Sur l'écriture figurée

G. Pólya, Université de Stanford

16 Mars 1956 *

Pour écrire "soleil", "lune" et "arbre" en écriture figurée (idéogrammes), on dessine simplement un cercle, un croissant et une image simplifiée et conventionnelle d'un arbre, respectivement. L'écriture figurée était utilisée par certaines tribus d'Indiens d'Amérique et il se pourrait bien que des systèmes d'écriture plus avancés aient évolué partout à partir de ce système primitif. Ainsi, l'écriture figurée pourrait être la source ultime des alphabets grec, latin et gothique, dont nous utilisons actuellement les lettres comme symboles mathématiques. Je souhaite faire observer que l'écriture figurée primitive peut également être de quelque utilité en mathématiques. Dans ce qui suit, je souhaite montrer comment la méthode des fonctions génératrices, importante en Analyse Combinatoire, peut évoluer de manière tout à fait intuitive à partir de "séries figurées" dont les termes sont des images (ou, plus précisément, des variables représentées par des images).

L'écriture figurée est facile à utiliser sur le papier ou sur un tableau noir, mais elle est maladroite et coûteuse à imprimer. Bien que j'aie présenté plusieurs fois le contenu des pages suivantes oralement [1], j'ai hésité à les faire imprimer.

J'essaierai d'expliquer l'idée générale en discutant trois exemples particuliers dont le premier, bien que le plus simple, sera traité de manière très large.

1.1. De combien de manières pouvez-vous rendre la monnaie d'un dollar ?

Généralisons la question proposée. Soit P_n le nombre de manières de payer un montant de n cents avec cinq types de pièces : les pièces de 1 cent (cents), de 5 cents (nickels), de 10 cents (dimes), de 25 cents (quarters) et de 50 cents (half-dollars). La "manière de payer" est déterminée si, et seulement si, on sait combien de pièces de chaque sorte sont utilisées. Ainsi, $P_4 = 1$, $P_5 = 2$, $P_{10} = 4$. Il convient de poser $P_0 = 1$. Le problème énoncé au départ nous demande de calculer P_{100}. Plus généralement, nous souhaitons comprendre la nature de P_n et éventuellement concevoir une procédure pour calculer P_n.

Il peut être utile de visualiser les différentes possibilités. Nous pouvons n'utiliser aucun cent, ou juste 1 cent, ou 2 cents, ou 3 cents, ou .... Ces alternatives sont représentées schématiquement dans la première ligne de la Figure 1 [2] ; "aucun cent" est représenté par un carré qui peut nous rappeler un bureau vide. La deuxième ligne illustre les alternatives : n'utiliser aucun nickel, 1 nickel, 2 nickels, ... Les trois lignes suivantes représentent de la même manière les possibilités concernant les dimes, quarters et half-dollars. Nous devons choisir une image de la première ligne, puis une image de la deuxième ligne, et ainsi de suite, en choisissant exactement une image de chaque ligne ; en combinant (en juxtaposant) les cinq images ainsi sélectionnées, nous obtenons une manière de payer. Ainsi, la Figure 1 expose directement les alternatives concernant chaque type de pièce et, indirectement, toutes les manières de payer qui nous intéressent.

---

*Adresse présentée à la réunion de l'Association à Athens, Géorgie, le 16 mars 1956. Un grand merci à l'éditeur du *Monthly* qui m'a encouragé à publier cet article.

1. Je l'ai utilisé, cependant, dans la recherche. Voir **2**, en particulier p. 156, où les "séries figurées" sont introduites sous une forme étroitement liée, mais quelque peu différente. (Les chiffres en caractères gras indiquent les références à la fin de l'article).

