aligned} x^y =_{df} (\imath z)(\exists w)\{w(y,z) \mathbin{.} (s)(t)\ [w(s,t) \supset: s = a \mathbin{.} t \\ = x \mathbin{.}\!\vee (\exists u)(\exists v)(w(u,v) \mathbin{.} s = a^\frown u \mathbin{.} t = x \times v)]\}. \end{aligned}$$

Les définitions **D4** et **D5** ne présentent bien sûr d'intérêt que lorsque les suites x et y sont des entiers positifs ; ce qu'elles engendrent dans les autres cas ne nous concerne pas. On peut toutefois remarquer en passant que, lorsque x n'est pas un entier mais que y l'est, $x \times y$ reste la suite $x^\frown x^\frown \ldots {}^\frown x$ à y occurrences de x.

4. Construction bilatérale. Considérons maintenant une méthode alternative d'identifier les entiers positifs avec les séquences ; cette fois, utilisons une méthode bilatérale, i.e., une méthode qui utilise toutes les séquences.

Jusqu'à maintenant, nous avons été capables de laisser le nombre d'atomes non précisé, nécessitant seulement qu'il y en ait au moins deux. Pour la construction bilatérale, pourtant, on a besoin de connaître le nombre d'atomes. Tout nombre spécifique fini pourra être utilisé, à partir du moment où c'est un nombre supérieur à deux. La construction commencera par être expliquée pour le cas où il y a exactement deux atomes, a et b. Puis, nous verrons comment adapter la méthode à n'importe quel nombre fini plus grand d'atomes.

L'identification bilatérale des entiers positifs avec les séquences finies d'atomes a et b peut être réalisée en arrangeant les séquences *lexicographiquement* ; i.e., selon l'ordre croissant de leur nombre de lettres et alphabétiquement dans chaque ensemble de mots de même longueur :

$$\text{(11)} \qquad \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \ldots \\ a & b & a^\frown a & a^\frown b & b^\frown a & b^\frown b & a^\frown a^\frown a & a^\frown a^\frown b & a^\frown b^\frown a & a^\frown b^\frown b & b^\frown a^\frown a & \ldots \end{array}$$

De cette façon, non seulement les entiers reçoivent-ils une interprétation en tant que séquences, mais également, inversement, les séquences finies de a et b reçoivent une interprétation comme entiers positifs, et la concaténation devient ainsi une opération arithmétique sur les entiers positifs. En fait, la concaténation devient exprimable dans l'arithmétique élémentaire de la façon suivante :

$$x^\frown y = y + \ [x \times (\imath z)(\exists w)(z = 2^w \mathbin{.} z \leq y + 1 < z + z)].$$

Cette identité sera laissée sans fondement [7] ; notre objectif avoué va dans la direction opposée, par exemple, trouver des moyens de définir $x + y, x \times y$ et x^y, conformément à (11), dans le cadre de la théorie de la concaténation. Notre travail consiste à montrer que la nouvelle opération arithmétique de concaténation permet de définir les opérations plus familières de somme, de produit et de puissance.

Bien que les suites composées uniquement d'occurrences de a n'épuisent plus les entiers positifs comme c'était le cas dans le § 3, elles continueront de jouer un rôle important sous l'ancien nom de *décomptes*. Les définitions **D1-3** seront conservées. **D4** et **D5**, qui ne sont plus disponibles comme définitions des produits et puissances d'entiers positifs, resteront utiles à titre auxiliaire pour définir ce que l'on pourrait appeler les produits de décomptes et les élévations à la puissance de décomptes ; elles sont donc reproduites ici avec des désignations auxquelles on a ajouté des apostrophes et des notations modifiées :

D4'. $$\begin{aligned} x \times_r y =_{df} (\imath z)(\exists w)\{w(y,z) \mathbin{.} (s)(t)\ [w(s,t) \supset\!: s = a \mathbin{.} t \\ = x \mathbin{.}\!\vee (\exists u)(\exists v)(w(u,v) \mathbin{.} s = a^\frown u \mathbin{.} t = x^\frown v)]\}. \end{aligned}$$

D5'. $$\begin{aligned} x \bigwedge\nolimits_r y =_{df} (\imath z)(\exists w)\{w(y,z) \mathbin{.} (s)(t)\ [w(s,t) \supset\!: s = a \mathbin{.} t \\ = x \mathbin{.}\!\vee (\exists u)(\exists v)(w(u,v) \mathbin{.} s = a^\frown u \mathbin{.} t = x \times_r v)]\}. \end{aligned}$$

Un décompte de n occurrences de a sera appelé *décompte de n*. Selon tout entier positif (selon toute séquence quelle qu'elle soit, selon la méthode du paragraphe précédent), le décompte de x sera noté τx. Il est définissable en théorie de la concaténation à la lumière des considérations suivantes.

Ci-dessous, sont listées les entiers successifs de 1 à x, en regard de leur décompte.

