Traduction de l'intervention de Peter Sarnak au Colloque à Bristol "*Perspectives on the Riemann hypothesis*" en 2018

Commençons par les impasses, et soulignons quelques pistes qui me semblent infructueuses. Pour ma part, j'ai reçu trois propositions ces derniers jours. Nous accueillons régulièrement de nombreuses propositions à l'Institut pour l'Étude Avancée.

Certaines sont automatiquement rejetées ; ce sont des cas simples, rédigés dans un langage nouveau. Mais beaucoup d'autres sont en réalité de vraies tentatives mathématiques. Il s'agit généralement de personnes maîtrisant un peu l'analyse complexe, comme des ingénieurs.

Et 99 % de ces propositions pourraient être rejetées au motif que la démonstration ne repose que sur l'équation fonctionnelle. Nous renvoyons dans ces cas une lettre de rejet standard. Je vous l'expliquerai dans un instant.

Généralement, il y a un petit va-et-vient, mais ce n'est pas tout à fait le fond du sujet. L'une des difficultés, comme nous le savons tous, avec l'hypothèse de Riemann (c'est-à-dire en n'utilisant que l'équation fonctionnelle de Riemann), est que si l'on prend des fonctions L (par exemple des combinaisons linéaires), on peut avoir plusieurs fonctions L avec le même conducteur et le même facteur epsilon (et il en existe de nombreuses) ; si l'on considère un degré plus élevé, il existe de nombreuses combinaisons avec la même équation fonctionnelle. On peut donc créer une combinaison linéaire non triviale, et pour cette nouvelle fonction, rien ne garantit qu'elle satisfasse l'hypothèse de Riemann ; en général, elle ne la satisfait pas.

Les théorèmes dans ce domaine remontent en grande partie à Hamburger. Ainsi, chaque fois qu'on propose une méthode concernant Riemann, il faut d'abord expliquer comment elle permet d'éviter cet écueil. C'est ce que j'appelle le principe d'impossibilité.

Ce n'est pas que les combinaisons linéaires soient inutilisables - elles permettent d'éliminer certains zéros - mais elles ont probablement un nombre excessif de zéros hors de la droite critique. Riemann avait déjà pressenti cela. Un des premiers théorèmes célèbres (de Hardy) établissait qu'une proportion positive de zéros se trouve sur la droite critique pour la fonction ζ de Riemann, et Selberg a montré qu'il existe également une proportion positive pour les combinaisons linéaires. En un sens, il a donc véritablement cerné le problème.

Quoi qu'il en soit, je pense que l'on doit garder à l'esprit l'idée de Montgomery selon laquelle, si l'on prend des combinaisons linéaires et que l'on utilise les statistiques du logarithme de ζ avec la racine carrée du logarithme, cette indépendance impliquerait qu'il est fort probable que 100 % des zéros soient sur la droite, mais pas tous. Nous nous intéressons ici à la stricte hypothèse de Riemann. Montgomery (je suis certain que vous avez tous lu des articles de lui à ce sujet) et Selberg y ont travaillé ; Selberg y a consacré ses dernières conférences, entre 80 et 90 ans, mais il n'a jamais pu mener ce projet à son terme.

Denise Vella-Chemla, assistée d'outils IA, septembre–octobre 2026.

Vidéo consultable à l'adresse https://vimeo.com/539529535/0b096a810b .

Bon, pour remédier à cette difficulté, Selberg a introduit la classe de Selberg. En réalité, je pense que la véritable raison pour laquelle il l'a élaborée (il en avait déjà l'idée dans les années 1960, mais l'a formulée explicitement à Amalfi), c'est qu'il voulait énoncer des théorèmes sur les combinaisons linéaires et disposer de fonctions L assez générales. Il ne souhaitait pas utiliser directement le langage de Langlands ; il a donc décidé d'axiomatiser la situation afin de pouvoir formuler la suite des opérations.

Mais dans la classe de Selberg, lorsqu'on choisit certains axiomes, on joue un peu à Dieu.

