L'ensemble exceptionnel de Goldbach : un exposant de 7/12 et des raffinements conditionnels

János Pintz [*] Ingo Althöfer

Dédié au 70[e] anniversaire de Szilárd Gy. Révész

Résumé

Soit $E(X)$ le nombre d'entiers pairs entre 4 et X qui ne sont pas sommes de deux nombres premiers. Nous combinons la formule explicite de Pintz pour les arcs majeurs avec l'estimation de sommes exponentielles de Maynard, Pandey et Radziwiłł pour démontrer $E(X) \ll_\varepsilon X^{7/12+\varepsilon}$ dès lors que toutes les fonctions L de Dirichlet possèdent un demi-plan sans zéro fixe commun $\Re e\, s > \theta_0$, avec $\theta_0 < 1$. Le théorème uniforme 7/8 rapporté dans la publication mathématique d'OpenAI fournit cette entrée.

Sous l'hypothèse plus forte que tout zéro de Dirichlet non trivial a une partie réelle au plus θ, où $1/2 \le \theta \le 2/3$, nous démontrons

$$E(X) \ll_{\theta,\varepsilon} X^{g(\theta)+\varepsilon}, \qquad g(\theta) = \frac{\theta(5-4\theta)}{2(2-\theta)}.$$

Ainsi, tout $\theta < 2/3$ fixé donne un exposant strictement inférieur à 7/12.

Ce dernier argument utilise une estimation classique de densité des zéros à module fixé et est indépendant du nouveau théorème de sommes exponentielles.

1 Introduction et résultats

Pour $X \ge 4$, on définit

$$E(X) = \#\{n \in \mathbb{Z} : 4 \le n \le X,\ 2 \mid n,\ n \ne p+q \text{ pour tous les nombres premiers } p, q\}.$$

Les nombres premiers p, q peuvent être égaux. Nous omettons l'entier pair 2 ; cela modifie les autres définitions courantes de $E(X)$ d'au plus un.

[*]Mots-clés et expressions : conjecture de Goldbach, ensemble exceptionnel pour le problème de Goldbach.
Classification mathématique par sujets 2020 : 11P32.
Le premier auteur a été soutenu par l'Office national de recherche, de développement et d'innovation de Hongrie, NKFIH, K133819, K147153, Excellence 151341.

L'étude de $E(X)$ est l'une des principales approches quantitatives du problème binaire de Goldbach. Montgomery et Vaughan [5] ont établi une économie de puissance $E(X) \ll X^{1-\delta}$ pour un certain $\delta > 0$ absolu.

La formule explicite de Pintz [8] permet des arcs majeurs sensiblement plus grands tout en conservant la contribution des zéros proches de la droite $\mathfrak{Re}\, s = 1$. Son application dans [9] donne $E(X) < X^{0.72}$ pour X suffisamment grand.

Zhao [13] a ensuite obtenu $E(X) \ll X^{0.709}$.

Le traitement des zéros possibles près de un s'appuie sur les régions sans zéro et les estimations de répulsion des zéros de Heath-Brown [2], et sur leur raffinement par Xylouris [12].

Pintz et Althöfer, avec l'assistance d'une IA, ont développé une nouvelle série de raffinements numériques inédits dans ce cadre analytique, aboutissant à l'exposant fixe rapporté 0.684 [10]. Ces calculs conservent les dépendances entre les comptages de zéros, la masse précoce de zéros et les queues, plutôt que de les maximiser indépendamment. La chaîne numérique complète n'est pas utilisée dans les démonstrations ci-dessous.

La référence [10] distingue le calcul intermédiaire 0.68601 du point terminal ultérieur 0.684.

Un demi-plan sans zéro fixe supprime entièrement les éventuels zéros exceptionnels généralisés de la formule des arcs majeurs, pour X suffisamment grand. L'exposant de l'ensemble exceptionnel est alors contrôlé par les arcs mineurs. La nouvelle estimation de Maynard, Pandey et Radziwiłł [3] remplace l'exposant classique $4/5$ dans une somme exponentielle sur les nombres premiers par $19/24$. Les exposants correspondants pour l'ensemble exceptionnel sont

$$2 \cdot \frac{4}{5} - 1 = \frac{3}{5}, \qquad 2 \cdot \frac{19}{24} - 1 = \frac{7}{12}.$$

La distinction entre ces deux paires d'exposants est utile.

Pour $1/2 \le \theta < 1$, soit H_θ l'assertion

$$\mathfrak{Re}\, \rho \le \theta \quad \text{pour tout zéro non trivial de toute fonction} \quad L \text{ de Dirichlet primitive.} \tag{1.1}$$

La fonction zêta est incluse comme fonction de conducteur un. L'uniformité signifie ici que le même θ convient pour tout caractère et toute hauteur.