2. Une photo de vraies pièces serait plus efficace ici mais trop lourde dans les figures suivantes.

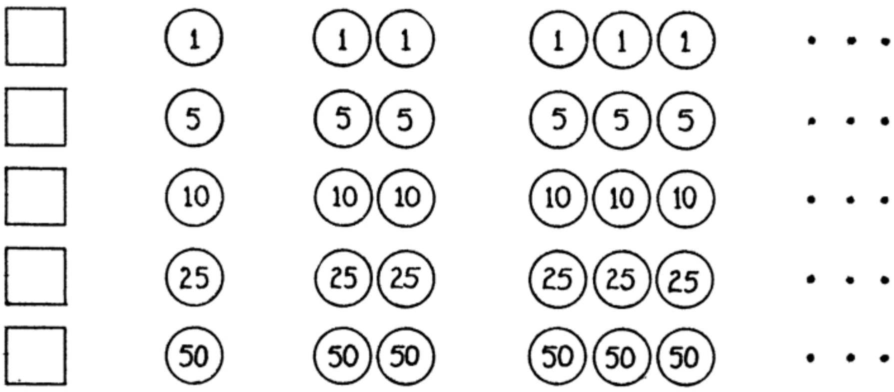

Fig. 1. A complete survey of alternatives.

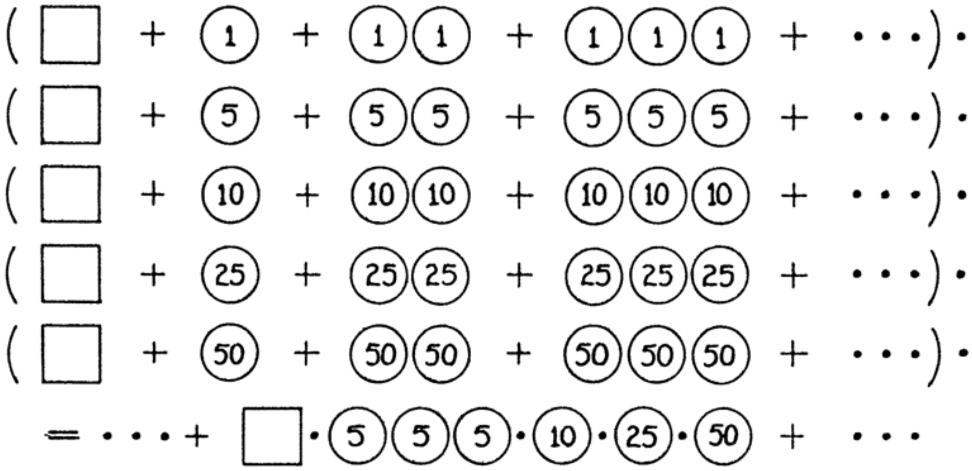

Fig. 2. Genesis of the figurate series.

La principale découverte consiste à observer que, en fait, nous combinons les images de la Figure 1 selon certaines règles d'algèbre : si nous concevons chaque ligne de la Figure 1 comme la *somme* des images qu'elle contient et que nous considérons le *produit* de ces couplages (infinis), en bref, si nous passons de la Figure 1 à la Figure 2, et que nous développons le produit, les termes de ce développement représenteront les différentes manières de payer qui nous intéressent. Le terme unique du produit présenté dans la dernière ligne de la Figure 2 comme exemple représente une manière de payer un dollar (en posant aucun cent, trois nickels, un dime, un quarter et un half-dollar). La somme de tous ces termes est une série infinie d'images ; chaque image présente une manière de payer, différents termes représentent différentes manières de payer, et toute la série d'images, judicieusement appelée la *série figurée*, affiche toutes les manières de payer que nous devons prendre en considération lorsque nous souhaitons calculer les nombres P_n.

1.2. Pourtant, cette façon de concevoir la Figure 2 soulève diverses difficultés.

D'abord, il y a une difficulté théorique : en quel sens pouvons-nous additionner et multiplier des images ? Ensuite, il y a une difficulté pratique : comment pouvons-nous extraire commodément de l'ensemble de la série figurée les termes comptés par P_n, c'est-à-dire les cas dans lesquels la somme payée s'élève à exactement n cents ?