Ce n'est pas toujours une bonne idée. La valeur des axiomes dépend de leur utilisation. C'est une bonne notion, et lorsqu'on démontre quelque chose avec cet ensemble d'axiomes, on sait exactement ce qui a été utilisé dans la démonstration ; mais la classe de Selberg n'a rien d'intrinsèquement sacré à mon avis.

Il existe désormais des éléments de la classe de Selberg qui ne sont pas des fonctions L automorphes. Nous savons que ce sont les fonctions L automorphes qui comptent et qui nous intéressent. Concentrons-nous donc sur les objets principaux, à savoir les fonctions L des représentations automorphes cuspidales sur $\mathrm{GL}(m)$.

Ce sont conjecturalement toutes les fonctions L fondamentales. Si vous connaissez les fonctions L de Dirichlet ou de Hecke, il s'agit de leurs généralisations. Il existe une généralisation supplémentaire sur laquelle je ne m'attarderai que brièvement : la fonction $L(s, \pi, r)$, où π est une forme cuspidale sur $\mathrm{GL}(m)$ et r est une représentation du groupe dual, ici $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$. Il est possible de construire des fonctions L complexes à partir de représentations du groupe dual, une idée fondamentale de Langlands. Ces fonctions L sont censées être les fonctions L standard du monde mathématique.

Toutes les fonctions L standard possèdent un prolongement analytique et une équation fonctionnelle reliant s à $1-s$ et π à sa représentation contragrédiente $\tilde{\pi}$. Ceci a été démontré par Godement et Jacquet. On s'attend à ce qu'elles satisfassent toutes l'hypothèse de Riemann. Or, s'il existait un trop grand nombre de fonctions L (par exemple une famille continue à plusieurs paramètres), l'hypothèse de Riemann ne pourrait pas être vérifiée partout. En effet, lorsque des fonctions L varient continûment, leurs zéros se déplacent et peuvent quitter la droite critique. Ainsi, un continuum de fonctions L poserait un problème fondamental.

En fait, j'ai montré autrefois que s'il y a trop de formes automorphes dans une famille, l'hypothèse de Riemann impose des contraintes de rigidité très fortes sur leur distribution spectrale.

Il est donc crucial que l'ensemble des fonctions L automorphes soit dénombrable. Cette rigidité discrète est une propriété essentielle.

La véritable difficulté réside dans la tentative de concilier le produit eulérien (qui reflète la structure arithmétique) et l'équation fonctionnelle / prolongement analytique (obtenus par la théorie additive, la modularité ou la formule de sommation de Poisson). Comment étudier simultanément le produit d'Euler et l'équation fonctionnelle ?

C'est l'une des raisons pour lesquelles il est si difficile de progresser sur l'hypothèse de Riemann. Je vais maintenant consacrer quelques diapositives à ce que nous savons réellement sur l'hypothèse de Riemann.

Que savons-nous vraiment ? Par où commencer ?

Il n'existe fondamentalement qu'une seule méthode générale pour obtenir des régions sans zéros : la méthode de positivité basée sur les séries d'Eisenstein et les produits de Rankin-Selberg.

C'est l'approche la plus puissante. Pour toute fonction L automorphe π, on utilise un argument de positivité en construisant une fonction L auxiliaire à coefficients non négatifs. La manière standard consiste à considérer le produit tensoriel de π avec sa contragrédiente $\tilde{\pi}$. Les coefficients du développement en série de Dirichlet de $L(s, \pi \times \tilde{\pi})$ sont alors strictement positifs.

Cette fonction L de Rankin-Selberg possède un pôle en $s = 1$, et l'argument d'Hadamard et de La Vallée Poussin (fondé sur une inégalité trigonométrique de positivité) permet d'établir une région sans zéros à gauche de la droite $\Re(s) = 1$.

