

# Opérateurs de limitation temporelle et en bande discrets et matrices tridiagonales commutantes

Ronald Keith Perline

## 1. Résumé

Les opérateurs de limitation temporelle et en bande, correspondant aux familles orthogonales discrets classiques, admettent des opérateurs aux différences du second ordre commutants. Une nouvelle démonstration est présentée.

## 2. Introduction.

Soit  $p_i(x)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ) une collection de fonctions discrètes linéairement indépendantes, orthogonales par rapport à un certain poids  $w(x)$ . À la suite de [4], [6] et [7], nous considérons l'analogie de la "limitation temporelle" (time limiting) et de la "limitation en bande" (band limiting) pour l'analyse de Fourier ordinaire sur la droite. Soit  $f(x)$  une fonction discrète quelconque; désignons par  $M_K$  l'opérateur qui multiplie  $f$  par la fonction caractéristique de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, K\}$ . Nous appelons  $M_K$  un opérateur de "limitation temporelle". De même, désignons par  $P_L$  l'opérateur qui projette  $f$  sur l'espace engendré par les fonctions  $\{p_0, p_1, \dots, p_L\}$ .  $P_L$  est un opérateur de "limitation en bande". La composition auto-adjointe  $M_K P_L M_K$  est appelée par nous opérateur de "limitation temporelle et en bande". Ces opérateurs sont des analogues de l'opérateur de convolution finie  $T : L^2 \rightarrow L^2$  donné par

$$Tf(x) = \int_{-A}^A \frac{\sin B(x-y)}{x-y} f(y) dy,$$

qui a fait l'objet d'une étude intensive dans la célèbre série d'articles de Slepian, Landau et Pollak [8], [9], [10], [11], [12]. L'analyse de cet opérateur a été facilitée par un "accident" heureux : l'existence d'un opérateur différentiel du second ordre, auto-adjoint et commutant.

Dans le cas de notre opérateur (matriciel)  $M_K P_L M_K$ , nous pourrions espérer de même l'existence d'une matrice tridiagonale commutante. Perlstadt, motivé par les travaux de Grunbaum dans [3] et [4], a montré qu'une telle matrice tridiagonale commutante existe effectivement si la famille de polynômes  $\{p_i(x)\}$  est de type classique : Poisson-Charlier, Meixner, Krawtchouk et Hahn (voir [6]). Ce résultat a été généralisé dans [7] pour inclure les polynômes q-Racah d'Askey et Wilson [1], qui englobent les familles classiques comme cas particuliers.

Les démonstrations de [6] et [7] sont fortement inspirées de la démonstration donnée dans [4]. En particulier, les propriétés dont jouissent les polynômes q-Racah et qui interviennent dans la démonstration sont :

1. les  $p_i$  sont des fonctions propres d'un opérateur aux différences du second ordre;
2. l'existence d'une formule de Christoffel-Darboux (équivalente à une relation de récurrence à trois termes);
3. l'existence d'une formule aux différences du premier ordre pour  $p_i$  en fonction de  $p_i$  et  $p_{i-1}$ .

La démonstration de [7] est combinatoire et assez complexe. Cela est dû au fait que les polynômes q-Racah apparaissent explicitement dans les calculs ; et les formules impliquant les polynômes q-Racah tendent vers le baroque, c'est le moins qu'on puisse dire. Ce fut donc une agréable surprise lorsque nous avons découvert une démonstration simple, directe et constructive de l'existence d'une matrice tridiagonale commutante pour l'opérateur de limitation temporelle et en bande, dès que la famille orthogonale  $\{p_i(x)\}$  satisfait aux propriétés (i) et (ii). À première vue, ce résultat peut sembler plus général que celui de [7] ; mais selon [5], toute famille orthogonale possédant ces propriétés est en fait de type q-Racah.

### 3. La démonstration.

Tout d'abord, nous établissons quelques notations et énonçons nos hypothèses d'une manière qui facilite la démonstration de notre théorème. Comme indiqué dans l'introduction, soit  $\{p_i(x)\}$  notre famille de fonctions discrètes linéairement indépendantes, orthogonales par rapport au poids  $w(x)$ .

Nous supposons que :

1.  $D(p_i)(x) = \lambda(i)p_i(x)$ , les fonctions  $\{p_i\}$  sont des fonctions propres pour un certain opérateur aux différences du second ordre  $D$ , auto-adjoint par rapport au poids  $w$  ;
2. Il existe une fonction discrète  $\Theta(x)$  qui satisfait une relation de récurrence à trois termes par rapport aux fonctions  $\{p_i(x)\}$  :

$$\Theta(x)p_i(x) = a_i p_{i+1}(x) + b_i p_i(x) + c_i p_{i-1}(x).$$

Parce que nous supposons que l'indice  $i$  a un domaine fini  $0 \leq i \leq N$ , nous imposons les conditions que  $a_N = 0$ ,  $c_0 = 0$ .