Nous évitons la difficulté théorique si nous employons les images, ces symboles d'une écriture primitive, comme nous avons l'habitude d'employer les lettres d'alphabets plus civilisés : nous considérons chaque image comme le symbole d'une variable ou d'une *indéterminée*[3].

3. Dans une présentation formelle, il peut être conseillé de restreindre le terme "image" pour désigner un sym-

Pour surmonter l'autre difficulté, nous avons besoin d'une idée essentielle supplémentaire : nous substituons à chaque variable "imagée" (c'est-à-dire, variable représentée par une image) une puissance d'une nouvelle variable x, dont l'*exposant* est la *valeur combinée des pièces* représentées par l'image, comme cela est montré en détail par la Figure 3. La troisième ligne de la Figure 3 montre une coïncidence heureuse : nous avons conçu les trois nickels juxtaposés comme *une seule image*, comme le symbole d'une variable (correspondant à l'utilisation de précisément trois nickels). Pour cette variable, nous devons substituer x^{15} selon notre règle générale ; pourtant, même si nous substituons pour chacune des pièces juxtaposées la puissance correcte de x et considérons le produit de ces puissances juxtaposées, nous arrivons au même résultat final x^{15}.

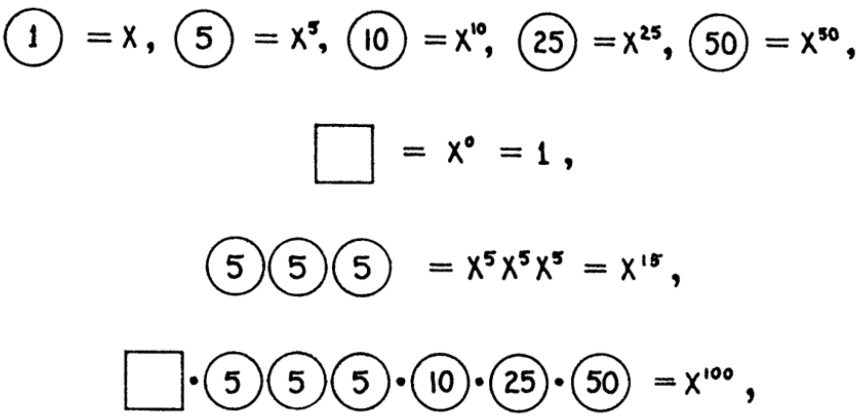

FIG. 3. Powers of one variable substituted for variables represented by pictures.

La dernière ligne de la Figure 3 est très importante. Elle montre par un exemple (voir la dernière ligne de la Fig. 2) comment la substitution décrite affecte le terme général de la série figurée. Un tel terme est le produit de 5 images (variables figurées). Pour chaque facteur, une puissance de x est substituée dont l'exposant est la valeur en cents de ce facteur ; l'exposant du produit, obtenu comme une somme de 5 exposants, sera la valeur totale des facteurs. Et ainsi la substitution indiquée par la Figure 3 change chaque terme de la série figurée en une puissance x^n. Comme la série figurée représente chaque manière de payer exactement une fois, l'exposant n apparaît précisément P_n fois de sorte que (après un réarrangement approprié des termes) toute la série figurée se transforme en :

$$P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \cdots + P_n x^n + \dots \tag{1}$$

Dans cette série, le coefficient de x^n énumère les différentes manières de payer le montant de n cents, et ainsi (1) est convenablement appelée la *série énumérative*.