Pour la fonction ζ de Riemann, une amélioration de la largeur de la région sans zéros a été obtenue par Vinogradov grâce à ses estimations de sommes d'exponentielles (théorème de la valeur moyenne). Des progrès remarquables sur les bornes de Vinogradov ont été réalisés récemment par Wooley, puis complétés par Bourgain, Demeter et Guth. Cependant, ces résultats n'affectent que très marginalement la forme qualitative de la région sans zéros.

Mais la méthode la plus profonde pour obtenir de la positivité provient de la théorie spectrale des séries d'Eisenstein développée par Selberg (sur le demi-plan supérieur) et généralisée par Langlands aux groupes réductifs. Dans la théorie spectrale pure des séries d'Eisenstein, il n'y a pas d'arithmétique au départ. Mais lorsqu'on se place dans un cadre arithmétique, le terme constant de la série d'Eisenstein le long d'un parabolique maximal fait apparaître un produit d'Euler. C'est ce qui a conduit Langlands à rédiger son célèbre cours *Euler Products*.

La positivité provient alors de la relation de Maass-Selberg (qui exprime la positivité de la norme sur l'espace de Hilbert des séries d'Eisenstein). Cette positivité spectrale est bien plus puissante que l'inégalité trigonométrique usuelle d'Hadamard.

Prenons un exemple pour illustrer la puissance de cet argument d'Eisenstein. Considérons une forme automorphe cuspidale π sur $\mathrm{GL}(2)$. On souhaite étudier le produit tensoriel symétrique ou des combinaisons d'ordre élevé dont le produit d'Euler de degré 10 ne converge a priori que pour $\Re(s) > 1$ (voire $\Re(s) > 3/2$). La méthode spectrale des séries d'Eisenstein sur des groupes exceptionnels permet de prouver la non-annulation sur la droite $\Re(s) = 1$ sans même savoir à l'avance que le produit d'Euler converge au-delà de sa zone initiale ! C'est la forme de positivité la plus profonde connue.

Considérons maintenant les valeurs au point central $s = 1/2$. Pour une fonction L auto-duale

($\pi \cong \tilde{\pi}$), la fonction est réelle sur l'axe réel et l'hypothèse de Riemann implique que $L(1/2, \pi) \geq 0$. Peut-on prouver cette non-négativité sans hypothèse de Riemann ?

Grâce à un théorème majeur de Erez Lapid, pour toute la famille des fonctions L automorphes de type symplectique, la positivité du produit scalaire des séries d'Eisenstein implique que $L(1/2, \pi) \geq 0$. De même, pour les dérivées au point central, les formules de Gross-Zagier et leurs généralisations par Waldspurger et Zhang fournissent des expressions en termes de hauteurs de points de Heegner qui sont manifestement non négatives.

Passons à une autre approche : l'analyse complexe classique et les fonctions entières. On peut considérer la fonction $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$, ou $\Xi(t) = \xi(1/2 + it)$. L'hypothèse de Riemann équivaut au fait que toutes les racines de $\Xi(t)$ soient réelles.

En écrivant le développement de Taylor de $\Xi(t)$ ou de ses transformées, on peut étudier les polynômes de Jensen associés aux coefficients de Taylor. Un théorème de Polya et Szegö (et des travaux récents de Diaz-Vargas, Farmer, ainsi que Griffin, Ono, Tremblay et Zalesski) montre que la réalité de toutes les racines des polynômes de Jensen pour tout degré équivaut à l'hypothèse de Riemann. Ken Ono et ses coauteurs ont prouvé que pour un degré fixé M, les polynômes de Jensen $J_{d,k}(x)$ ont toutes leurs racines réelles lorsque le décalage $k \to \infty$. C'est un phénomène très intéressant de re-localisation des zéros sous l'action de la dérivation, comme l'a souligné Farmer, mais c'est un fait universel qui s'applique aussi à des combinaisons linéaires de fonctions L (pour lesquelles RH est fausse). Cela illustre à nouveau le principe d'impossibilité : les propriétés analytiques pures basées sur les séries de Taylor ne distinguent pas la vraie fonction ζ d'une combinaison linéaire.