7. Le raisonnement derrière cette identité est évident à partir de *On derivability*, dans le présent Journal, Vol. 2 (1937), p. 115, où l'identification présente des entiers aux séquences est reformulée pour montrer sa relation au système dual de numération.

$$
\begin{array}{ll}
a & a \\
b & a^\frown a \\
a^\frown a & a^\frown a^\frown a \\
a^\frown b & a^\frown a^\frown a^\frown a \\
b^\frown a & a^\frown a^\frown a^\frown a^\frown a \\
b^\frown b & a^\frown a^\frown a^\frown a^\frown a^\frown a \\
a^\frown a^\frown a & a^\frown a^\frown a^\frown a^\frown a^\frown a^\frown a \\
a^\frown a^\frown b & a^\frown a^\frown a^\frown a^\frown a^\frown a^\frown a^\frown a \\
\vdots & \vdots \\
x & \tau x
\end{array}
$$

Une méthode pour générer la colonne sur la gauche, comprenant les entiers dans l'ordre habituel 1, 2, 3, est décrite par les règles suivantes :

(i) commencer avec a et b ;

(ii) si u apparaît dans la colonne, mettre $u^\frown a$ à une position de plus que deux fois la longueur de la colonne jusque là, et mettre $u^\frown b$ juste après (i.e., $u^\frown a = 2u+1$ et $u^\frown b = 2u+2$). Au vu de (ii), et de la nature de la colonne de droite (les décomptes), il est évident que, v vient en face de u (de telle façon que $v = \tau u$) ; en face de $u^\frown a$, on trouve $v^\frown v^\frown a$; et en face de $u^\frown b$, on trouve $v^\frown v^\frown a^\frown a$.

Au vu de ces considérations, on peut montrer que la définition :

D6.
$$
\begin{aligned}
\tau x =_{df} (\imath y)(\exists w)\{w(x,y) \,.\, (s)(t)\,[w(s,t) \supset: s = a \,.\, t = a \,.\vee.\, s = {} \\
= b \,.\, t = a^\frown a \,.\vee\, (\exists u)(\exists v)(w(u,v) : s = {} \\
= u^\frown a \,.\, t = v^\frown v^\frown a \,.\vee.\, s = u^\frown b \,.\, t = v^\frown v^\frown a^\frown a)]\}
\end{aligned}
$$

définit le décompte de x dans le sens souhaité. Le raisonnement qui montre que la condition suivant "$(\imath y)$" dans **D6** implique que y est τx au sens souhaité, et vice versa, est parallèle au raisonnement qui a montré dans le § 3 que (3) implique (9) et vice versa.

Maintenant les définitions de $x + y, x \times y$ et x^y sont immédiates. On peut définir $x + y$ comme l'entier qui est la concaténation des décomptes de x et y ; on peut définir $x \times y$ comme l'entier dont le décompte est le produit des décomptes (comme défini en **D4'**) des décomptes de x et y ; et on peut définir x^y de manière analogue.

D7. $x + y =_{df} (\imath z)(\tau z = \tau x^\frown \tau y)$.

D8. $x \times y =_{df} (\imath z)(\tau z = \tau x \times_\tau \tau)$.

D9. $x^y =_{df} (\imath z)(\tau z = \tau x \wedge_\tau \tau)$.

Les méthodes de construction qui viennent d'être expliquées pour le cas de deux atomes a et b vont maintenant être adaptées au cas général de k atomes $a_1, a_2, \ldots a_k$. On doit penser à k comme à un certain nombre précis, fini et supérieur à 1.

L'identification bilatérale entre les entiers positifs et les séquences finies d'atomes $a_1, a_2, \ldots, a_k$ peut toujours être réalisée par le vieil expédient consistant à réordonner les séquences selon l'ordre croissant de leur longueur et à longueur égale, selon l'ordre alphabétique :

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 & k+2 & \ldots & 2k & 2k+1 & \ldots & k^2+k & k^2+k+1 & \ldots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k & a_1{}^\frown a_1 & a_1{}^\frown a_2 & \ldots & a_1{}^\frown a_k & a_2{}^\frown a_1 & \ldots & a_k{}^\frown a_k & a_1{}^\frown a_1{}^\frown a_1 & \ldots \end{array}$$

La généralisation nécessite de généraliser les observations (i) et (ii) ci-dessous aux formulations suivantes :

(i) commencer par a_1, a_2, …, et a_k ;

(ii) si u apparaît dans la colonne, mettre $u{}^\frown a_1$ une position après k fois la longueur de la colonne et ensuite mettre $u{}^\frown a_2$, et etc. jusqu'à $u{}^\frown a_k$.

