Annales de mathématiques discrètes 9 (1980) 1-5

Centres des 2-arbres

Andrzej Proskurowski

Le centre d'un graphe G est défini comme le sous-graphe de G induit par l'ensemble des sommets ayant des excentricités minimales (c'est-à-dire la valeur minimale de la distance aux sommets les plus éloignés de G). Il a été démontré que seul un nombre fini de graphes peuvent être des centres de graphes planaires extérieurs maximaux (mops). Nous généralisons ce résultat à la classe des 2-arbres [1] qui contient des mops.

1. Introduction

Dans un graphe G, la distance $d(u, v)$ entre les sommets u et v de G est définie comme la longueur du plus court chemin reliant u à v (c'est-à-dire le nombre d'arêtes dans le chemin). L'excentricité $e(v)$ d'un sommet u dans le graphe G est la plus grande distance de v à n'importe quel sommet de G. L'excentricité minimale des sommets de G est appelée le rayon $r(G)$. Le centre $C(G)$ d'un graphe G est le sous-graphe de G induit par l'ensemble des sommets ayant les plus petites excentricités.

Dans [3], nous avons étudié les formes possibles des centres pour une classe de graphes appelés graphes planaires extérieurs maximaux (mops).

Définition 1.1. Un graphe est un mop si et seulement s'il est isomorphe à une triangularisation d'un polygone.

Tous les mops peuvent être construits selon la règle récursive suivante (voir, par exemple, [2]).

Fait 1.2. Le “triangle” est le seul mop à trois sommets. Un mop à n sommets peut être obtenu à partir d'un mop M à $n-1$ sommets ($n > 3$) en ajoutant un nouveau sommet adjacent à deux sommets consécutifs sur le cycle hamiltonien de M.

Le résultat principal de [3] découle de deux faits : (i) que tous les centres de mops sont non séparables, et (ii) qu'il existe des sous-graphes interdits pour les centres de mops.

Lemme 1.3 (voir [3]). *Le centre d'un mop est non séparable.*

Lemme 1.4 (voir [3]). *Aucun des graphes de la figure 1 ne peut être un sous-graphe du centre d'un mop.*

Département d'informatique et de sciences de l'information, Université de l'Oregon, Eugene, OR 97403, États-Unis.

Traduction et transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, avril 2026.

1. *Note de la traductrice : Un 2-arbre ne doit pas être confondu avec un arbre binaire (dans lequel tout nœud a au plus 2 descendants).*

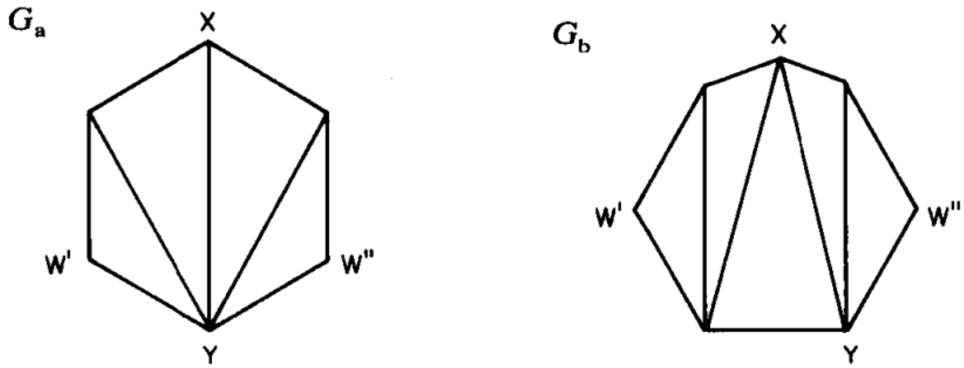

Fig. 1. Sous-graphes interdits des centres de mops.