La substitution indiquée par la Figure 3 change la première ligne de la Figure 2 en une série géométrique :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = (1-x)^{-1}. \tag{2}$$

En fait, cette substitution change chacune des cinq premières lignes de la Figure 2 en certaines séries géométriques et l'équation indiquée par la Figure 2 devient :

$$\begin{aligned}(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1}(1-x^{25})^{-1}(1-x^{50})^{-1}\\ = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \cdots + P_n x^n + \dots\end{aligned} \tag{3}$$

bole (visible, écrit ou imprimé) qui tient lieu d'indéterminée ; dans cette introduction présente, plutôt informelle, le mot est maintenant et par la suite utilisé de manière plus lâche. Passons sur deux points un peu délicats : l'infinité des variables et la convergence des séries dans lesquelles elles apparaissent. Les deux sont considérés dans certaines théories avancées et les deux sont momentanés. Ils seront éliminés à l'étape suivante.

Nous avons réussi à exprimer la somme de la série énumérative. Cette somme est habituellement appelée la *fonction génératrice* ; en fait, cette fonction, développée en puissances de x, génère les nombres $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$, dont la signification combinatoire était notre point de départ.

1.3.

Nous avons réduit un problème combinatoire à un problème d'un type différent : développer une fonction donnée de x en puissances de x. En particulier, nous avons réduit notre problème initial concernant la monnaie d'un dollar au problème du calcul du coefficient de x^{100} dans le développement du membre de gauche de (3). Notre objectif principal était de montrer comment l'écriture figurée peut être utilisée pour cette réduction. Laissons pourtant ajouter une brève indication sur le calcul numérique.

Le membre de gauche de (3) est un produit de de cinq facteurs. Le développement bien connu du premier facteur est donné par (2). Nous procédons en adjoignant des facteurs successifs, un à la fois. Supposons, par exemple, que nous ayons déjà obtenu le développement du produit des deux premiers facteurs :

$$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

et nous souhaitons passer de là à trois facteurs :

$$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots.$$

Il s'ensuit que

$$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots)(1-x^{10}) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

En comparant le coefficient de x^n des deux côtés, nous trouvons que :

$$b_n = b_{n-10} + a_n \tag{4}$$

(on pose $b_m = 0$ si $m < 0$). Par (4), nous pouvons commodément calculer les coefficients b_n par récurrence si les a_n sont déjà connus, et la série (3) peut être obtenue à partir de (2) en quatre étapes successives dont chacune est similaire à celle que nous venons de discuter.

Nous ajoutons un tableau qui montre le calcul de P_{50}. Ce tableau présente le coefficient de x^n pour certaines valeurs de n dans cinq développements différents. L'entête de chaque colonne montre la valeur de n, le début de chaque ligne le dernier facteur pris en compte ; la ligne du bas montrerait P_n pour $n = 0, 5, 10, \ldots, 50$ si nous l'avions calculé. Pourtant, le tableau enregistre seulement les étapes nécessaires pour calculer la réponse à notre question initiale et donne $P_{50} = 50$; c'est-à-dire qu'on peut payer 50 cents de s'élever à exactement 50 manières différentes. Nous laissons au lecteur le soin de continuer le calcul et de vérifier que $P_{100} = 292$; il peut également essayer de justifier la procédure de calcul directement sans recourir à la série énumérative [4]. Ci-dessous le tableau de calcul de P_{50} :

$n =$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$(1-x)^{-1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$(1-x^5)^{-1}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$(1-x^{10})^{-1}$	1	2	4	6	9	12	16		25		36
$(1-x^{25})^{-1}$	1					13					49
$(1-x^{50})^{-1}$	1										50

4. Pour la méthode habituelle d'obtention de la fonction génératrice, cf. **1**, Vol. 1, p. 1, Problème 1.

2.1. Disséquer un polygone convexe à n côtés en $n-2$ triangles par $n-3$ diagonales et calculer D_n, le nombre de dissections différentes de cette nature.

L'examen direct des cas particuliers les plus simples aide à comprendre le problème. Nous voyons facilement que $D_4 = 2$, $D_5 = 5$; bien sûr $D_3 = 1$.

La solution est indiquée par les parties (I), (II) et (III) de la Figure 4. Après la large discussion de la solution précédente, il ne devrait pas être difficile de comprendre les indications de la Figure 4.