Théorème 1 (Un demi-plan sans zéro fixe)**.** *Supposons que* H_{θ_0} *soit vérifiée pour un certain* $1/2 \le \theta_0 < 1$ *fixé. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$*,*

$$E(X) \ll_{\theta_0,\varepsilon} X^{7/12+\varepsilon}. \tag{1.2}$$

Corollaire 2 (Application du théorème 7/8)**.** *En invoquant le théorème uniforme sur les fonctions L de Dirichlet d'OpenAI [6, Théorème 1.1], on obtient*

$$E(X) \ll_{\varepsilon} X^{7/12+\varepsilon}.$$

Le théorème 1 isole l'implication exacte nécessaire au théorème sans zéro externe. Un résultat pour $\zeta(s)$ seul ne fournirait pas son hypothèse. Ce brouillon prend l'énoncé uniforme pour les fonctions de Dirichlet dans [6] comme entrée externe ; il ne redémontre pas ce résultat. En fait, toute frontière fixe strictement inférieure à un, y compris 11/12, suffit pour cette application particulière. La valeur 7/8 affecte le seuil inférieur requis pour X, mais non l'exposant dans (1.2).

La perte en ε est conservée partout : nous n'affirmons pas $E(X) \ll X^{7/12}$ sans elle.

Le résultat suivant traite d'hypothèses sans zéro fixes plus fortes.

Théorème 3 (Raffinement conditionnel)**.** *Supposons* H_θ *pour un certain* $1/2 \le \theta \le 2/3$ *fixé. Pour tout* $\varepsilon > 0$*,*

$$E(X) \ll_{\theta,\varepsilon} X^{g(\theta)+\varepsilon}, \qquad g(\theta) = 2\theta - \frac{3}{2} + \frac{3(1-\theta)}{2-\theta} = \frac{\theta(5-4\theta)}{2(2-\theta)}. \tag{1.3}$$

Puisque $g(2/3) = 7/12$ et que g est strictement croissante sur $[1/2, 2/3]$, tout $\theta < 2/3$ fixé donne une économie fixe positive sous 7/12, après avoir choisi ε suffisamment petit. Par exemple,

$$\mathrm{H}_{5/8} \quad \Longrightarrow \quad E(X) \ll_\varepsilon X^{25/44+\varepsilon}, \qquad \frac{7}{12} - \frac{25}{44} = \frac{1}{66}.$$

Il s'agit d'un seuil suffisant pour la méthode, et non d'une affirmation que $\theta < 2/3$ serait nécessaire ou optimal.

2 Arcs majeurs et mineurs

Écrivons $e(t) = \exp(2\pi i t)$. Fixons une petite constante $\delta > 0$, et choisissons une constante suffisamment petite $\varepsilon_0 > 0$ comme dans la formule des arcs majeurs de Pintz. Posons

$$X_1 = X^{1-\varepsilon_0}, \qquad S_X(\alpha) = \sum_{X_1 < p \le X} (\log p) e(p\alpha).$$

Pour $P \le X^{4/9-\delta}$, définissons, sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$,

$$\mathfrak{M}(P) = \bigcup_{q \le P} \bigcup_{\substack{0 \le a < q \\ (a,q)=1}} \left\{ \alpha : \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \le \frac{P}{qX} \right\}, \qquad \mathfrak{m}(P) = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus \mathfrak{M}(P).$$

Les distances et les approximations rationnelles sur le cercle sont comprises modulo un. Ces arcs sont disjoints pour X suffisamment grand. Pour $n \in (X/2, X]$, écrivons

$$R_X(n) = \sum_{\substack{p+q=n \\ p,q > X_1}} \log p \log q = R_{\mathfrak{M}}(n) + R_{\mathfrak{m}}(n), \qquad R_{\mathcal{A}}(n) = \int_{\mathcal{A}} S_X(\alpha)^2 e(-n\alpha)\, \mathrm{d}\alpha.$$

Nous utilisons la série singulière de Goldbach usuelle

$$\mathfrak{S}(n) = 2C_2 \prod_{\substack{p \mid n \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2}, \qquad C_2 = \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) > 0 \quad (n \text{ pair}).$$

2.1 La spécialisation de la formule explicite de Pintz

Ce qui suit est la spécialisation sans zéro de [8, Théorème 1 et équation (2.10), version arXiv].

Pour chaque $P_0 \le X^{4/9-\delta}$, la formule permet un choix

$$P_0 X^{-\delta} \le P \le P_0. \tag{2.1}$$

Pour H fixé suffisamment grand, si aucune fonction L de Dirichlet primitive de conducteur au plus P n'a de zéro dans

$$\mathfrak{R}e\, s \ge 1 - \frac{H}{\log X}, \qquad |\mathfrak{I}m\, s| \le \sqrt{X},$$

alors, uniformément pour n pair dans $(X/2, X]$,

$$R_{\mathfrak{M}}(n) = \mathfrak{S}(n)n + O_\delta\Big(\mathfrak{S}(n) X e^{-c_\delta H}\Big) + O_\delta(X^{1-\kappa}), \qquad c_\delta > 0, \quad \kappa > 0. \tag{2.2}$$

En effet, la somme de singularités généralisées dans cette formule ne contient alors que le pôle de $\zeta(s)$ en un. Le terme provenant de la paire de pôles est $\mathfrak{S}(n)n$. Ici κ est une constante positive fixe ; nous l'autorisons à être plus petite que ε_0 pour absorber tout facteur logarithmique associé au seuil inférieur des nombres premiers.