Théorème 1.5 (voir [3]). *Le centre de tout mop est isomorphe à l'un des sept graphes de la Fig. 2.*

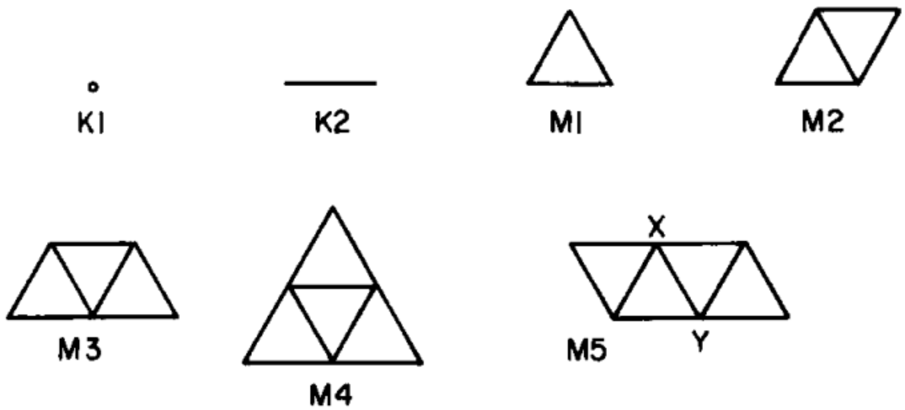

Fig. 2. Les seuls centres de mops possibles.

2. Centres des 2-arbres

Nous allons généraliser le résultat ci-dessus pour les 2-arbres. Nous définissons cette classe de graphes en donnant un processus de construction récursif analogue à celui du fait 1.2 pour les mops.

Définition 2.1. Un 2-arbre est un graphe qui peut être obtenu par le processus de construction récursif suivant :

(i) Le triangle est le seul 2-arbre à 3 sommets.

(ii) Étant donné un 2-arbre T à n sommets ($n \geq 3$), ajoutez un sommet adjacent à deux sommets adjacents quelconques de T.

La principale différence entre les mops et les 2-arbres généraux est que deux sommets adjacents d'un 2-arbre peuvent avoir plus de deux voisins communs. Il découle de la règle de construction récursive que les 2-arbres préservent la propriété des mops selon laquelle, pour deux sommets non adjacents u et v, il existe deux sommets adjacents dont la suppression sépare u et v.

Lemme 2.2. *Pour deux sommets non adjacents u et v d'un 2-arbre T, il existe une arête (x, y) telle que x et y soient adjacents à u et que tout chemin de u à v contienne x ou y.*

Démonstration. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que, dans une construction récursive de T, le sommet u a été ajouté conformément à la définition 2.1, règle (ii), à une arête (x, y) d'un 2-arbre T' contenant déjà le sommet v. Selon cette règle, aucun nouveau sommet ne peut être ajouté à $T' \cup \{u\}$ adjacent à la fois à u (ou à l'un des descendants de u dans cette construction) et à un sommet de $T - \{x, y\}$. Ainsi, la suppression de (x, y) sépare u de v.

L'utilisation inductive du lemme 2.2 nous donne un énoncé concernant l'ensemble des arêtes séparant deux sommets non adjacents d'un 2-arbre.

Lemme 2.3. Pour deux sommets non adjacents u et v d'un 2-arbre T, il existe deux chemins disjoints reliant u et v et composés uniquement de sommets des arêtes les séparant.

Démonstration. Il suffit de prouver l'existence de deux chemins disjoints reliant u aux extrémités d'une arête (s, t) séparant u de v. Les sommets de ces chemins appartiennent à la même composante connexe C de $T - \{s, t\}$ que u et sont associés à des arêtes séparant u et v. Des chemins similaires reliant u à s et t complètent les chemins postulés reliant u à v. Nous allons démontrer l'existence de deux sommets x et y dans $C \cup \{s, t\}$ satisfaisant les conditions du lemme 2.2 et possédant la propriété suivante : il existe deux chemins disjoints $x - s$ et $y - t$, éventuellement réduits à un seul sommet, constitués des extrémités de l'arête séparant u et v. La démonstration se fait par récurrence sur le nombre k d'applications de la règle (ii) de la définition 2.1, nécessaires pour ajouter le sommet u dans une construction récursive de T à partir d'un 2-arbre contenant déjà les sommets v, s et t. Si $k \geq 1$, alors $x - s$ et $y - t$. Si $k - 1$, supposons que la $(k-1)^{\text{ieme}}$ application de la règle (ii) ait impliqué l'ajout d'un sommet u', adjacent à une arête (x', y') possédant la propriété postulée. Ainsi, u est adjacent à u' et à un sommet $z \in x', y'\}$, qui le sépare de v. En prenant sans perte de généralité $z = y'$, nous constatons que les chemins $u' - x' - s$ et $y' - t$ sont disjoints par sommet et donc $x = u'$ et $y = y'$ sont les sommets postulés. Les arêtes (u, x) et (u, y) prolongent les chemins ci-dessus en deux chemins disjoints par sommet de u à s et t.