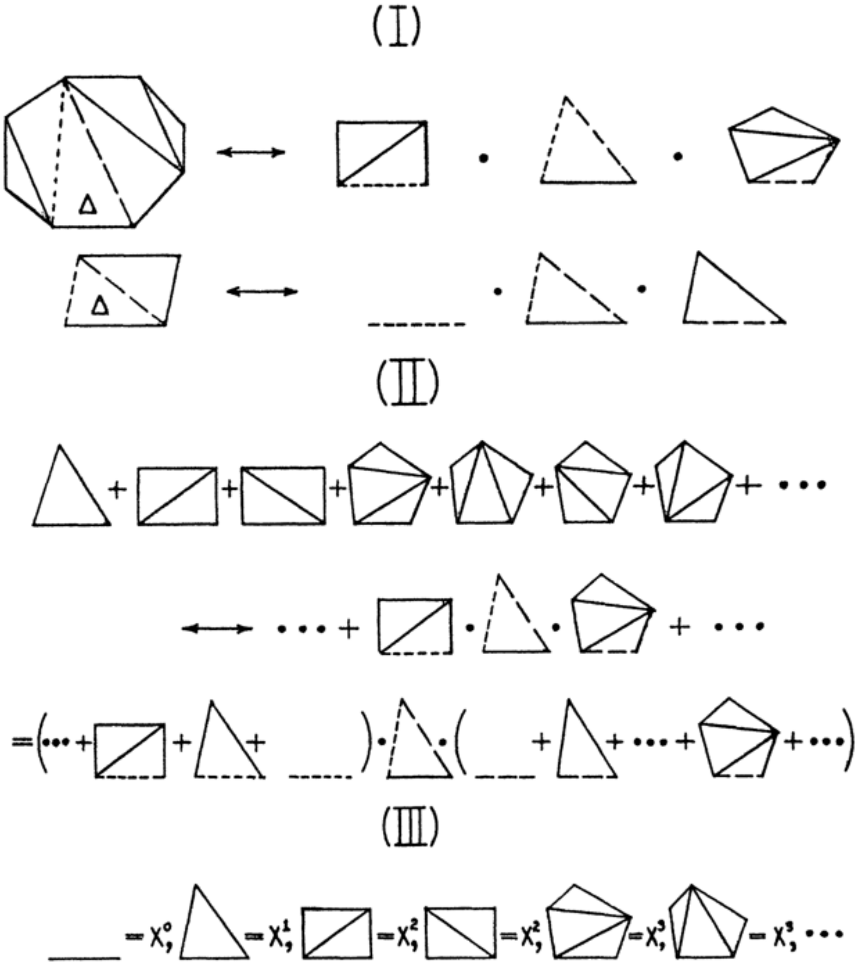

Fig. 4. Key idea, figurate series, transition.

La partie (II) de la Figure 4 suggère l'idée-clé : nous construisons les dissections de n'importe quel polygone qui n'est pas un triangle à partir des dissections d'autres polygones qui ont moins de côtés. À cet effet, nous mettons en évidence l'un des côtés du polygone, le plaçons horizontalement en bas et l'appelons la *base*. L'un des triangles dans lesquels le polygone est disséqué a la base comme côté ; nous appelons ce triangle Δ. Dans le polygone donné, il y a deux polygones plus petits, l'un à gauche, l'autre à droite, de Δ. Par exemple, la ligne supérieure de la Figure 4 (I) montre un octogone dans lequel il y a un quadrilatère à gauche, et un pentagone à droite, de Δ, tous deux convenablement disséqués. Comme la figure le suggère, on peut générer cette dissection de l'octogone en partant de Δ et en plaçant sur lui, des deux côtés, les deux autres polygones pré-disséqués de manière appropriée. Nous pouvons espérer que la construction des dissections de cette manière sera utile.