Sous H_{θ_0}, la condition de zéro est vérifiée dès que

$$\log X > \frac{H}{1-\theta_0}. \tag{2.3}$$

On choisit d'abord δ, puis H suffisamment grand, et enfin X suffisamment grand. L'intégrale $R_{\mathfrak{M}}(n)$ est réelle par symétrie. Comme $\mathfrak{S}(n) \ge 2C_2$, l'équation (2.2) fournit

$$R_{\mathfrak{M}}(n) \ge cX \quad (X/2 < n \le X,\ n \text{ pair}) \tag{2.4}$$

pour une certaine constante $c > 0$.

Cela exclut tous les zéros exceptionnels généralisés pertinents pour la formule, et pas seulement un éventuel zéro de Siegel réel.

2.2 L'estimation de sommes exponentielles et le seuil

Nous utilisons [3, Théorème 1.1] sous la forme suivante. Si

$$\alpha = \frac{a}{q} + \beta, \qquad (a,q) = 1, \qquad q \le Y^{1/2}, \qquad |\beta| \le \frac{1}{qY^{1/2}}, \qquad B_Y = \max(q, qY|\beta|),$$

alors, pour tout $\eta > 0$,

$$\left|\sum_{m \le Y} \Lambda(m) e(m\alpha)\right| \ll_\eta Y^\eta \left(\frac{Y}{B_Y^{1/2}} + Y^{19/24}\right). \tag{2.5}$$

Remplacer une borne supérieure stricte par une borne non stricte ne contribue que $O(\log(2Y))$.

Nous précisons explicitement pourquoi (2.5) contrôle aussi le seuil inférieur dans S_X. Fixons $\alpha \in \mathfrak{m}(P)$ et $2 \le Y \le X$, et choisissons une approximation de Dirichlet à l'échelle Y comme ci-dessus.

Si $q > P$, alors $B_Y > P \ge PY/X$.

Si $q \le P$, le fait que $\alpha \notin \mathfrak{M}(P)$ implique $|\beta| > P/(qX)$, donc de nouveau $B_Y > PY/X$.

Par conséquent

$$\frac{Y}{\sqrt{B_Y}} \ll \sqrt{\frac{XY}{P}} \le \frac{X}{\sqrt{P}}.$$

En appliquant (2.5) à $Y = X$ et $Y = X_1$, et en supprimant les puissances de nombres premiers propres, dont le poids total de von Mangoldt est $O(\sqrt{X}(\log X)^2)$, on obtient

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{m}(P)} |S_X(\alpha)| \ll_\eta X^\eta \left(\frac{X}{\sqrt{P}} + X^{19/24}\right). \tag{2.6}$$

En particulier, aucune estimation triviale de taille X_1 n'intervient.

3 Démonstration du théorème 1

Choisissons un $0 < \delta < 1/72$ fixé, posons $P_0 = X^{4/9-\delta}$, et utilisons (2.1). Ainsi

$$X^{4/9-2\delta} \le P \le X^{4/9-\delta}. \tag{3.1}$$

Sous H_{θ_0}, les choix décrits en (2.3) donnent (2.4).

Si un entier pair $n \in (X/2, X]$ n'a aucune représentation de Goldbach, alors $R_X(n) = 0$. Dès lors $|R_{\mathfrak{m}}(n)| = |R_{\mathfrak{M}}(n)| \ge cX|$. L'inégalité de Bessel, suivie de (2.6) et de Parseval, donne donc

$$\begin{aligned}\Big(E(X) - E(X/2)\Big)X^2 &\ll \int_{\mathfrak{m}(P)} |S_X(\alpha)|^4 \,\mathrm{d}\alpha \\ &\le \left(\sup_{\alpha\in\mathfrak{m}(P)} |S_X(\alpha)|\right)^2 \int_0^1 |S_X(\alpha)|^2 \,\mathrm{d}\alpha \\ &\ll_\eta X^{2\eta}\left(\frac{X^2}{P} + X^{19/12}\right) X\log X. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ici $\int_0^1 |S_X|^2 = \sum_{X_1<p\le X} (\log p)^2 \ll X\log X$. Il s'ensuit que

$$E(X) - E(X/2) \ll_\eta X^{2\eta}\log X\left(\frac{X}{P} + X^{7/12}\right). \tag{3.3}$$

D'après (3.1),

$$\frac{X}{P} \le X^{5/9+2\delta}, \qquad \frac{5}{9} + 2\delta < \frac{7}{12}.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, prenons $\eta > 0$ suffisamment petit et sommons (3.3) sur les intervalles dyadiques. Cela démontre (1.2). Le corollaire 2 s'obtient en posant $\theta_0 = 7/8$ dans l'entrée externe [6, Théorème

1.1].

Cette démonstration explique pourquoi améliorer légèrement la frontière numérique 7/8 n'améliore pas en soi l'exposant 7/12. Une fois le terme principal des arcs majeurs positif, l'estimation des arcs mineurs affichée est l'entrée limitante. La section suivante utilise une information sans zéro plus forte directement dans la somme exponentielle.