Une autre déformation célèbre est la déformation de De Bruijn-Neumann. On multiplie le noyau de Fourier de $\Xi(t)$ par une gaussienne $e^{\lambda t^2}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Il existe un paramètre critique Λ (la constante de De Bruijn-Neumann) tel que pour $\lambda \geq \Lambda$, toutes les racines sont réelles. L'hypothèse de Riemann équivaut à $\Lambda \leq 0$. Récemment, Rodgers et Tao ont prouvé que $\Lambda \geq 0$, ce qui montre que $\Lambda = 0$ si RH est vraie. C'est un résultat magnifique, mais qui relève encore une fois de l'analyse globale et ne permet pas d'établir RH en soi.

Abordons maintenant l'approche par l'analyse fonctionnelle et les opérateurs.

Si vous avez un espace de fonctions ou de distributions et qu'un opérateur de dilatation T_λ : $f(x) \mapsto f(\lambda x)$ agit dessus, les fonctions propres d'un tel opérateur de dilatation continue sont nécessairement des puissances $x^{-\rho}$. Considérons par exemple la construction de Nyman-Beurling (et Baez-Duarte) : on prend la fonction partie fractionnaire $\rho(x) = \{1/x\}$ sur $(0, 1]$. L'hypothèse de Riemann équivaut à la densité de l'espace vectoriel engendré par les dilatées $f_a(x) = \{a/x\}$ ($0 < a \leq 1$) dans $L^2(0, 1)$.

Dans la même veine, Vasyunin et Rodriguez-Villegas ont étudié des approximations explicites par des combinaisons linéaires finies. Villegas a démontré un théorème remarquable montrant que la recherche de combinaisons optimales se réduit à l'intégralité des coefficients de fonctions hypergéométriques, liée au théorème d'Eisenstein sur les séries hypergéométriques algébriques. C'est une mathématique extrêmement profonde et élégante, mais qui montre les limites intrinsèques de ces

critères réels pures.

Plus récemment, des modèles spectraux ont été proposés par Bender, Brody et Müller (ainsi que les travaux de Berry-Keating). Ils considèrent des hamiltoniens quantiques non hermitiens du type $H = xp$ ou $H = x(p + 1/x)$, dont les fonctions propres formelles associées aux valeurs propres ρ sont de la forme $x^{-\rho}$.

Cependant, ces constructions souffrent toutes de la même limitation : l'espace de Hilbert sous-jacent n'est pas canoniquement défini sans injecter les zéros de ζ à la main. Si l'on applique la même construction formelle à une combinaison linéaire de fonctions L, la méthode formelle donnerait le même résultat, alors que la combinaison linéaire possède des zéros hors de la droite critique. C'est le principe d'impossibilité.

Un point crucial qu'il faut souligner concerne la possibilité de zéros multiples. S'il existe un zéro multiple ρ d'ordre $k > 1$, la fonction propre $x^{-\rho}$ est accompagnée de sous-espaces de Jordan engendrés par $x^{-\rho}\log(x), \ldots, x^{-\rho}\log^{k-1}(x)$. L'opérateur de dilatation n'est alors plus diagonalisable, mais possède un bloc de Jordan non trivial. Un simple opérateur auto-adjoint ou unitaire dans un espace de Hilbert standard ne peut pas comporter de blocs de Jordan pour ses valeurs propres réelles. Cela remet en question la formulation naïve de l'idée de Hilbert-Pólya (selon laquelle les zéros seraient les valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint unitaire).

Examinons la théorie de Louis de Branges. De Branges a développé une théorie très profonde des espaces de Hilbert de fonctions entières. Dans ses tentatives de démonstration de l'hypothèse de Riemann, il formule des conditions de positivité sur des espaces d'unités. Mais comme l'ont analysé Bombieri et d'autres, les axiomes de De Branges impliqueraient non seulement l'hypothèse de Riemann, mais aussi la simplicité stricte de tous les zéros, ainsi que des propriétés de séparation qui s'avèrent incompatibles avec ce que l'on sait des familles de fonctions L.