En explorant les perspectives de cette idée, nous pouvons rencontrer une objection : il y a des cas, comme celui affiché dans la deuxième ligne de la Figure 4 (I), dans lesquels le polygone partiel sur un certain côté de Δ n'existe pas. Pourtant, on peut parer cette objection : oui, le polygone partiel sur ce côté de Δ (le côté gauche dans la figure) *existe*, mais il est dégénéré ; il est réduit à un simple *segment*.

La partie (II) de la Figure 4 montre la genèse de la série figurée. Cette série, qui occupe la première ligne, est la somme de toutes les dissections possibles de polygones avec $3, 4, 5, \ldots$ côtés. Selon la partie (I) (comme la ligne suivante nous le rappelle), chaque terme de la série figurée peut être généré en plaçant deux polygones pré-disséqués sur un triangle Δ, un par la gauche et un par la droite (l'un ou l'autre, ou peut-être les deux, pouvant être dégénérés). Par conséquent, comme la ligne suivante (la dernière de la Figure 4 (II)) l'indique, les termes de la série figurée sont en correspondance biunivoque avec le développement d'un produit de trois facteurs : le facteur du milieu est juste un triangle, les deux autres facteurs sont égaux à la série figurée augmentée du segment.

2.2.

La partie (III) de la Figure 4 suggère la transition de la série figurée à la série énumérative. Suivant le modèle établi par la Figure 3 et la Section 1.2, nous substituons à chaque dissection (plus précisément, pour la variable représentée par cette dissection) une puissance de x dont l'exposant est le nombre de triangles dans cette dissection. Cette substitution, indiquée par la Figure 4 (III), change la série figurée en :

$$D_3x + D_4x^2 + D_5x^3 + \cdots + D_nx^{n-2} + \cdots = E(x), \tag{5}$$

où $E(x)$ désigne la série énumérative. La relation affichée par la Figure 4 (II) se transforme en :

$$E(x) = x[1 + E(x)]^2. \tag{6}$$

Il s'agit d'une équation quadratique pour $E(x)$ dont la solution est :

$$\begin{aligned} E(x) &= D_3x + D_4x^2 + D_5x^3 + \cdots + D_nx^{n-2} + \ldots \\ &= \frac{1 - 2x - [1 - 4x]^{1/2}}{2x} \\ &= x + 2x^2 + \ldots. \end{aligned} \tag{7}$$

En fait, pour arriver à (7), nous devons écarter l'autre solution de l'équation quadratique (6) qui devient ∞ pour $x = 0$.

2.3.

Nous avons réduit notre problème initial qui était de calculer D_n à un problème d'un genre différent : trouver le coefficient de x^{n-2} dans le développement de la fonction (7) en puissances de x [5]. Nous obtenons à partir de (7), en utilisant la formule du binôme et des transformations directes, que pour $n \geq 3$:

$$D_n = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n-1}(-4)^{n-1} = \frac{2}{2} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{10}{4} \cdots \frac{4n-10}{n-1}.$$

3.1.

Un *arbre* (topologique) est un système connecté de deux types d'objets, les *lignes* et les *points*, qui ne contient aucun chemin fermé. Un certain point de l'arbre dans lequel une seule ligne se termine est appelé la *racine* de l'arbre, la ligne partant de la racine le *tronc*, tout point différent de la racine un *nœud*. Dans la Figure 5, la racine est indiquée par une flèche, et chaque

5. Ce dernier est un problème de routine dont nous n'avons pas besoin de discuter largement.

nœud par un petit cercle. Notre problème est : *calculer T_n, le nombre d'arbres différents avec n nœuds*[6].

Peu importe que les lignes soient longues ou courtes, droites ou courbes, dessinées sur le papier à gauche ou à droite : seule la différence de connexion (topologique) est pertinente. L'examen des cas les plus simples peut aider le lecteur à comprendre le sens visé du problème ; on voit facilement que $T_1 = 1$, $T_2 = 1$, $T_3 = 2$, $T_4 = 4$, $T_5 = 9$[7].