4 Bornes plus fines sous une hypothèse sans zéro plus forte

Dans toute cette section, supposons H_θ avec $1/2 \le \theta \le 2/3$. Nous donnons une démonstration complète du théorème 3. Son entrée analytique est classique et ne nécessite ni [3] ni [6].

4.1 L'entrée classique de densité des zéros

Pour un caractère $\chi \bmod q$, soit χ^* le caractère primitif qui l'induit. Comptons les zéros avec multiplicité, et posons

$$N_q(\sigma, U) = \sum_{\chi \bmod q} \#\{\rho = \beta + i\gamma : \ L(\rho, \chi^*) = 0,\ 0 < \beta < 1,\ \beta \ge \sigma,\ |\gamma| \le U\}.$$

Nous utilisons l'estimation classique à module fixé

$$N_q(\sigma, U) \ll (qU)^{D(\sigma)} \log^9(qU), \qquad D(\sigma) = \frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}, \qquad \frac{1}{2} \le \sigma \le \frac{3}{4}, \tag{4.1}$$

uniformément pour $q \ge 1$ et $U \ge 2$. Ceci est explicitement consigné dans Wolke [11, éq. (2.2.5)], avec une référence à Montgomery [4, Théorème 12.1]. La somme porte sur les caractères d'un module fixé ; le paramètre est qU. Les facteurs d'Euler introduits par les caractères non primitifs ont des zéros sur $\mathfrak{Re}\, s = 0$, donc ils n'affectent pas cet énoncé.

Nous utilisons aussi le comptage total élémentaire des zéros

$$\sum_{\chi \bmod q} \#\{\rho_{\chi^*} : |\mathfrak{Im}\, \rho_{\chi^*}| \le U\} \ll q(U+1)\log\Big(q(U+2)\Big). \tag{4.2}$$

Par les équations fonctionnelles, H_θ implique

$$1 - \theta \le \mathfrak{Re}\, \rho \le \theta \quad \text{pour tous ces zéros non triviaux.} \tag{4.3}$$

La borne inférieure s'obtient en appliquant l'hypothèse aussi au caractère conjugué. Dans notre domaine, tous les zéros non triviaux restent donc dans la bande fixe $1/3 \le \mathfrak{Re}\, \rho \le 2/3$.

4.2 Une estimation uniforme près des points rationnels

Écrivons $e(t) = \exp(2\pi i t)$, et introduisons

$$F_X(\alpha) = \sum_{m \ge 1} \Lambda(m) e^{-m/X} e(m\alpha).$$

Le lissage exponentiel est commode car sa transformée de Mellin est un facteur gamma, et sa convolution donne un terme principal exact. Posons

$$a(\theta) = \theta - \frac{1}{4} + \frac{3(1-\theta)}{2(2-\theta)}. \tag{4.4}$$

Lemme 4. *Supposons* H_θ*, avec* $1/2 \le \theta \le 2/3$*. Pour tout* $\eta > 0$*, uniformément lorsque*

$$(a,q) = 1, \qquad 1 \le q \le 2\sqrt{X}, \qquad |\beta| \le \frac{2}{q\sqrt{X}},$$

on a, avec $z = X^{-1} - 2\pi i\beta$*,*

$$F_X(a/q+\beta) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)z} + O_{\theta,\eta}\Big(X^{a(\theta)+\eta}\Big). \tag{4.5}$$

Démonstration. Posons

$$T = 1 + X|\beta|, \qquad B = qT.$$

Alors $B \le 4\sqrt{X}$, $|z| \asymp T/X$, et $\pi/2 - |\arg z| \gg 1/T$.

Développement en caractères et formule explicite. Pour $(m,q) = 1$, l'orthogonalité des caractères donne

$$e(am/q) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \tau(\overline{\chi})\chi(a)\chi(m).$$

Ici $|\tau(\chi)| \le \sqrt{q}$, y compris pour les caractères non primitifs. Remplacer χ par χ^* ne modifie la somme de von Mangoldt correspondante que sur les puissances de nombres premiers divisant q. Leur contribution, ainsi que celle de $(m,q) > 1$, est absorbée dans $O(\sqrt{q}\log^2(qX))$.

Pour un caractère primitif de conducteur $f \le q$, l'inversion de Mellin et un déplacement de contour donnent

$$\sum_{m\ge 1} \Lambda(m)\chi^*(m)e^{-mz} = \frac{\delta_{\chi^*}}{z} - \sum_{\rho_{\chi^*}} \Gamma(\rho_{\chi^*})z^{-\rho_{\chi^*}} + O_\theta\Big(\log^2(qX)\Big), \tag{4.6}$$

où $\delta_{\chi^*} = 1$ pour le conducteur un et vaut zéro sinon. La puissance de z utilise le logarithme principal. Pour être complet, partons de

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{L'}{L}(s,\chi^*)\Gamma(s)z^{-s}\,\mathrm{d}s$$

et déplaçons la droite vers $\mathfrak{Re}\, s = -1/2$. Les pôles traversés sont le pôle en un, les zéros non triviaux, et l'éventuel pôle simple ou double de l'intégrande en zéro. Sous (4.3), le dernier résidu est $O_\theta(\log^2(qX))$: les parties régulières de la dérivée logarithmique en zéro sont bornées à l'aide de la formule de l'équation fonctionnelle et de sa formule en fractions partielles en un et deux. En effet, les zéros restent à distance fixe de un et leur somme pondérée par $(1+|\gamma|^2)^{-1}$ est $O(\log(f+3))$.