Là-dessus, **D6** doit être généralisée de la façon correspondante. La notation auxiliaire suivante sera utilisée :

$$(x)_2 =_{df} x{}^\frown x, \qquad (x)_3 =_{df} x{}^\frown x{}^\frown x, \qquad \text{etc.}$$

La version généralisée de **D6** devient alors :

$$\begin{aligned} \tau x =_{df} (\iota y)(\exists w)\{w(x,y)\textbf{.}(s)(t)\ [w(s,t)\supset{:}s = a_1.t = a_1\textbf{.} \vee \textbf{.}s = a_2.t = (a_1)_2\textbf{.} \vee \textbf{....} \vee \textbf{.}s = a_k \textbf{ . } t \\ = (a_1)_k\textbf{.}\vee(\exists u)(\exists v)(w(u,v) \textbf{ : } s = u{}^\frown a_1 \textbf{ . } t = (v)_k{}^\frown a_1\textbf{.} \vee \textbf{.}s = ua_2 \textbf{ . } t \\ = (v)_k{}^\frown(a_1)_2\textbf{.} \vee \textbf{..} \vee \textbf{.}s = u{}^\frown a_k \textbf{ . } t = (v)_k{}^\frown(a_1)_k)]\}. \end{aligned}$$

Les définitions **D7-9** se transportent au cas général sans modification.

5. Les entiers naturels. On a vu au § 3 comment l'arithmétique élémentaire des entiers positifs peut être construite de manière unilatérale dans n'importe quelle théorie élémentaire de la concaténation qui fournit au moins deux atomes. On a alors vu dans le § 4 comment la même arithmétique pouvait être construite de façon bilatérale dans n'importe quelle théorie élémentaire de la concaténation qui fournit un nombre explicite fini d'atomes, au moins deux.

Ce qui a alors été démontré pour l'arithmétique élémentaire des entiers positifs pourrait également être démontré pour l'arithmétique élémentaire des *entiers naturels* (i.e., les entiers positifs et 0). Cela découle du fait que l'arithmétique élémentaire des entiers naturels peut être construite à son tour, et en effet d'une façon bilatérale, dans l'arithmétique élémentaire des entiers positifs. Une méthode pour réaliser cette construction qui vient d'être mentionnée va maintenant être présentée.

Les entiers naturels, que j'appellerai $0_n, 1_n, 2_n$, etc., peuvent être arbitrairement identifiés aux entiers positifs (que je continuerai d'appeler 1, 2, 3, etc.) ainsi :

$$\begin{array}{cccc} 0_n & 1_n & 2_n & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots \end{array}$$

J'appellerai 1_n le correspondant *nominal* de 1, et 2_n celui de 2, et etc. en faisant allusion ainsi à la ressemblance des noms ; mais la correspondance nominale ne doit pas être confondue avec la correspondance *réelle* (*l'identité*) qui, selon notre construction, est plutôt vérifiée entre 0_n et 1, entre 1_n et 2, etc. En général, le correspondant nominal d'un entier k est $k+1$; 2_n , par exemple, est égal à 3.

Maintenant, voyons comment définir l'addition "$+_n$" de l'arithmétique des entiers naturels, en fonction de l'arithmétique de l'addition "+" de l'arithmétique des entiers positifs. Lorsque x' et y' sont les correspondants nominaux de x et y, on souhaitera que $x' +_n y'$ soit le correspondant nominal de $x + y$ (par exemple, on souhaite que $5_n +_n 6_n$ soit 11_n). Par conséquent, puisque le correspondant nominal de n'importe quel entier k est $k + 1$, on souhaite que soit vérifiée l'égalité :

(12) $\qquad (x + 1) +_n (y + 1) = x + y + 1$

De façon similaire, lorsque "$x \times_n y$" représente le produit de l'arithmétique habituelle et "$x \wedge_n y$" l'élévation à la puissance, on souhaite que soient vérifiées les identités :

(13) $\qquad (x + 1) \times_n (y + 1) = (x \times y) + 1;$

(14) $\qquad (x + 1) \wedge_n (y + 1) = x^y + 1,$

où "$x \times y$" et "x^y" représentent le produit et l'élévation à la puissance comme en arithmétique positive.

Les desiderata (12)-(14) ne sont pas suffisants pour déterminer notre choix des définitions générales de "$+_n$", "$\times_n$" et "$\wedge_n$" parce qu'ils décrivent ces opérations seulement en application à des nombres de la forme "$x + 1$" et "$y + 1$" et il y a un nombre, notamment 1 ($= 0_n$) qui ne peut être mis sous cette forme. On doit donc remplacer (12)-(14) par des stipulations de ce que l'on souhaite lorsque l'un des deux opérandes ou les deux sont égaux à 0_n :

(15) $\qquad 0_n +_n z = z,$

(16) $\qquad z +_n 0_n = z,$

(17) $\qquad 0_n \times_n z = 0_n = 1,$

(18) $\qquad z \times_n 0_n = 0_n = 1,$

(19) $\qquad 0_n \wedge_n (y + 1) = 0_n = 1,$

(20) $\qquad z^n \wedge_n 0_n = 1_n = 2.$

La vérification du fait que les définitions suivantes satisfont les contraintes est laissée au lecteur.

$x +_n y =_{df} (\iota z)(x + y = z + 1),$
$x \times_n y =_{df} (\iota z)\ [x + y + z = (x \times y) + 2],$
$x \wedge_n y =_{df} (\iota z)\ [y = 1 . z = 2 \,.\vee.\, y \neq 1 . x = z = 1 \,.\vee.\, (\exists w)(x = w + 1 . z \times w = w^y + w)]$

HARVARD UNIVERSITY