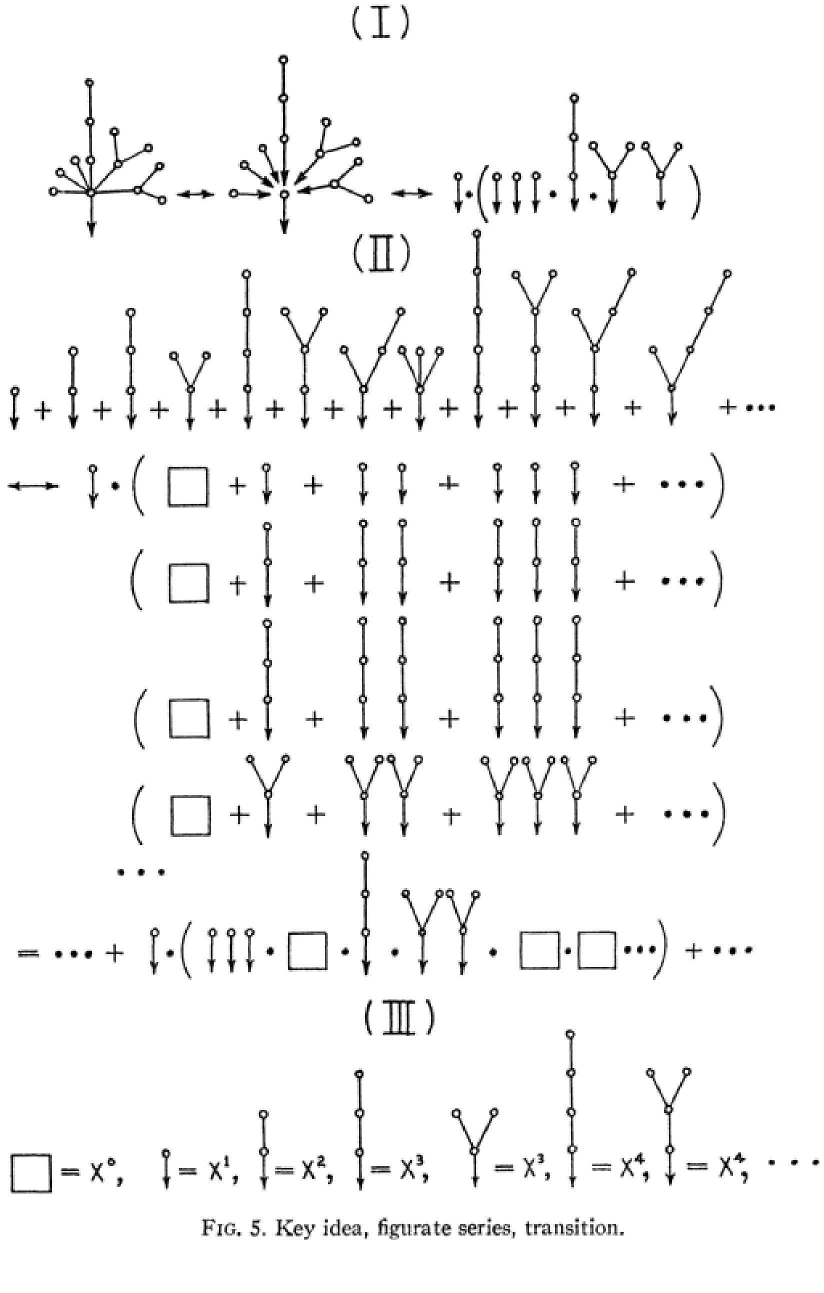

FIG. 5. Key idea, figurate series, transition.