Sur la nouvelle droite, l'équation fonctionnelle donne $L'/L(s,\chi^*) \ll \log(f(|\Im m\, s|+2))$. La formule de Stirling borne l'intégrale restante par

$$O\Big(|z|^{1/2}\log^2\Big(q(T+2)\Big)\Big),$$

ce qui est inclus dans l'erreur de (4.6). Les contours horizontaux peuvent être pris à distance des zéros ; leurs intégrales tendent vers zéro car $|\arg z| < \pi/2$.

La même décroissance exponentielle rend la somme sur les zéros affichée absolument convergente.

Par conséquent, avec $c_\chi = \tau(\overline{\chi})\chi(a)$,

$$F_X(a/q+\beta) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)z} - \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q} c_\chi \sum_{\rho_{\chi^*}} \Gamma(\rho_{\chi^*})z^{-\rho_{\chi^*}} + O_\theta\Big(\sqrt{q}\log^2(qX)\Big). \tag{4.7}$$

Le caractère principal fournit le terme principal car sa somme de Gauss vaut $\mu(q)$.

Estimation des zéros. Pour $\rho = u + i\gamma$, la formule de Stirling et (4.3) donnent

$$|\Gamma(\rho)z^{-\rho}| \ll_\theta X^u T^{-u}(1+|\gamma|)^{u-1/2}e^{-c|\gamma|/T} \tag{4.8}$$

pour une constante absolue $c > 0$.

Si $u < 1/2$, le membre de droite est au plus $O_\theta(X^{1/2}T^{-1/2}e^{-c|\gamma|/T})$, puisque $X/T \gg \sqrt{X}$.

Après sommation par (4.2) et multiplication par $\sqrt{q}/\varphi(q)$, tous ces zéros contribuent

$$\ll_{\theta,\eta} X^\eta X^{1/2}B^{1/2}. \tag{4.9}$$

Pour $u \geq 1/2$, la borne (4.8) est au plus

$$C_\theta X^u T^{-1/2}(1+|\gamma|/T)^{1/6}e^{-c|\gamma|/T}.$$

On peut écarter $|\gamma| > T(\log X)^2$ avec une erreur plus petite que toute puissance négative fixée de X, par (4.2).

Partitionnons $[1/2,\theta]$ en intervalles de longueur au plus $1/\log X$, en traitant l'extrémité $\theta = 1/2$ comme une seule classe. Appliquons (4.1) à l'extrémité gauche de chaque intervalle, avec $U \asymp T(\log X)^2$.

Les facteurs logarithmiques, le nombre d'intervalles, et $q/\varphi(q)$ peuvent tous être absorbés dans X^η. Avec (4.9), cela borne le terme des zéros dans (4.7) par

$$\ll_{\theta,\eta} X^\eta\left(X^{1/2}B^{1/2} + \sup_{1/2\leq\sigma\leq\theta} X^\sigma B^{D(\sigma)-1/2}\right). \tag{4.10}$$

Ici le facteur $B^{-1/2}$ est précisément le produit du facteur de somme de Gauss $q^{-1/2}$, aux logarithmes près, et de $T^{-1/2}$.

Pour $1/2 \le \sigma \le 2/3$, on a $D(\sigma) - 1/2 \ge 1/4$. Comme $B \ll \sqrt{X}$, le second terme dans (4.10) est borné par le maximum de $X^{h(\sigma)}$, où

$$h(\sigma) = \sigma - \frac{1}{4} + \frac{D(\sigma)}{2}, \qquad h'(\sigma) = 1 - \frac{3}{2(2-\sigma)^2} \ge \frac{5}{32} > 0.$$

Ainsi le maximum est $X^{h(\theta)} = X^{a(\theta)}$. Le premier terme est $O(X^{3/4})$, et $a(\theta) \ge a(1/2) = 3/4$.

La dernière erreur dans (4.7) est encore plus petite. Cela démontre (4.5). □

4.3 Le modèle des arcs majeurs et ses coefficients de Fourier

Prenons $P = X^{1/3}$. Sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, soit $\mathfrak{M}$ la réunion des arcs

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{P}{qX}, \qquad q \le P, \quad 0 \le a < q, \quad (a,q) = 1.$$

Les distances sont ici interprétées modulo un. Ces arcs sont disjoints pour tout X suffisamment grand, puisque $2P^2 < X$. Définissons

$$V_X(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\mu(q)}{\varphi(q)(X^{-1} - 2\pi i(\alpha - a/q))}, & \alpha \text{ appartient à l'arc autour de } a/q, \\ 0, & \alpha \notin \mathfrak{M}. \end{cases}$$