Pourquoi croyons-nous néanmoins à une interprétation spectrale ? Parce qu'elle existe et fonctionne parfaitement dans le cas des corps de fonctions de caractéristique p !

Pour une courbe C définie sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, l'hypothèse de Riemann (démontrée par Weil en 1948) repose sur deux étapes clés :

1. L'interprétation spectrale : les zéros de la fonction $\zeta_C(s)$ sont les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius agissant sur la cohomologie (cohomologie l-adique de Grothendieck).
2. La positivité : pour prouver que les valeurs propres ont pour module $q^{1/2}$, Weil utilise la théorie des correspondances sur la surface $C \times C$ et le théorème de Riemann-Roch (ou la positivité de la trace sur la variété jacobienne).

Bombieri a donné en 1976 une présentation magnifique de la démonstration de Stepanov pour les courbes sur $\mathbb{F}_q$. La méthode de Stepanov est élémentaire et repose sur la construction de polynômes auxiliaires (la méthode polynomiale). Elle donne une borne sur le nombre de points rationalisés de la forme $|N_1 - (q+1)| \leq 2g\sqrt{q}$. Cette démonstration donne des informations très précieuses même lorsque le genre g est très grand par rapport à q, une situation où la théorie usuelle ne donne rien.

Pour les variétés de dimension supérieure sur $\mathbb{F}_q$, c'est le théorème fondamental de Deligne (Weil I et Weil II, 1974/1980) qui établit la conjecture de Riemann généralisée grâce au théorème de monodromie et à la théorie des familles.

Rapprochons cela du monde du corps de nombres $\mathbb{Q}$. Parlons du rôle des adèles $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ et des idéles $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$.

L'anneau des adèles $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \times \prod_p{}' \mathbb{Q}_p$ et le groupe des idéles $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}$ permettent de reformuler la théorie des nombres de manière géométrique. Dans sa thèse (1950), Tate a montré que la formule explicite et l'équation fonctionnelle de $\zeta(s)$ découlent de l'analyse harmonique sur le groupe quotient compact/discret $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times}$.

Paul Cohen avait une vision très originale de cet espace quotient $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^{\times}$. À la fin des années 1970, Cohen cherchait à construire une théorie spectrale sur l'espace singulier $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^{\times}$ en combinant la structure additive et multiplicative. Il cherchait une identité de trace dont le côté géométrique redonnerait le second membre de la formule explicite de Weil-Guinand :

$$\sum_{\gamma} h(\gamma) = h(i/2) + h(-i/2) - \sum_{p,k} \frac{\log p}{p^{k/2}} \left[g(k \log p) + g(-k \log p) \right] - \dots$$

Alain Connes a concrétisé cette idée dans les années 1990/2000 dans le cadre de la géométrie non commutative. Connes considère l'espace des feuilles du quotient non commutatif $\mathbb{A}/\mathbb{Q}^{\times}$. En 1999, la formule de trace de Connes nécessitait une condition de découpement (cutoff) qui ne capturait les zéros que de manière globale sans exclure a priori les zéros hors de la droite.

Ralf Meyer (2005) a apporté une rigueur complète à ce programme en formulant un théorème de trace exact sur l'espace quotient adéliques $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^{\times}$ sans imposer artificiellement aux zéros d'être sur la droite critique. Le côté spectral donne la somme sur tous les zéros complexes de $\zeta(s)$, et le côté géométrique donne la formule explicite de Weil. C'est une interprétation spectrale exacte et magnifique, mais le problème de la positivité de l'opérateur (pour garantir que les zéros sont sur la droite $\Re(s) = 1/2$) reste l'obstacle majeur.

Cela nous amène à la notion de familles de fonctions L.

Pourquoi l'étude des familles est-elle indispensable ? Il est pratiquement impossible de comprendre une fonction L isolée sans l'insérer dans une famille d'objets automorphes de même nature. Les formes automorphes cuspidales sur $\mathrm{GL}(m)$ forment un ensemble discret et dénombrable (en raison du caractère discret du spectre cuspidal). Cela empêche les déformations continues arbitraires et impose une structure arithmétique rigide.