Les lemmes ci-dessus nous permettent d'énoncer des propriétés des centres des 2-arbres analogues à celles des centres des nœuds.

Lemme 2.4. Le centre d'un 2-arbre est non séparable.

Démonstration. Nous allons montrer que pour deux sommets non adjacents du centre d'un 2-arbre T, les sommets d'extrémité d'une arête les séparant appartiennent également au centre. D'après le lemme 2.3, cela prouvera la non-séparabilité du centre d'un 2-arbre. Supposons que u et v appartiennent au centre d'un 2-arbre T, tandis qu'un sommet x, d'une arête les séparant (x, y), n'y appartient pas. Cela implique qu'il existe un sommet z tel que $d(x, z) > r(G)$. Si, après la suppression de (x, y), z n'appartient pas à la même composante connexe que v, alors

$$e(v) \geq d(z, v) \geq 1 + \min(d(y, z), d(x, z)) \geq \max(d(y, z), d(x, z)) \geq d(x, z).$$

Ceci contredit notre hypothèse selon laquelle v est dans le centre. De même, si z et v appartiennent à la même composante connexe de $T - \{x, y\}$, alors $e(u) > r(T)$.

Lemme 2.5. *Le centre d'un 2-arbre est soit K_1, soit K_2, soit un 2-arbre.*

Démonstration. D'après [1, Théorème 1.1], un graphe est un 2-arbre s'il (i) est connexe, (ii) possède une arête mais pas de K_4, (iii) possède des arêtes pour tous les sous-graphes séparateurs minimaux. Un sous-graphe induit non séparable S d'un 2-arbre T satisfait clairement (i) et (ii), et ne possède aucun sommet séparateur. S'il existait deux sommets non adjacents séparant S, alors S, et donc T aussi, auraient un cycle induit de longueur supérieure à 3, interdit pour les 2-arbres. Un ensemble séparateur de plus de deux sommets implique l'existence de plus de deux chemins disjoints entre deux sommets de T, ce qui contredit [1, Théorème 3.5]. Ainsi, (iii) est satisfait par S, et S est un 2-arbre.

La propriété de séparation exprimée par le Lemme 2.2 permet une généralisation du Lemme 1.4.

Lemme 2.6. Aucun des graphes de la Fig. 1 ne peut être un sous-graphe du centre d'un 2-arbre.

Démonstration. Supposons qu'un graphe G (G_a, ou G_b, de la Fig. 1) soit un sous-graphe induit du centre d'un 2-arbre T. Clairement, l'arête (x, y) sépare w' de w'' dans T. Supposons qu'un sommet z tel que $d(y, z) = r(T)$ ne soit pas dans la même composante connexe de $T - \{x, y\}$ que $w, w \in \{w', w'''\}$. Alors $e(w) \geq d(w, z) > d(y, z) = r(T)$, ce qui contredit l'hypothèse que w est dans le centre de T.

Nous allons maintenant décrire tous les 2-arbres qui n'ont pas de graphes du Lemme 2.6 comme sous-graphes. Pour faciliter la description, nous utiliserons la notion suivante d'un ensemble de sommets communément adjacents aux extrémités d'une arête.

Définition 2.7. Pour une arête donnée (x, y) d'un 2-arbre T, on définit une 2-étoile comme l'ensemble de tous les sommets de degré 2 de T adjacents à la fois à x et à y.

Une représentation schématique d'une famille de 2-arbres paramétrée par la taille d'une 2-étoile est donnée dans la figure 3.