Le lemme 4 s'applique sur $\mathfrak{M}$. Pour $\alpha \notin \mathfrak{M}$, l'approximation de Dirichlet fournit $q \le \lfloor \sqrt{X} \rfloor$ et $|\alpha - a/q| \le 1/(q\lfloor\sqrt{X}\rfloor)$. Pour cette approximation, soit $q > P$, soit $qX|\alpha - a/q| > P$. Donc $B = q(1 + X|\alpha - a/q|) > P$, et le terme principal rationnel dans (4.5) est

$$\ll_\eta \frac{X^{1+\eta}}{B} \ll_\eta X^{2/3+\eta}.$$

Comme $a(\theta) \ge 3/4$, nous avons l'estimation globale

$$\|F_X - V_X\|_\infty \ll_{\theta,\eta} X^{a(\theta)+\eta}. \tag{4.11}$$

Parseval et une borne élémentaire de Chebyshev donnent

$$\|F_X\|_2^2 = \sum_{m \ge 1} \Lambda(m)^2 e^{-2m/X} \ll X \log X, \qquad \|V_X\|_2^2 \ll X \sum_{q \le P} \frac{1}{\varphi(q)} \ll X \log X. \tag{4.12}$$

Toutes les normes et intégrales sur le cercle utilisent la mesure de Lebesgue de masse totale un. Par conséquent

$$\int_0^1 |F_X(\alpha)^2 - V_X(\alpha)^2|^2 \, \mathrm{d}\alpha \le \|F_X - V_X\|_\infty^2 \|F_X + V_X\|_2^2 \ll_{\theta,\eta} X^{2a(\theta)+1+2\eta} \log X. \tag{4.13}$$

Pour identifier les coefficients du modèle, posons

$$v_X(n) = \int_0^1 V_X(\alpha)^2 e(-n\alpha) \, \mathrm{d}\alpha, \qquad c_q(n) = \sum_{\substack{0 \le a < q \\ (a,q)=1}} e(an/q).$$

En sommant d'abord les numérateurs de chaque dénominateur, on obtient

$$v_X(n) = \sum_{q \le P} \frac{\mu(q)^2 c_q(n)}{\varphi(q)^2} \int_{-P/(qX)}^{P/(qX)} \frac{e(-n\beta)}{(X^{-1} - 2\pi i\beta)^2}\, \mathrm{d}\beta. \tag{4.14}$$

Pour $n > 0$, l'intégrale complète sur la droite réelle vaut exactement $ne^{-n/X}$. Cela suit de l'inversion de Fourier appliquée à la convolution de $t \mapsto e^{-t/X}\mathbf{1}_{t>0}$ avec elle-même. La valeur absolue des queues omises est $O(qX/P)$.

Uniformément pour $1 \le n \le X$, les estimations élémentaires des sommes de Ramanujan donnent

$$\sum_{q \le P} \frac{q|c_q(n)|}{\varphi(q)^2} \ll_\eta X^\eta, \qquad \sum_{q > P} \frac{|c_q(n)|}{\varphi(q)^2} \ll_\eta \frac{X^\eta}{P}. \tag{4.15}$$

Pour clarifier, utilisons $|c_q(n)| \le (q,n)$, $q/\varphi(q) \ll_\delta q^\delta$, et $(q,n) = \sum_{d|(q,n)} \varphi(d)$. La première somme se réduit alors à des sommes de diviseurs fois $\sum_{m \le P/d} m^{-1}$.

Pour la seconde, en scindant les diviseurs en $d = P$, on obtient, pour chaque $d \mid n$, une borne $O_\delta(P^{-1+2\delta})$.

La borne sur le nombre de diviseurs $d(n) \ll_\delta n^\delta$, avec un δ suffisamment petit, démontre (4.15).

Il s'ensuit de (4.14)-(4.15) que

$$v_X(n) = ne^{-n/X}\mathfrak{S}(n) + O_\eta(X^{1+\eta}/P), \qquad \mathfrak{S}(n) = \sum_{q \ge 1} \frac{\mu(q)^2 c_q(n)}{\varphi(q)^2}. \tag{4.16}$$

Pour n pair, son produit eulérien absolument convergent est

$$\mathfrak{S}(n) = 2C_2 \prod_{\substack{p \mid n \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2} \ge 2C_2 > 0, \qquad C_2 = \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right). \tag{4.17}$$

En choisissant $\eta < 1/3$ dans (4.16), nous concluons que

$$|v_X(n)| \ge cX \quad \text{pour tout } n \text{ pair dans } (X/2, X] \tag{4.18}$$

et pour tout X suffisamment grand, pour une certaine constante absolue $c > 0$.