6. Les arbres considérés ici devraient être appelés plus spécifiquement *arbres à racine* ; voir **4**, Vol. 11, p. 365. Leur définition qui est simplement esquissée ici est élaborée dans **2**, pp. 181–191 ; voir aussi les passages qui y sont cités de **5**. Il se peut, cependant, qu'il soit suffisant et à certains égards même avantageux si, à une première lecture, le lecteur prend la définition "intuitivement" et la complète par des exemples. Observez que dans le premier article de Cayley sur le sujet, **4**, Vol. 3, pp. 242–246, la définition d'un arbre n'est même pas tentée. La chimie est l'une des sources de la notion d'"arbre" : si les points représentent des atomes et les lignes de connexion les valences, l'arbre représente un composé chimique.

7. Cette forme est légèrement différente de celle donnée dans **4**, Vol. 3, pp. 242–246. Pour d'autres formes, voir **2**, p. 149.

La solution est indiquée par les trois parties de la Figure 5 dont l'agencement général est très similaire à celui de la Figure 4. Le lecteur devrait essayer de comprendre la solution en regardant simplement la Figure 5 et en observant les analogies pertinentes avec toutes les figures précédentes. Il peut, cependant, s'en remettre aux brefs commentaires suivants.

L'arbre le plus simple se compose d'une racine, d'un tronc et de juste un nœud. L'idée clé est de construire n'importe quel arbre différent du plus simple à partir d'autres arbres qui ont moins de nœuds. À cet effet, nous concevons, comme le montre la Figure 5 (I), les "branches principales" de n'importe quel arbre comme des arbres (avec moins de nœuds) insérés dans le point d'extrémité supérieur (le seul nœud) du tronc. Par conséquent, comme la Figure 5 (I) le montre en outre, on peut concevoir n'importe quel arbre comme la juxtaposition du plus simple des arbres et de plusieurs images, chacune d'elles consistant en un, ou deux, ou plusieurs *arbres identiques* ; observez l'analogie avec la dernière ligne de la Figure 2.

La partie (II) de la Figure 5 affiche la série figurée : la somme infinie de tous les arbres différents. Sa genèse est similaire à, mais plus complexe que, celle de la série figurée de la Figure 2. Dans la Figure 2, nous voyons un produit de cinq séries "pratiquement géométriques" ; dans la Figure 5, nous voyons un produit d'une infinité de séries "pratiquement géométriques", multiplié par un facteur initial d'un terme (le plus simple des arbres, le tronc commun de tous les arbres).

3.2.

La partie (III) de la Figure 5 affiche la substitution qui change la série figurée en série énumérative. Par cette substitution, chaque série "pratiquement géométrique" apparaissant dans la Figure 5 (II) se transforme en une série géométrique propre dont la somme est connue, et toute la relation affichée par la Figure 5 (II) se transforme en la remarquable relation due à Cayley :

$$\begin{aligned} &T_1 x + T_2 x^2 + T_3 x^3 + \cdots + T_n x^n + \ldots \\ &= x(1-x)^{-T_1}(1-x^2)^{-T_2}(1-x^3)^{-T_3} \ldots (1-x^n)^{-T_n} \ldots \end{aligned} \tag{8}$$

3.3.

En développant le membre de droite de l'Équation (8) en puissances de x et en comparant le coefficient de x^n des deux côtés, nous obtenons une formule de récurrence, c'est-à-dire, une expression pour T_n en termes de $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ pour $n \geq 2$. Le lecteur devrait calculer les premiers cas et vérifier par un calcul analytique les valeurs de T_n pour $n \leq 5$ qu'il a trouvées auparavant par expérimentation géométrique.

Références

1. G. Pólya et G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, 2 volumes, Berlin, 1925.
2. G. Pólya, *Acta Mathematica*, vol. 68 (1937), pp. 145–254.
3. G. Pólya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, 2 volumes, Princeton, 1954.
4. A. Cayley, *Collected Mathematical Papers*, 13 volumes, Cambridge, 1889–1898.
5. D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig, 1936.