Avec Nick Katz, nous avons développé l'étude des symétries des zéros de basse énergie au voisinage du point central pour diverses familles de fonctions L (orthodoxes, symplectiques, unitaires). Dans ces familles, bien qu'on ne sache pas prouver l'hypothèse de Riemann pour chaque individu, on sait calculer des moyennes spectrales de coefficients grâce à la formule des traces de Selberg ou de Petersson. Des théorèmes majeurs comme le théorème de Bombieri-Vinogradov (qui établit l'hypothèse de Riemann en moyenne sur les conducteurs) fournissent des substituts complets et

parfaitement opérationnels à l'hypothèse de Riemann dans de nombreuses applications arithmétiques.

Pour aller plus loin dans la structure des familles, l'idée centrale - introduite par Shintani, Sato et développée par Langlands et Serre - repose sur la considération des puissances symétriques $\mathrm{Sym}^k(\pi)$. Pour quantifier la distribution des coefficients de Satake d'une forme automorphe π, il ne faut pas calculer de simples moments naifs de coefficients, mais analyser les fonctions L associées aux représentations Sym^k du groupe dual. C'est l'outil fondamental pour établir la conjecture de Sato-Tate (prouvée par Barnet-Lamb, Geraghty, Harris et Taylor).

Pour terminer, permettez-moi de vous présenter une curiosité remarquable : la déformation du théorème des nombres premiers.

Considérons un sous-groupe discret Fuchsien $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ possédant une pointe (cuspide). Pour le groupe modulaire $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, la fonction de compte des longueurs géodésiques ou des sommes de Kloosterman est directement liée au théorème des nombres premiers pour $\mathbb{Q}$ via la fonction ζ de Riemann ou les fonctions L.

Or, Teichmüller et la théorie des déformations de Klein-Maskit permettent de déformer continûment le groupe discret Γ dans l'espace de Teichmüller. Pour un groupe déformé général Γ_θ, il n'y a plus aucune structure arithmétique ni aucun produit d'Euler ! Et pourtant, en utilisant la théorie spectrale des séries d'Eisenstein sur le quotient $\Gamma_\theta \backslash \mathbb{H}$, on peut prouver un théorème du type "théorème des nombres premiers" (comportement asymptotique des sommes de termes constants $c \leq x$) valable uniformément sur tout l'espace de Teichmüller déformé ! Cela montre que le théorème des nombres premiers est un phénomène analytique/spectral extrêmement stable sous déformation, alors que l'hypothèse de Riemann, elle, requiert la rigidité arithmétique exacte des produits d'Euler.

Questions et discussion finales :

Question : Pensez-vous que l'hypothèse de Riemann doive être vraie pour toutes les fonctions L motiviques ou automorphes simultanément, ou pourrait-on la prouver uniquement pour la fonction ζ de Riemann en premier ?

P. Sarnak : C'est une question fondamentale. Les fonctions L motiviques (issues de la géométrie algébrique et des représentations de Galois) forment le noyau arithmétique dur. Pour une fonction L d'une variété sur un corps de nombres, la présence de zéros multiples au point central est possible pour des raisons arithmétiques profondes (conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, rang des variétés abéliennes). Mais lorsqu'on décompose une fonction L en facteurs irréductibles de Hecke, on conjecture (généralisation de Chowla) que les facteurs individuellement ne s'annulent pas hors du centre et n'ont que des zéros simples sur la droite critique. Rubinstein et moi-même conjecturons de plus l'indépendance linéaire des zéros des différentes fonctions L irréductibles. Se concentrer uniquement sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann en ignorant le monde automorphe serait se priver de l'outil le plus puissant dont nous disposons : la structure des familles et la positivité spectrale des séries d'Eisenstein. Le problème est indissociable de la théorie globale des formes automorphes et du programme de Langlands. Merci beaucoup.