4.4 Suppression des puissances de nombres premiers et comptage des exceptions

Le n-ième coefficient de Fourier de F_X^2 est

$$e^{-n/X} R_\Lambda(n), \qquad R_\Lambda(n) = \sum_{u+v=n} \Lambda(u)\Lambda(v).$$

Si n n'est pas somme de deux nombres premiers, tout terme non nul de cette dernière somme implique au moins une puissance propre de nombre premier p^k, $k \ge 2$. Il y a $O(\sqrt{X}\log X)$ telles

puissances jusqu'à X, chacune contribue au plus $(\log X)^2$, et l'un ou l'autre des sommants peut être la puissance de nombre premier. Ainsi, uniformément pour de tels $n \le X$,

$$R_\Lambda(n) \ll \sqrt{X}(\log X)^3 = o(X). \tag{4.19}$$

Par (4.18) et (4.19), le coefficient de Fourier de $F_X^2 - V_X^2$ a une valeur absolue d'au moins $cX/2$ en tout entier pair exceptionnel $n \in (X/2, X]$, pour X grand. L'inégalité de Bessel et (4.13) donnent donc

$$\Big(E(X) - E(X/2)\Big)X^2 \ll_{\theta,\eta} X^{2a(\theta)+1+2\eta} \log X.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, choisissons $\eta > 0$ suffisamment petit. Cela démontre

$$E(X) - E(X/2) \ll_{\theta,\varepsilon} X^{2a(\theta)-1+\varepsilon}.$$

Puisque $2a(\theta) - 1 \ge 1/2$, la sommation sur les intervalles dyadiques démontre le théorème 3, avec $g(\theta) = 2a(\theta) - 1$.

4.5 Conséquences numériques et seuil suffisant

Sur $[1/2, 2/3]$,

$$g'(\theta) = 2 - \frac{3}{(2-\theta)^2} \ge \frac{5}{16} > 0, \qquad g(2/3) = \frac{7}{12}.$$

Par conséquent, tout $\theta < 2/3$ fixé donne $g(\theta) < 7/12$. Pour obtenir un exposant effectivement inférieur à $7/12$ dans (1.3), choisissons ε plus petit que cet écart positif. Voici les exposants avant l'ajout du ε arbitraire.

Frontière de zéros θ	Exposant de l'ensemble exceptionnel $g(\theta)$	Valeur décimale
$2/3$	$7/12$	$0.583333\ldots$
$13/20$	$26/45$	$0.577777\ldots$
$5/8$	$25/44$	$0.568181\ldots$
$3/5$	$39/70$	$0.557142\ldots$
$7/12$	$28/51$	$0.549019\ldots$
$1/2$	$1/2$	0.500000

Par exemple, $\mathrm{H}_{5/8}$ donne

$$E(X) \ll_\varepsilon X^{25/44+\varepsilon}, \qquad \frac{7}{12} - \frac{25}{44} = \frac{1}{66}.$$

Pour rendre l'exposant strictement inférieur à $0.55 = 11/20$, il suffit de supposer une frontière fixe

$$\theta < \frac{61 - \sqrt{201}}{80} = 0.5852819140\ldots,$$

puis de prendre ε suffisamment petit. L'égalité dans cette dernière frontière donne $g(\theta) = 0.55$, avant la perte en ε.

Pour comparaison, si l'estimation de densité (4.1) est remplacée partout par le comptage total (4.2), le même argument donne une erreur locale $O_{\theta,\eta}(X^{\theta+1/4+\eta})$ et donc la borne plus faible

$$E(X) \ll_{\theta,\varepsilon} X^{2\theta-1/2+\varepsilon}.$$

Cette borne ne bat $7/12$ que lorsque $\theta < 13/24$. C'est l'utilisation de l'estimation de densité à module fixé qui améliore ce seuil suffisant à $2/3$.

5 Comparaison avec l'estimation de densité de Guth-Maynard

Pintz a observé que l'amélioration de la densité des zéros de Guth et Maynard [1, Théorème 1.2] n'affine pas la plage conditionnelle utilisée ici. Leur estimation de zêta énoncée a pour exposant

$$D_{\mathrm{GM}}(\sigma) = \frac{15(1-\sigma)}{3+5\sigma}, \qquad N(\sigma, T) \le T^{D_{\mathrm{GM}}(\sigma)+o(1)}.$$

En la comparant à l'exposant d'Ingham, on obtient, pour $1/2 \le \sigma < 1$,

$$\frac{15(1-\sigma)}{3+5\sigma} < \frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma} \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma > \frac{7}{10}.$$

L'argument de la section 4 n'utilise que $1/2 \le \sigma \le \theta \le 2/3 < 7/10$.

Ainsi, même une borne analogue pour la famille à module fixe avec cet exposant n'améliorerait pas (4.10) dans notre domaine. De plus, l'estimation de zêta à elle seule ne remplace pas la somme sur tous les caractères modulo q requise dans (4.1). Ces deux points expliquent pourquoi le raffinement conditionnel ci-dessus utilise l'estimation classique.