Par exemple, les polynômes de Hahn  $h_i(x)$  (voir [2]) sont définis par

$$h_i(x) = {}_2F_1(-i, -x, i + \alpha + \beta + 1; -N, \alpha + 1; 1), \quad \alpha, \beta > -1, \quad x, i = 0, 1, \dots, N$$

où  ${}_2F_1$  est la fonction hypergéométrique généralisée. Si nous utilisons  $C(n, k)$  pour désigner le coefficient binomial standard, le poids associé à la famille  $\{h_i\}$  est

$$w(x) = \frac{C(\alpha + x, x)C(\beta + N - x, N - x)}{C(N + \alpha + \beta + 1, N)}.$$

Les polynômes de Hahn satisfont :

1. Équation aux différences du second ordre

$$(1/w(x))\Delta_+[-w(x-1)(\alpha+x)(N+1-x)\Delta_-h_i(x)] = (i)(i+\alpha+\beta+1)h_i(x),$$

où

$$\Delta_+f(x) = f(x+1) - f(x),$$

$$\Delta_-f(x) = f(x) - f(x-1);$$

2. Relation de récurrence à trois termes : si  $p_i = h_i/||h_i||$  alors les  $p_i$  normalisés satisfont

$$xp_i(x) = a_i p_{i+1}(x) + b_i p_i(x) + c_i p_{i-1}(x);$$

où  $a_{i-1} = c_i$ , et

$$a_i = \left( \frac{(i+1)(i+1+\beta)(i+\alpha+\beta+N+2)(i+\alpha+\beta+1)(i+\alpha+1)(N-i)}{(2i+\alpha+\beta+2)(2i+\alpha+\beta+3)(2i+\alpha+\beta+1)(2i+\alpha+\beta+2)} \right)^{1/2};$$

ceci n'est qu'une reformulation de la formule de Christoffel-Darboux.

Pour en revenir à notre discussion principale : en remplaçant  $p_i(x)$  par  $p_i(x)\sqrt{w}(x)$  et  $D$  par  $\sqrt{w}D(1/\sqrt{w})$  (notons qu'il s'agit d'une conjugaison d'opérateurs), nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $w(x) \equiv 1$ . Il est également commode de supposer que les fonctions  $\{p_i\}$  sont normalisées, de sorte qu'elles sont orthonormales. Avec ces hypothèses, nous remarquons que  $c_i = a_{i-1}$ .

Introduisons une seconde base

$$d_i(x) = \begin{cases} 1, & x = i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que, pour toute fonction  $f$ , nous avons

$$f = \sum \langle f, d_i \rangle d_i = \sum f(i) d_i.$$

Les conditions (i) et (ii) peuvent être reformulées comme suit :

1. La transformation linéaire  $D$  est symétrique tridiagonale par rapport à la base  $d$   $B_d = \{d_0, d_1, d_2, \dots, d_N\}$ ; elle est diagonale par rapport à la base  $p$   $B_p = \{p_0, p_1, \dots, p_N\}$ .
2. La transformation linéaire  $\Theta : f(x) \rightarrow \Theta(x)f(x)$  est diagonale par rapport à  $B_d$ ; elle est symétrique tridiagonale par rapport à  $B_p$ .

Comme dans l'introduction, soit  $M_K$  la projection sur l'espace engendré par  $\{d_0, d_1, \dots, d_K\}$  et soit  $P_L$  la projection sur  $\{p_0, p_1, \dots, p_L\}$ .

**Théorème 1.** *Il existe une matrice tridiagonale symétrique qui commute avec  $M_K P_L M_K$ .*

*Démonstration.* Considérons l'opérateur

$$(\Theta D + D \Theta) - (\Theta(K+1) + \Theta(K))D - (\lambda(L+1) + \lambda(L))\Theta = T(K, L) = T.$$

La représentation matricielle de  $T$  par rapport à  $B_p$  est symétrique tridiagonale. En fait, sa représentation matricielle a l'allure de :

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
(0) & & & & (L) & (L+1) \\
* & * & & & & \\
* & * & * & & & \\
& * & * & * & & \\
& & * & * & * & \\
& & & * & * & \\
& & & & 0 & \\
\hline
& & & & 0 & \\
& & & & * & * \\
& & & & * & * & * \\
& & & & & * & * & * \\
& & & & & & * & *
\end{array}
\end{array}
.$$

Pour le voir, notons que les termes (I), (II) et (III) sont tous symétriques tridiagonaux par rapport à  $B_p$ , donc  $T$  l'est aussi. En fait, (II) est diagonal par rapport à  $B_p$ . Considérons maintenant la différence (I)–(III). Il est facile de voir que l'élément  $(L, L+1)$  de  $(\Theta D + D\Theta)$  est simplement  $(\lambda(L+1) + \lambda(L))$  fois l'élément  $(L, L+1)$  de  $\Theta$ ; mais cela montre que l'élément  $(L, L+1)$  de (I)–(III) est nul, ce qui donne la matrice indiquée ci-dessus.