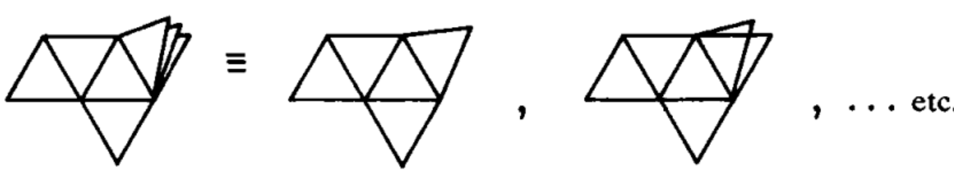

FIGURE 3. Une famille de 2-arbres

Considérons les sous-graphes planaires externes d'une telle famille. On observe aisément que presque tous les 2-arbres de la famille ont le même ensemble de sous-graphes mop, car les 2-étoiles de tailles croissantes n'introduisent aucun nouveau sous-graphe planaire externe (la seule exception étant les 2-arbres à 3 et 4 sommets qui appartiennent à la même famille). Par conséquent, tout graphe pouvant être le centre d'un mop peut donner naissance à des familles de 2-arbres qui évitent également les sous-graphes interdits du lemme 2.6. Ces familles sont obtenues en substituant des 2-étoiles à tous les sommets de degré 2 des mops. Un seul des mops de la figure 2 possède une arête interne (n'appartenant pas au cycle hamiltonien) dont les sommets d'extrémité ne sont pas adjacents à un sommet de degré 2 (à savoir (x, y) de $M5$). L'ajout d'une 2-étoile à cette arête n'introduit aucun des sous-graphes interdits Par inspection, nous constatons que l'ajout de sommets adjacents aux 2-étoiles introduites aboutit soit à un 2-arbre d'une autre famille de ce groupe, soit à un sous-graphe interdit du lemme 2.6. Ceci implique notre théorème principal.

Théorème 2.8. *Le centre de tout 2-arbre est isomorphe à un membre des familles de 2-arbres de la figure 4.*

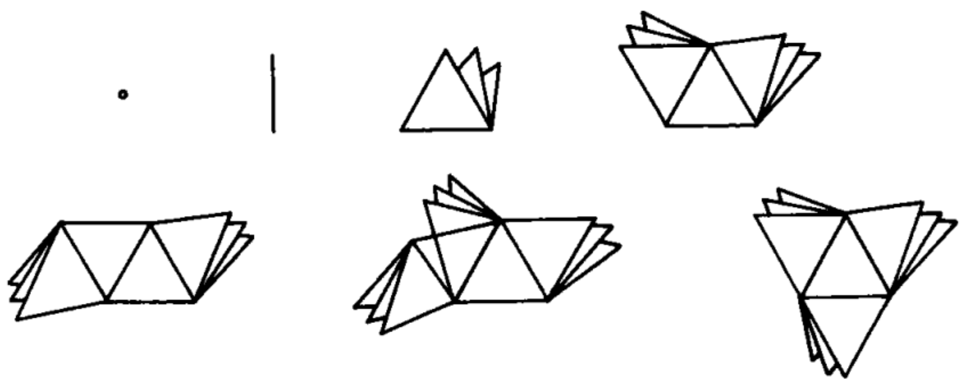

FIGURE 4. Familles de centres de 2-arbres.

3. Résumé

Nous avons donné une caractérisation simple des graphes qui peuvent être des centres de 2-arbres. Ces graphes appartiennent à des familles de 2-arbres obtenues par paramétrisation des centres admissibles des graphes planaires extérieurs maximaux. Nous avons prouvé nos résultats en utilisant le fait que les 2-arbres sont séparables en composantes bi-connexes par suppression de toute arête interne. Ceci implique l'existence de quelques configurations interdites au centre de tout 2-arbre.

Références

[1] D.J. Rose, Sur des caractérisations simples des k-arbres, Discrete Math. 7 (1974) 317-322.

[2] A. Proskurowski, Cycles dominants minimaux dans les 2-arbres, Int. J. Comput. Information Sci. 8 (5) (1979) 405-417.

[3] A. Proskurowski, Centres des graphes planaires externes maximaux, J. Graph Theory 4 (2) (1980) 75-79.