6 Déclaration d'utilisation de l'IA et contributions

ChatGPT, un système d'IA fourni par OpenAI, a été utilisé dans le développement de ce travail. Sa contribution comprenait la proposition et le développement de l'exposant conditionnel $g(\theta)$, la vérification de l'algèbre et des plages de paramètres, l'extension de l'argument de la méthode du cercle, la localisation et la comparaison des énoncés des sources, et la préparation de la source LaTeX et du PDF compilé. La partie conditionnelle développe l'argument de travail préparé avec Althöfer le 8 octobre 2026.
Pintz a fourni la méthode des arcs majeurs sous-jacente via [8, 9] et a proposé la structure de l'article conjoint, y compris la combinaison avec [3] et [6] et la comparaison de la section 5. Althöfer a initié et dirigé l'investigation collaborative et les raffinements successifs du problème de l'ensemble exceptionnel. La chaîne de recherche numérique antérieure [10] a également été développée avec l'assistance d'une IA ; elle est mentionnée pour contexte et ne constitue une entrée pour aucune des deux démonstrations de cet article.
L'utilisation de ChatGPT dans cette collaboration est distincte du théorème sans zéro généré par IA cité comme travail externe dans [6]. Les arguments mathématiques n'ont pas été formalisés en Lean. La portée de la formalisation rapportée pour le résultat externe 7/8 est documentée séparément dans [7] ; aucune reconstruction indépendante de cette formalisation n'est revendiquée ici. Les certificats de la chaîne numérique antérieure n'ont pas été réexécutés lors de la préparation de ce brouillon. Les vérifications algébriques et la compilation réussie ne remplacent pas la vérification des arguments analytiques et des hypothèses des théorèmes cités. Les auteurs humains conservent la responsabilité du contenu mathématique final, des références et de la soumission, et ce brouillon de travail ne représente pas leur approbation finale de chaque énoncé.

Remerciements

Le premier auteur souhaite remercier ses collègues et amis (par ordre alphabétique) pour leur aide aux étapes antérieures de ce travail : Sándor Krenedits, Óbuda University ; Alessandro Languasco, Universitá di Padova ; Máté Mráz, Szerencsejátél Plc. ; Szilárd Gy. Révész, Institut de mathématiques Alfréd Rényi HUN-REN ; et Gergelő Szabó, HUN-REN Hungarian Research Network. Le second auteur souhaite remercier son ancien étudiant postdoctoral Torsten Sillke (aujourd'hui Lufthansa Systems) pour les échanges réguliers d'idées.

Références

[1] L. Guth and J. Maynard, *New large value estimates for Dirichlet polynomials*, arXiv :2405.20552v2 (2024). Version arXiv.

[2] D. R. Heath-Brown, *Zero-free regions for Dirichlet L-functions, and the least prime in an arithmetic progression*, Proc. London Math. Soc. (3) **64** (1992), no. 2, 265-338.

[3] J. Maynard, M. Pandey, and M. Radziwiłł, *Exponential sums over primes*, arXiv :2608.14777v1 (2026), 14 août 2026. Version arXiv.

[4] H. L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 227, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[5] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *The exceptional set in Goldbach's problem*, Acta Arithmetica **27** (1975), 353-370.

[6] OpenAI, *The Quasi-Riemann Hypothesis : A Zero-Free Half-Plane* $\Re e\, s > 7/8$, OpenAI Math Release preprint, 30 septembre 2026, famille 003. Théorème 1.1. Version archivée du dépôt au commit `fd4aeeb2ee4f`, consulté le 10 octobre 2026.

[7] OpenAI, *The quasi-Riemann hypothesis : scope of the Lean formalization*, OpenAI Math Release, famille 003. Note sur la portée de la formalisation au même commit du dépôt, consultée le 10 octobre 2026.

[8] J. Pintz, *A new explicit formula in the additive theory of primes with applications I. The explicit formula for the Goldbach problem and the Generalized Twin Prime Problem*, Acta Arithmetica **210** (2023), 53-94. doi:10.4064/aa220728-31-3. Prépublication : arXiv:1804.05561v1 (2018) ; les numéros de théorèmes et d'équations renvoyant à cette prépublication sont explicitement identifiés dans le texte.

[9] J. Pintz, *A new explicit formula in the additive theory of primes with applications II. The exceptional set in Goldbach's problem*, arXiv:1804.09084v2 (2018).

[10] J. Pintz and I. Althöfer, with ChatGPT assistance, *Goldbach exceptional-set calculations*, manuscrit de recherche inédit et chaîne de certificats, septembre 2026. L'addendum intermédiaire `goldbach_068601_addendum.tex` est daté du 12 septembre 2026. Les notes de recherche ultérieures, y compris *Goldbach exponents below* 0.69 *: a comparison with Pintz's 2018 method* et *Extrapolating the Goldbach calculations from* 0.684 *towards* 0.680 (13 septembre 2026), consignent les étapes ultérieures 0.685 et 0.684 dans le cadre analytique conservé. Aucune nouvelle certification de cette chaîne n'est affirmée dans cet article.

[11] D. Wolke, *Primes with preassigned digits*, Acta Arithmetica **119** (2005), no. 2, 201-209. Voir l'équation (2.2.5), p. 203. PDF de l'éditeur.

[12] T. Xylouris, *On Linnik's constant*, arXiv:0906.2749 (2009).

[13] G. Zhao, *The exceptional set of Goldbach problem*, arXiv:2511.05631v1 (2025).

János Pintz
Institut de mathématiques Alfréd Rényi, HUN-REN
Reáltanoda u. 13-15, H-1053 Budapest, Hongrie

Ingo Althöfer
Université Friedrich-Schiller de Iéna
Faculté de mathématiques et d'informatique
D-07740 Iéna, Allemagne