De même, la représentation de  $T$  par rapport à  $B_d$  a l'allure de :

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
(0) & & & & (K) & (K+1) \\
* & * & & & & \\
* & * & * & & & \\
& * & * & * & & \\
& & * & * & * & \\
& & & * & * & \\
& & & & 0 & \\
\hline
& & & & 0 & \\
& & & & * & * \\
& & & & * & * & * \\
& & & & & * & * & * \\
& & & & & & * & *
\end{array}
\end{array}
.$$

$T$  commute avec  $P_L$ ; cela découle immédiatement de la représentation matricielle de  $T$  par rapport à  $B_p$  donnée ci-dessus, et du fait que la représentation de  $P_L$  par rapport à  $B_p$  est simplement :

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
(0) & & & & (L) & (L+1) & \\
\hline
1 & & & & & & \\
& 1 & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & & 1 & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & 0 & \\
& & & & & & 0 \\
& & & & & & 0
\end{array}
\end{array}
.$$

De même,  $T$  commute avec  $M_K$ , ce qui se voit en considérant leurs représentations par rapport à  $B_d$ . Ainsi,  $T$  commute avec  $M_K P_L M_K$ . Le même type d'argument montre que  $T$  est symétrique tridiagonal par rapport à  $B_d$  et commute avec  $P_L M_K P_L$ .  $\square$

## 4. Remarques.

On peut se demander comment les matrices tridiagonales commutantes générées ici se comparent à celles trouvées dans [6] et [7]. Nous signalons qu'une vérification au cas par cas des circonstances connues dans lesquelles existent des matrices tridiagonales commutantes (ou les analogues continus dans [4]) montre que notre méthode produit le même opérateur commutant (F. A. Grünbaum et M. Reach, communication privée).

Enfin, la motivation pour trouver la matrice tridiagonale commutante étant de faciliter l'analyse spectrale de l'opérateur  $M_K P_L M_K$ , il est souhaitable d'avoir des conditions garantissant que la matrice  $T$  a un spectre simple. Nous énonçons quelques conditions suffisantes simples :

1. Les éléments hors diagonale de la relation de récurrence à trois termes pour  $\Theta$  sont non nuls ;
2. Les valeurs propres de l'opérateur aux différences  $D$  satisfont  $\lambda(L+1) + \lambda(L) = \lambda(K+1) + \lambda(K) \rightarrow L = K$ .

Ces conditions sont satisfaites pour les polynômes orthogonaux classiques. Nous laissons la démonstration selon laquelle ces conditions impliquent un spectre simple comme exercice au lecteur intéressé.

## Références

- [1] R. Askey, J. Wilson, A set of orthogonal polynomials that generalize the Racah coefficients or 6-j symbols, SIAM J. Math. Anal., 10 (1979), pp. 1008-1016.
- [2] R. Askey, Orthogonal Polynomials and Special Functions, CBMS Regional Conference Series in Applied Mathematics, 21, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1975.
- [3] F. A. Grünbaum, L. Longhi, M. Perlstadt, Differential operators commuting with finite convolution operators. some nonabelian examples, SIAM J. Appl. Math., 42 (1982), pp. 941-952.

- [4] F. A. Grünbaum, A new property of reproducing kernels for classical orthogonal polynomials, *J. Math. Anal. Appl.*, 95 (1983), pp. 491-500.
- [5] D. Leonard, Orthogonal polynomials, duality, and association schemes, *SIAM J. Math. Anal.*, 13 (1982), pp. 656-663.
- [6] M. Perlstadt, Chopped orthogonal polynomial expansions-some discrete cases, *this Journal*, 4 (1983), pp. 94-100.
- [7] M. Perlstadt, A property of orthogonal polynomial families with polynomial duals, *SIAM J. Math. Anal.*, 15 (1984), pp. 1043-1054.
- [8] D. Slepian, H. O. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. I, *Bell System Tech. J.*, 40 (1961), pp. 43-64.
- [9] H. J. Landau, H. O. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. II, *Bell System Tech. J.*, 40 (1961), pp. 65-84.
- [10] H. J. Landau, H. O. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty : III, *Bell System Tech. J.*, 41 (1962), pp. 1295-1336.
- [11] D. Slepian, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty : IV, *Bell System Tech. J.*, 43 (1964), pp. 3009-3058.
- [12] D. Slepian, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty : V, *Bell System Tech. J.*, 57 (1978), pp. 1371-1430.